Física para Engenharia II

Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 100
marciadr@if.usp.br

https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=50617

Oscilador Harmônico

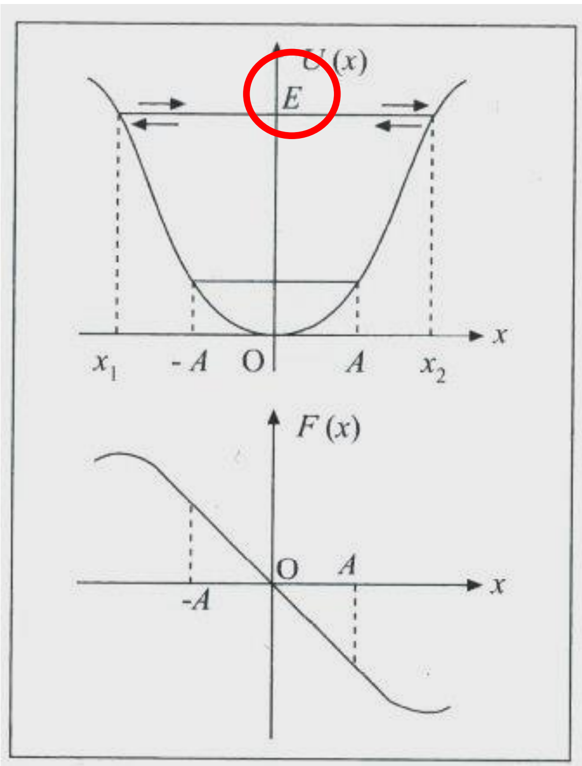
Oscilações → pêndulos, diapasões, cordas em instrumentos musicais, colunas de ar em instrumentos de sopro, corrente alternada, filtros, sistemas de transmissão, ...

Oscilações → Vibrações localizadas

Ondas → propagação

Oscilador Harmônico

Oscilações periódicas 1D → Ação de forças conservativas → Energia potencial $U(x)$



Poço Potencial

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Pequenas oscilações ao redor da posição de equilíbrio → $F(x) \sim linear$

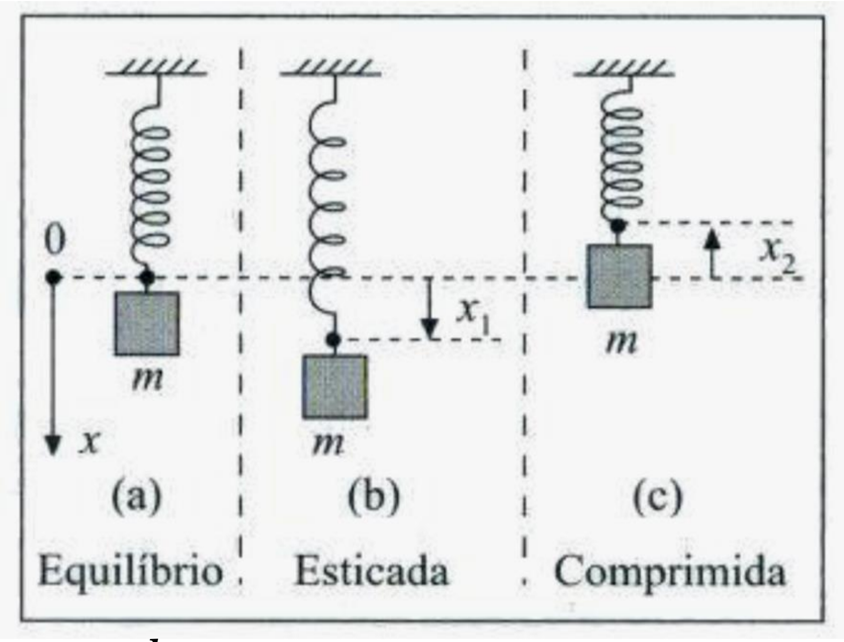
$$-A \leq x \geq A \qquad F(x) = -kx$$

Força restauradora – lei de Hooke

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$ ~parábola

Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$mg = kx_0$$

Equação do movimento

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Oscilador Harmônico Unidimensional

Qualquer sistema com um grau de liberdade → Pequenos desvios de uma posição de equilíbrio estável → Obedece com boa aproximação a equação do movimento do Oscilador Harmônico Unidimensional

Oscilador Harmônico

Movimento de um oscilador harmônico → Movimento Harmônico Simples (MHS)

Lei horária do MHS → Resolver a equação do movimento

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equação diferencial de segunda ordem para x(t)

Dadas as condições iniciais, equações diferenciais podem ser resolvidas por métodos numéricos (computador).

Oscilador Harmônico

Para Δt suficientemente pequeno:

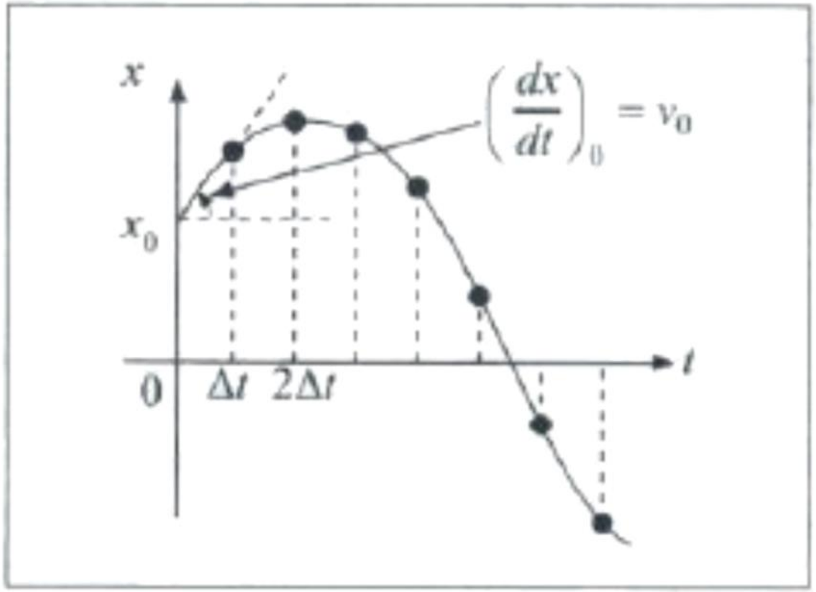
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{dx}{dt}(t+\Delta t) - \frac{dx}{dt}(t)\right]$$

$$\frac{dx}{dt}(t) \approx \frac{1}{\Delta t}[x(t+\Delta t) - x(t)]$$

Partindo de $t = 0$:

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \Delta t\frac{dx}{dt}(0) = x_0 + v_0\,\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) \approx \frac{dx}{dt}(0) + \Delta t\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}(0)}_{= -\omega^2 x(0)} = v_0 - \omega^2 x_0 \Delta t$$



Repetindo o mesmo processo para os intervalos sucessivos

Oscilador Harmônico

Equação diferencial linear → só contém termos lineares na função incógnita → Coeficientes independem de x

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = F$$

$F = 0$ → homogênea

Propriedades de uma equação diferencial linear:

(a) Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções $\rightarrow$ $x_1(t)+x_2(t)$ também é solução.

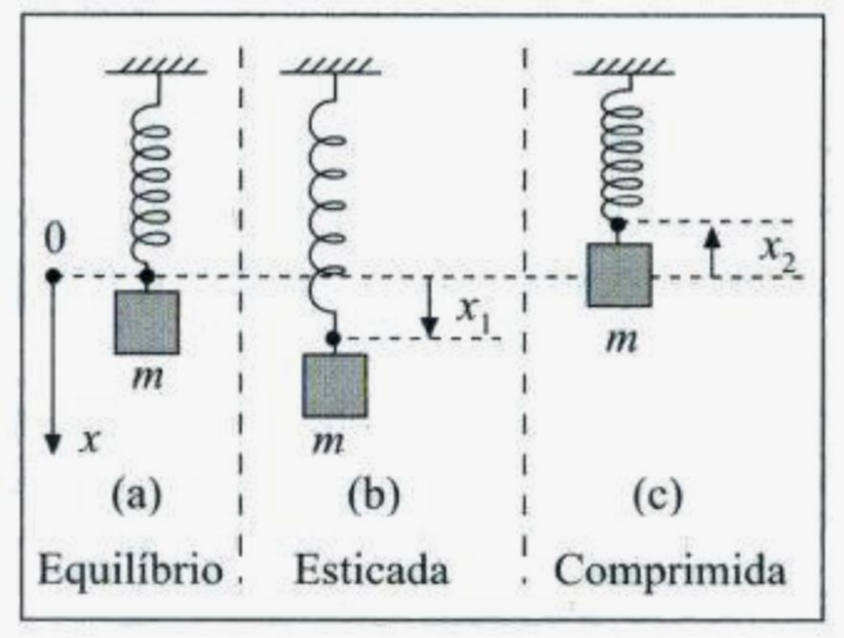
(b) Se $x(t)$ é solução $\rightarrow$ $ax(t)$ (a =constante) também é solução.

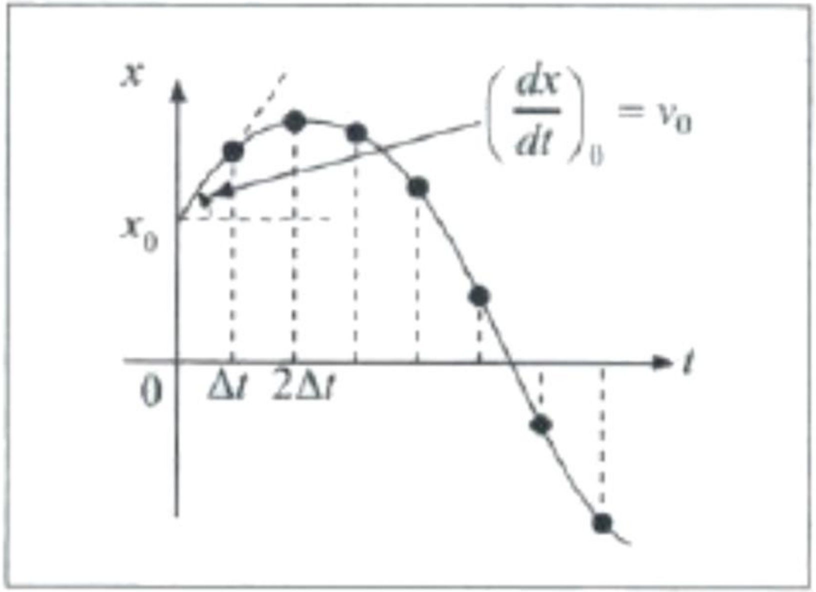
Portanto se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções (independentes)$\rightarrow$ qualquer combinação linear: $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$, com a e b constantes, também é solução (geral).

Princípio da superposição

Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola





A solução aproximada parece uma função do tipo senoidal

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

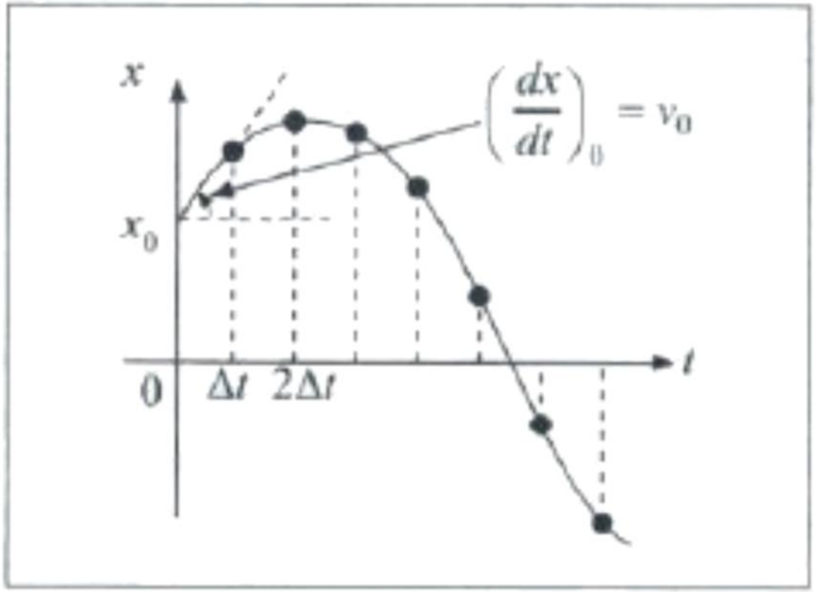
Considerando solução do tipo seno e cosseno

$$x_1(t) = sen(\omega t) \qquad x_2(t) = cos(\omega t)$$

Oscilador Harmônico

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$x_1(t) = sen(\omega t)$ $\quad$ $x_2(t) = cos(\omega t)$

Solução geral das oscilações livres do oscilador harmônico

$$x(t) = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$$

ou $\quad$ Com $a, b, A\ e\ \varphi$ constantes

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} a = Acos(\varphi) \\ b = -Asen(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Oscilador Harmônico

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

Oscila entre os extremos $-A$ e A → Amplitude de oscilação

$(\omega t + \varphi)$ → Função periódica de ωt de período 2π

Período de uma oscilação → $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ → frequência de oscilação

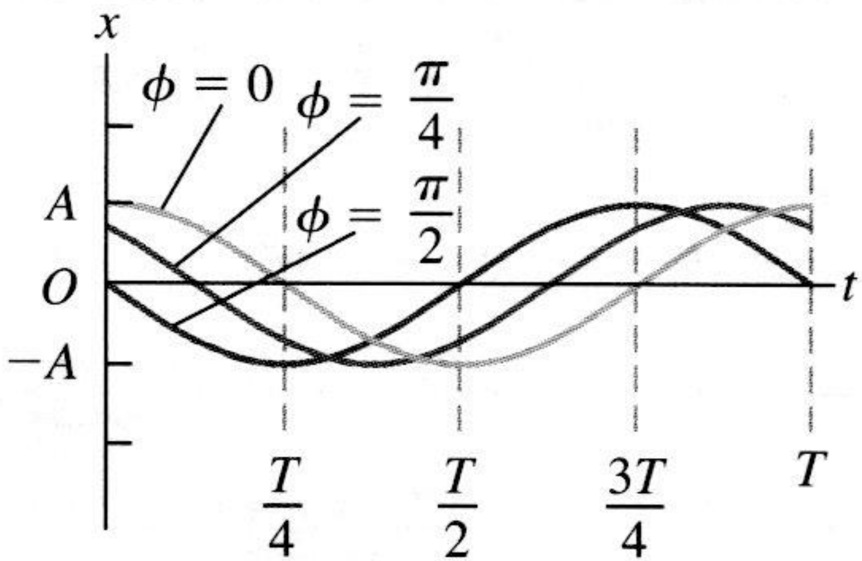
$\nu \rightarrow$ ciclos/s ou hertz (Hz)

$\omega = 2\pi\nu$ → frequência angular rad/s ou s^{-1}

$\theta = (\omega t + \varphi)$ → fase do movimento φ → fase inicial

Oscilador Harmônico

Essas três curvas mostram MHS com o mesmo período T e amplitude A, mas com ângulos ϕ de fase diferentes.



variando $\varphi \rightarrow$ desloca a curva como um todo

Oscilador Harmônico

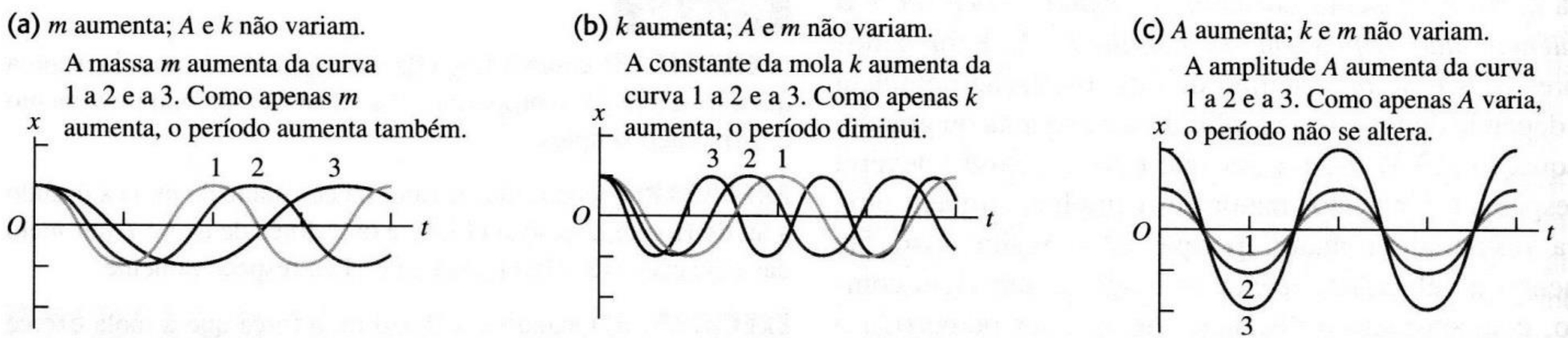


Figura 13.10 Variações em um movimento harmônico simples. Todos os casos indicados são para $\phi = 0$.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad k = \left|\frac{F}{x}\right|$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

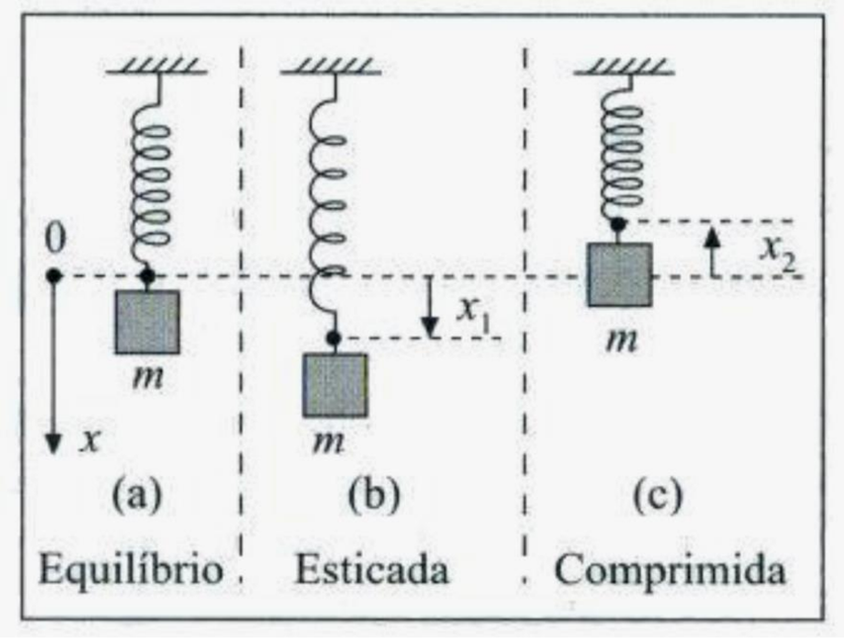
Independe de A

Força restauradora por unidade de deslocamento e por unidade de massa

Oscilador Harmônico

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = -\omega Asen(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi)$$

Condições iniciais $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Acos(\varphi) = x_0 \\ -\omega Asen(\varphi) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{{x_0}^2 + \dfrac{{v_0}^2}{\omega^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x_0}{A} \end{cases}$$

$$x(t) = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$$

$$x(t) = x_0 sen(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} cos(\omega t)$$

Oscilador Harmônico

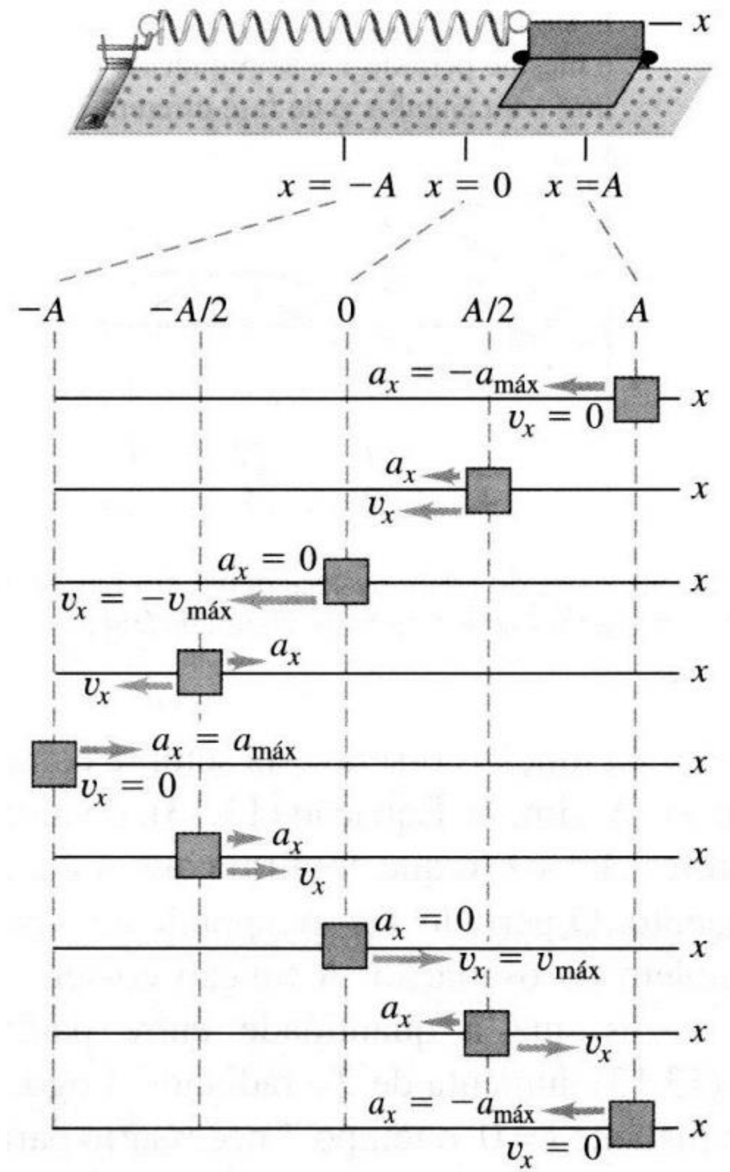
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = -\omega Asen(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi)$$

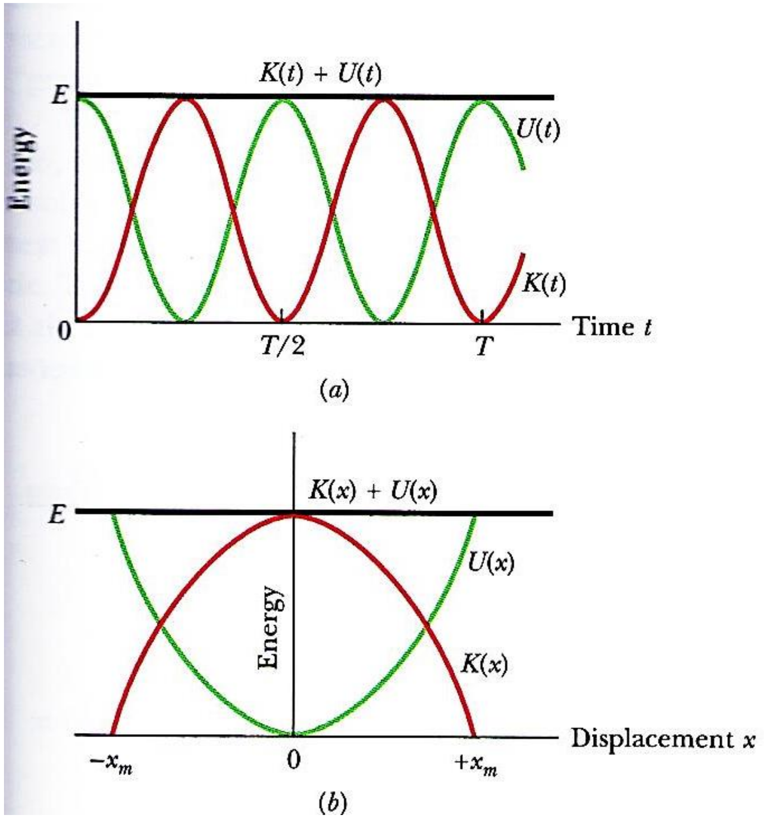


Oscilador Harmônico

Energia do oscilador harmônico

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t + \varphi)$$



A energia total do sistema se conserva

$$E_{total} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{constante}$$

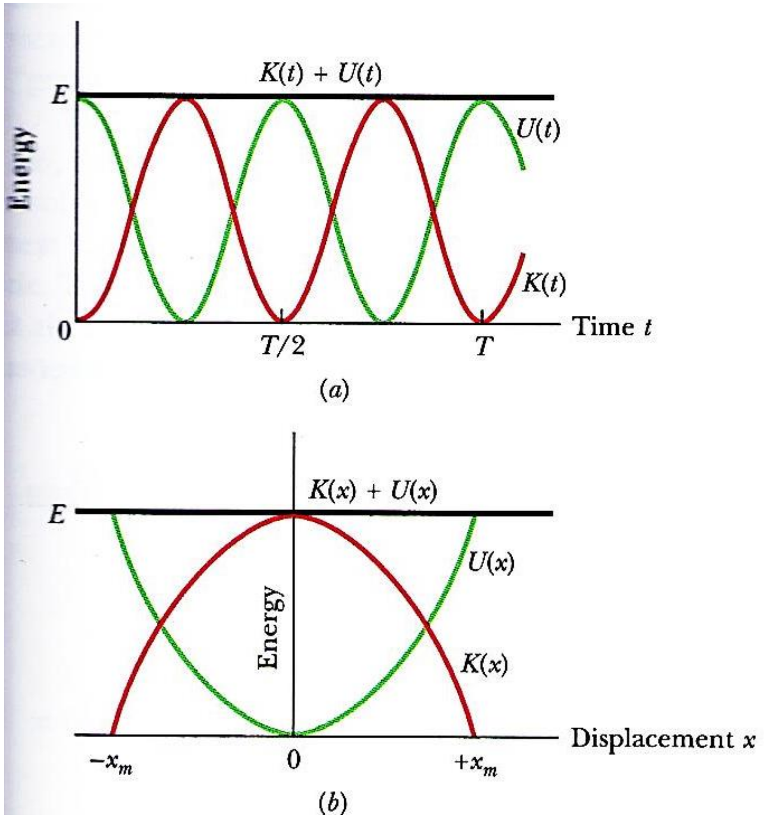
Oscilador Harmônico

Valor médio $f(t) \quad 0 \leq t \geq \tau$

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)dt$$

K e U são simétricos em torno de E/2 (mesma área)

$$\bar{K} = \bar{U} = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$$



Oscilador Harmônico

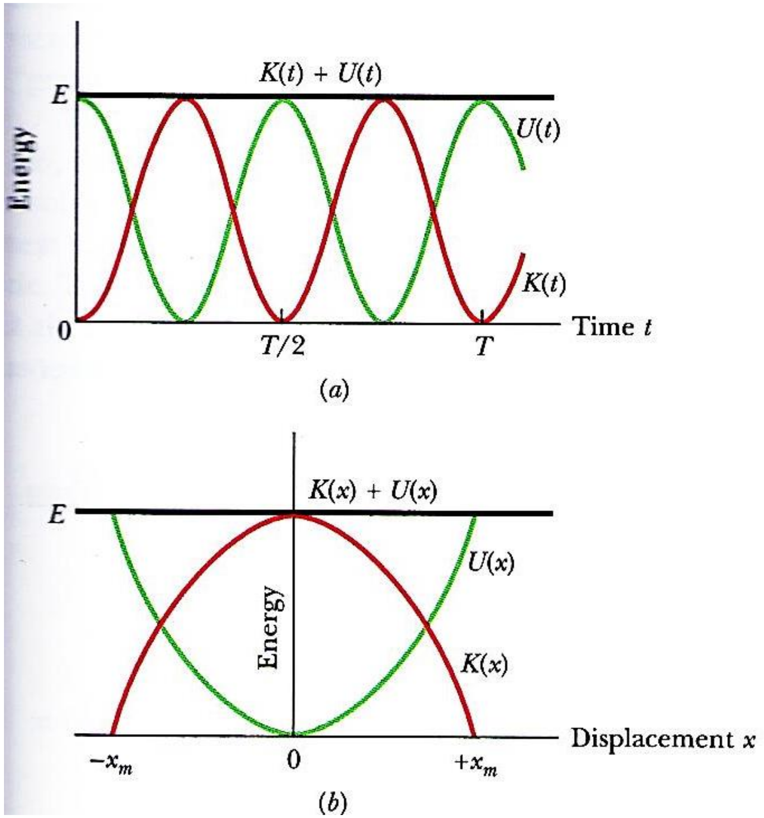
Energia do oscilador harmônico

$$E_{total} = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$K = E - U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



Oscilador Harmônico

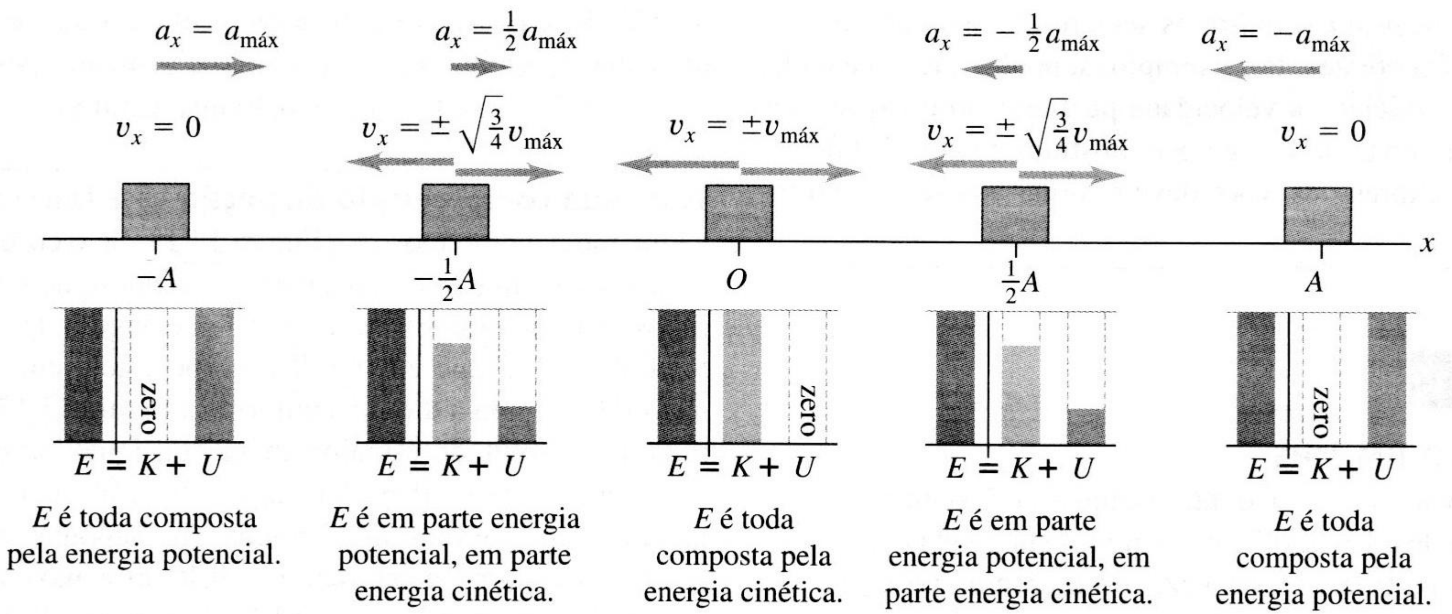
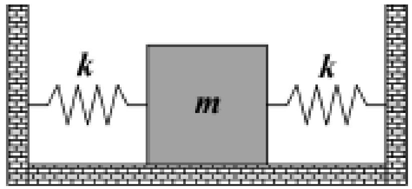


Figura 13.14 Gráficos de E, K e U em função do deslocamento em MHS. A velocidade do corpo *não* é constante, portanto essas imagens do corpo em posições com intervalos espaciais iguais entre si *não* estão colocadas em intervalos iguais no tempo.

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

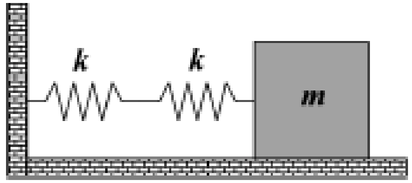
1. Na figura abaixo, mostramos duas molas idênticas (de constante k) ligadas a um mesmo bloco de massa m, sendo que as outras extremidades das molas estão fixas em suportes rígidos. Mostre que a frequência de oscilação do bloco sobre a superfície horizontal sem atrito é dada por:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Suponha agora que as duas molas sejam conectadas ao bloco de massa m, conforme é indicado na figura abaixo. Mostre que a frequência de oscilação é dada por:

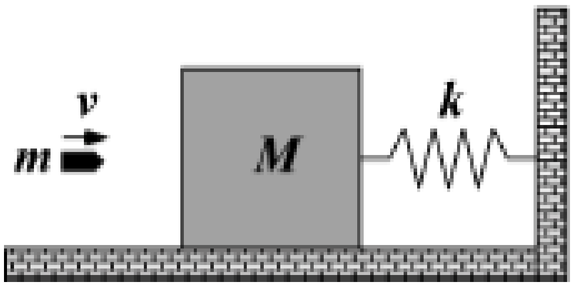
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



2. A figura abaixo mostra um bloco de massa M, em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a uma mola de constante k. Uma bala de massa m e velocidade v atinge o bloco em $t = 0$, conforme é indicado na figura abaixo. A bala permanece dentro do bloco. Determine:

(a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão;

(b) a expressão do deslocamento x do sistema para $t > 0$.



Aplicações do MHS