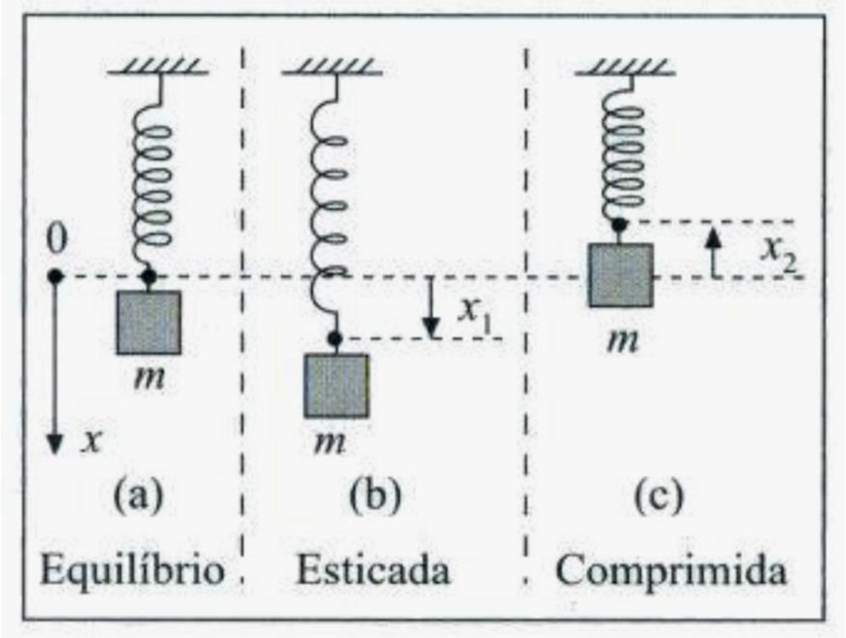
Física para Engenharia II

Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 222
marciadr@if.usp.br

Oscilador Harmônico

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Solução geral das oscilações livres do oscilador harmônico

$$x(t) = a sen(\omega t) + b cos(\omega t)$$

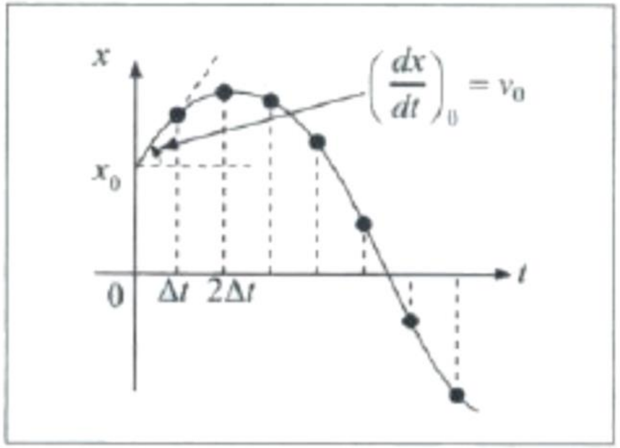
ou

$$x(t) = A cos(\omega t + \varphi)$$

Com a, b, A e φ constantes

$$\begin{cases} a = A cos(\varphi) \\ b = -A sen(\varphi) \end{cases}$$

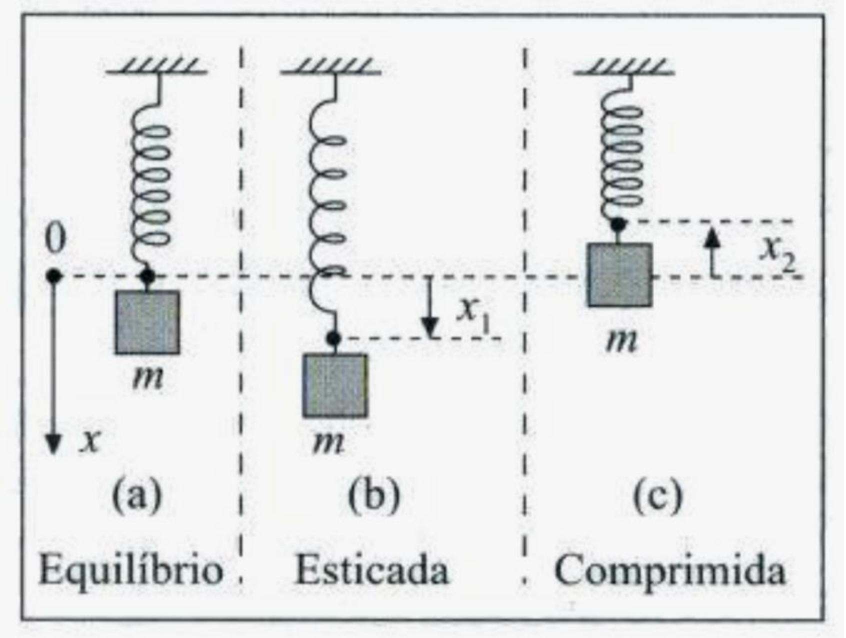
$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$



Oscilador Harmônico

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = -\omega Asen(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi)$$

Condições iniciais $\quad x(0) = x_0 \;$ e $\; v(0) = v_0$

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Acos(\varphi) = x_0 \\ -\omega Asen(\varphi) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{{x_0}^2 + \dfrac{{v_0}^2}{\omega^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x_0}{A} \end{cases}$$

$$x(t) = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$$

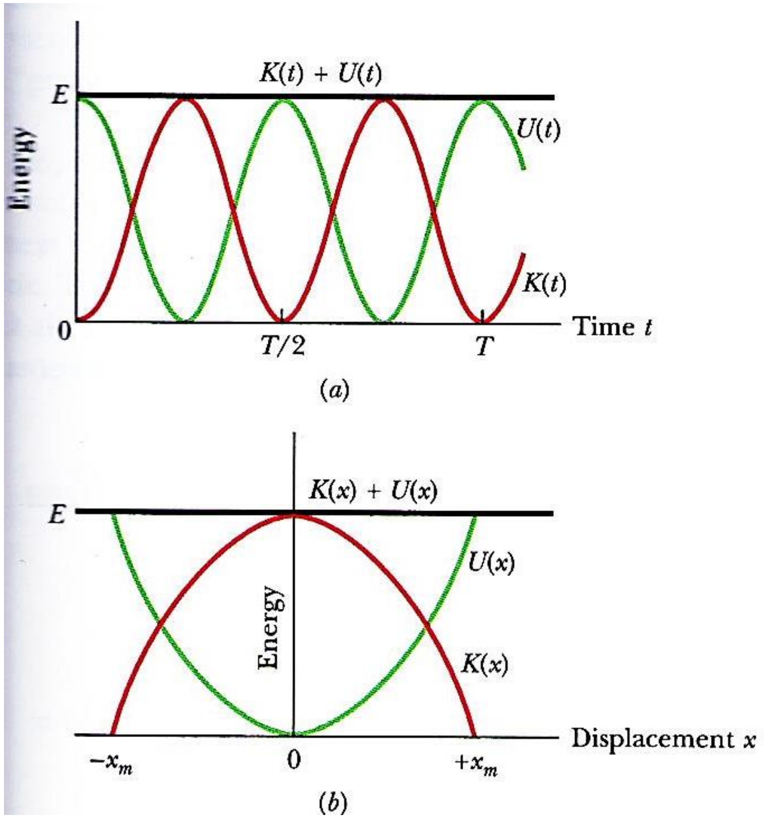
$$x(t) = x_0 sen(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} cos(\omega t)$$

Oscilador Harmônico

Energia do oscilador harmônico

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t + \varphi)$$



A energia total do sistema se conserva

$$E_{total} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{constante}$$

Oscilador Harmônico

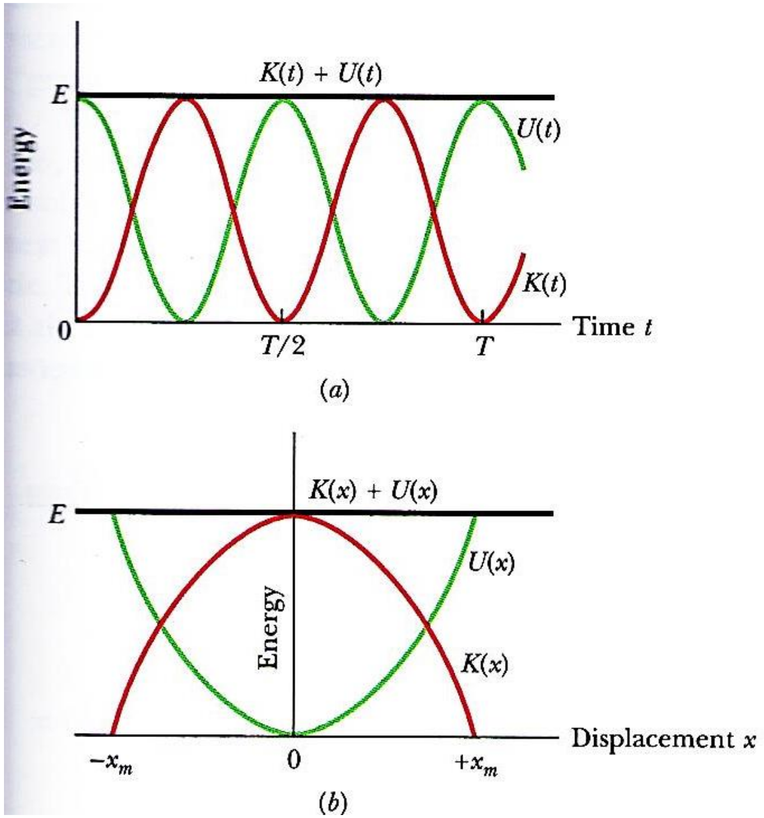
Energia do oscilador harmônico

$$E_{total} = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$K = E - U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

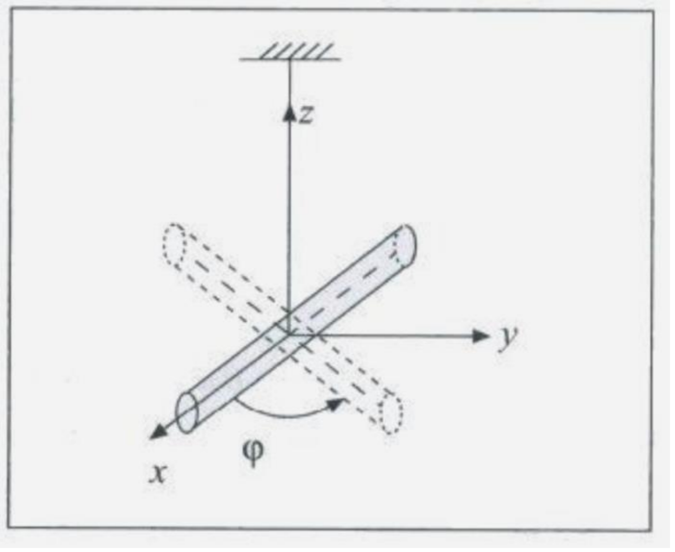
$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



Aplicações do MHS

Pêndulo de Torção



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O torque restaurador no fio será

$$\tau = -K\varphi$$

Onde K é o módulo de torção do fio

Considerando-se I como o momento de inércia, temos:

$$\tau = I\alpha = I\ddot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = -K\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{K}{I}\varphi \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

solução

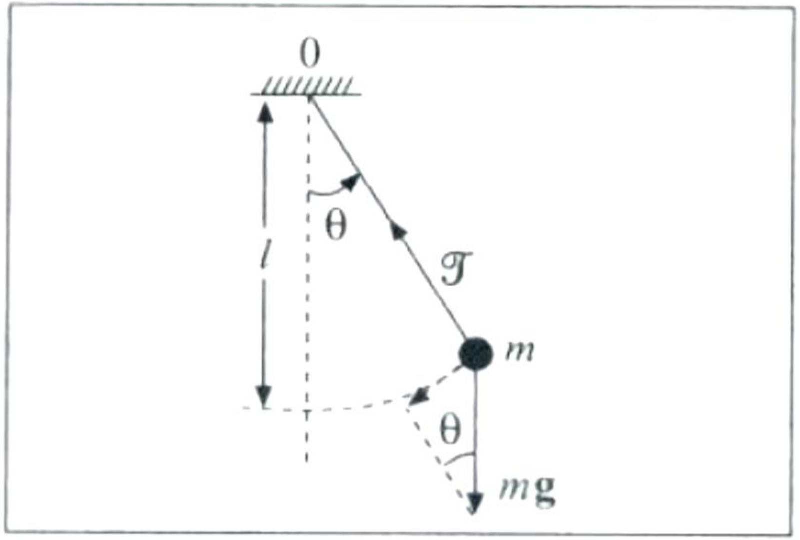
$$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

ou

$$\varphi(t) = a\,sen(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

Aplicações do MHS

Pêndulo simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Decompondo as forças em componentes angular e radial, temos:

$$ma_{cp} = mr\omega^2 = ml\dot{\theta}^2 = T - mgcos\theta$$

$$ma_\theta = mr\alpha = ml\ddot{\theta} = -mgsen\theta$$

A segunda equação descreve o movimento:

$$l\ddot{\theta} = -gsen\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sen\theta$$

$$\theta \ll 1 \rightarrow sen\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

solução

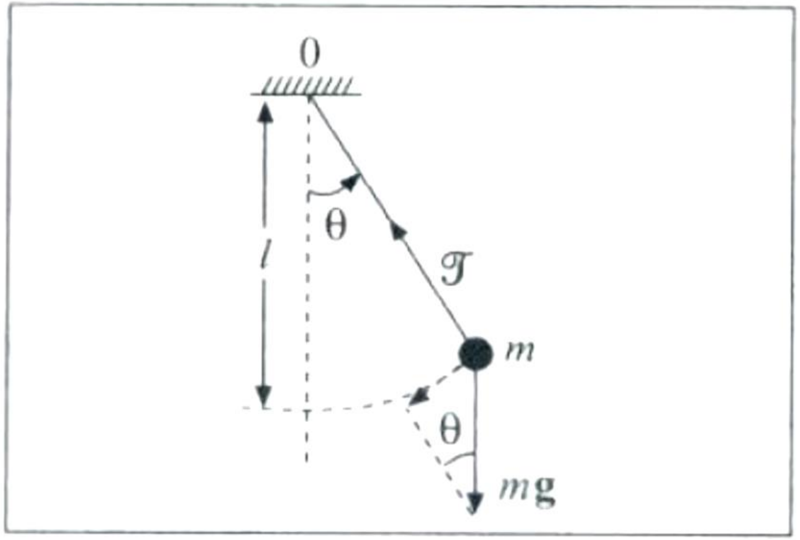
$$\theta(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

ou

$$\theta(t) = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$$

Aplicações do MHS

Pêndulo simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Energia

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$U = -W_{0\rightarrow\theta} = mg\int_0^\theta sen\theta' \cdot l d\theta'$$

$$U = mgl(1 - cos\theta)$$

$$\theta \ll 1 \rightarrow sen\theta \approx \theta$$

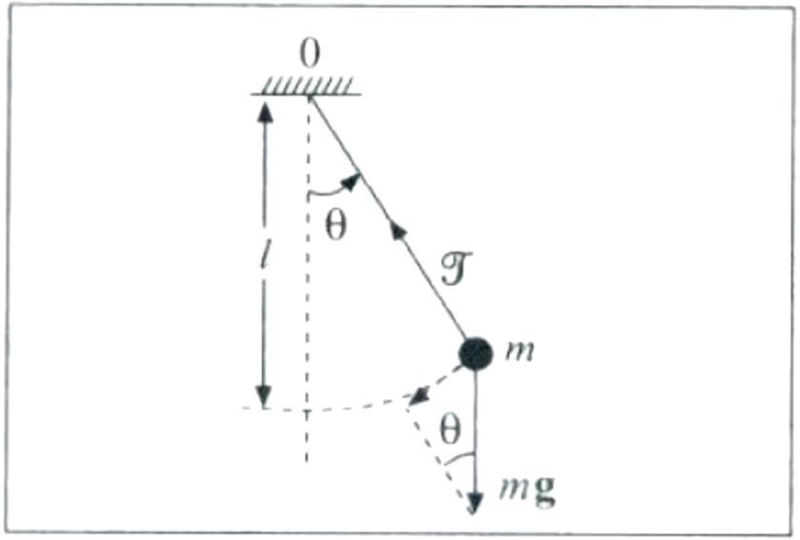
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$U \approx mg\int_0^\theta \theta' \cdot l d\theta' = \frac{1}{2}mgl\,\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\theta^2$$

Aplicações do MHS

Pêndulo simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Vamos reconsiderar o problema, sem a aproximação para pequenos ângulos.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U = mgl(1 - cos\theta)$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta)$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

$\theta = 0 \rightarrow E = 0$ Equilíbrio estável

$\theta = \pi \rightarrow E = 2mgl$ Equilíbrio instável

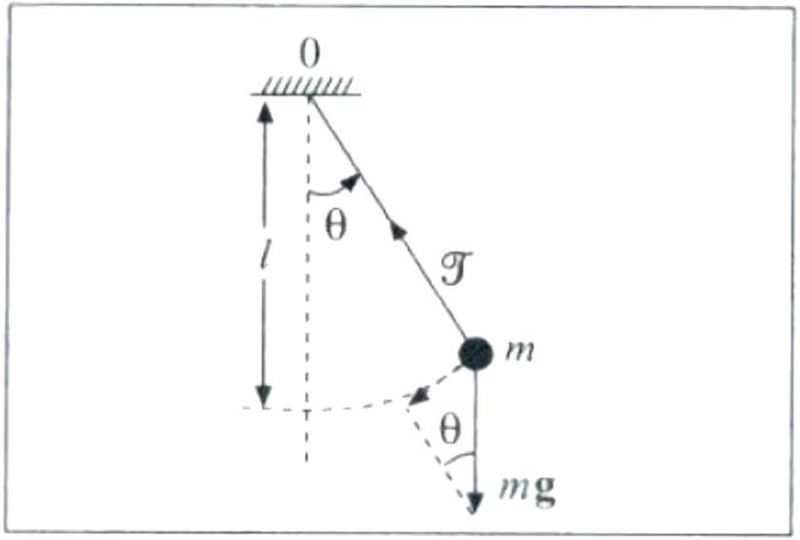
$$E < 2mgl \rightarrow \text{oscilação } \theta = \pm\theta_0$$

$$\theta = \pm\theta_0 \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$E = mgl(1 - cos\theta_0)$$

Aplicações do MHS

Pêndulo simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta)$$

$$E = mgl(1 - cos\theta_0)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(cos\theta_0 - cos\theta) = 0$$

ida e retorno

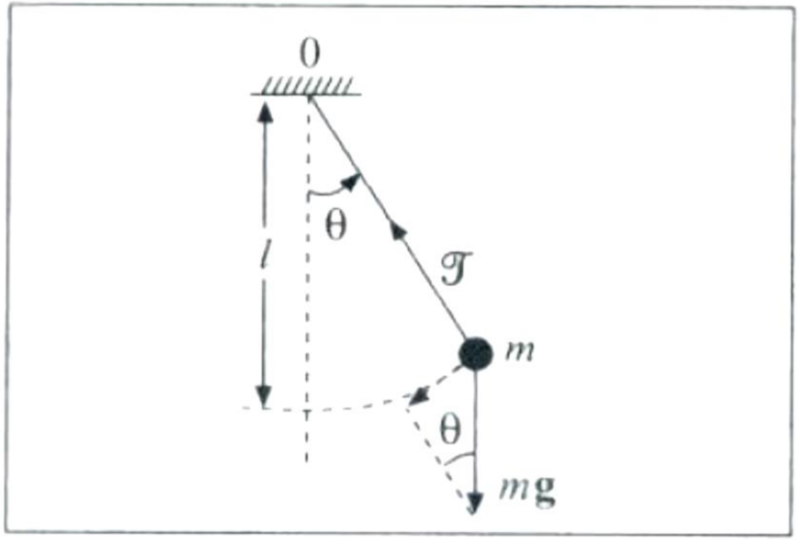
$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(cos\theta - cos\theta_0)}$$

Integrando durante a primeira metade

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{2} = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$$

Aplicações do MHS

Pêndulo simples



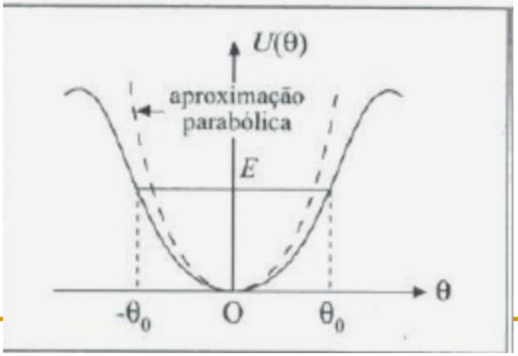
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{2} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$$

Integral elíptica, sem solução analítica.

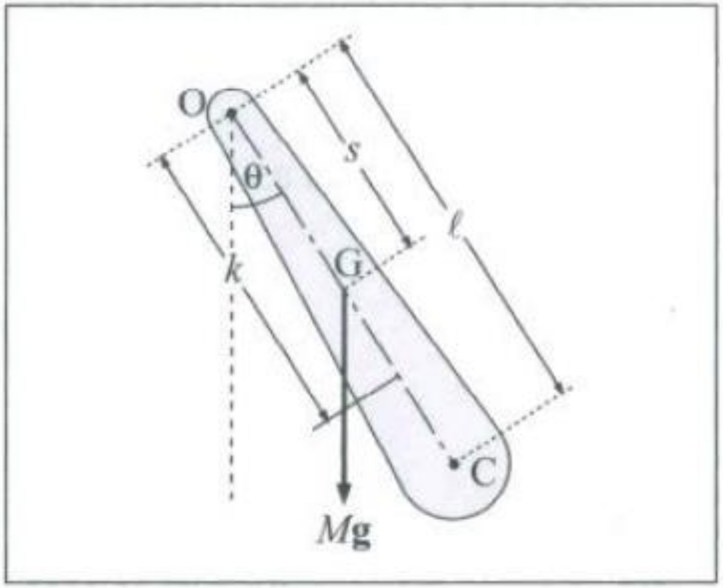
$$\tau \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}{\theta_0}^2\right)$$

O período depende da amplitude



Aplicações do MHS

Pêndulo Físico



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

O torque em relação a O será

$$\tau = -Mgs\, sen\theta$$

Considerando-se I como o momento de inércia, temos:

$$\tau = I\alpha = I\ddot{\theta} = -Mgs\, sen\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgs}{I}\, sen\theta$$

Pêndulo simples

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sen\theta$$

→

$$l = \frac{I}{Ms}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$