1. TÓPICO 1

1.1. **AULA 2 - Convergência e continuidade de medidas de probabilidades. Lema de Borel Cantelli.**

Observação 1.1. Uma função $f(x)$ definida no conjunto dos números reai a valores reais, é contínua em um número real a se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \quad | \quad se \quad |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uma condição equivalente em termos de sequência de números reais é:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a), \forall (a_n)_{n\geq 1}, \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

isto é

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.2. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Defina os eventos $A_n = \{X \in [0, \frac{n}{n+1}]\}$. Note que $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente e que $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \{X \in [0, 1)\}$. Portanto

$$P(\lim A_n) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}.$$

Por outro lado,

$$P(A_n) = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}}$$

e

$$\lim P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}} = 1 - e^{-\lambda} = P(\lim A_n).$$

e podemos pensar que a medida de probabilidade é uma função conjuntos, que é contínua. Este fato é verdadeiro.

Teorema 1.3. *Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos em $\Im$, Se o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ existe, então*

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n).$$

Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência crescente de eventos,* $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Definimos* $B_1 = A_1$ *e* $B_n = A_n - A_{n-1}$ *de forma que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) =$$

$$P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] =$$

$$P(A_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

No caso em que a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ *é decrescente,* $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *e* $(A_n^c)_{n\geq 1}$ *é uma sequência crescente de eventos e* $\lim A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$.

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) =$$

$$1 - P(\lim A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

No caso geral temos

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \limsup P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq$$

$$\limsup P(A_n) \geq \liminf P(A_n) \geq \liminf P(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim P(\bigcap_{k\geq n} A_k) =$$

$$P(\lim \bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\liminf A_n).$$

Contudo, como por hipótese $\lim A_n$ *existe,* $P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = P(\liminf A_n)$. *Considerando tais igualdades e as desigualdades acima concluimos*

$$P(\lim A_n) = \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n) = \lim P(A_n).$$

Exemplo 1.4. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. Então $P(X = x) = 0, \forall x$.

Considere a sequência decrescente de intervalos, de

$$A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

de forma que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

e

$$P(X \in \{x\}) = P(X \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} P(X \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}[F(x + \frac{1}{n}) - F(x - \frac{1}{n})] = F(x^+) - F(x^-) = 0.$$

Exemplo 1.5. Seja X uma variável aleatória. Então ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in N \quad | \quad P(|X| > k) < \varepsilon.$$

Prova

Como X assume valores nos reais, $P(|X| = \infty) = 0$. Considere a sequência decrescente $\{|X| > n\}$, de forma que

$$\{|X| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}$$

Portanto

$$0 = P(|X| = \infty) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}) = P(\lim_{n\to\infty}\{|X| > n\}) = \lim_{n\to\infty} P(|X| > n).$$

Então, $\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists k \in N \;\; | \;\; se \;\; n \geq k \to P(|X| > n) < \varepsilon$. Em particular tomamos $n = k$.

Exemplo 1.6. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \Leftrightarrow \forall n, P(A_n) = 1.$$

Prova A condição nescessária é óbvia.

Provemos a condição suficiente por indução em n. Para $n = 2$ a prova é óbvia pois

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \bigcup A_2).$$

Por hipótese de indução, suponha que a prova vale para n, isto

$$\forall m, P(A_m) = 1, 1 \leq m \leq n \Rightarrow P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1.$$

Provemos para $n+1$: $P(\bigcap_{m=1}^{n+1} A_m) = P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m \bigcap A_{n+1}) = 1$, quando $P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1$ e $P(A_{n+1}) = 1$, o que ocorre, por hipótese de indução quando $P(A_m) = 1, \forall m, 1 \leq m \leq n$.

Consequentemente

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Teorema 1.7. Lema de Borel Cantelli *Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$.Então*

I) Se $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 0.$

II) Se $\sum P(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes,$\Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 1.$

Prova Provemos a parte I.

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

pois $\sum P(A_n) < \infty$. A desigualdade é devido a Bonferroni.

Provemos a parte II.

Devemos provar que $P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1$ que, pelo exemplo , é equivalente provar que $P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1, \forall n \geq 1$ ou seja $P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0, \forall n \geq 1$.

$$P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = P(\lim_{m\to\infty}\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \leq$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0.$$

Observação 1.8. Observe que, se os eventos são independentes, $P(A_n i.v.)$ é 0 ou 1.

Exemplo 1.9. Contudo, considere o espaço $((0,1)), \Im, P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,

$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = 1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Contudo as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Exemplo 1.10. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponecial padrão e seja a variável aleatória $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$. Note que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\frac{X_n}{\ln n} > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon \ln n) = e^{-\ln n^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$, que converge se $\varepsilon > 1$ $(P(A_n i.v.) = 0)$ e diverge se $\varepsilon \leq 1$ $(P(A_n i.v.) = 1)$

Exemplo 1.11. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

Sejam $A_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n}]\}$ e $B_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n^2}]\}$. Assim $P(A_n) = \frac{1}{n}$ e $P(B_n) = \frac{1}{n^2}$.

$P(A_n iv.) = 1$ pois os A_n são indenpedentes e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, (série harmônica).

$P(B_n iv.) = 1$ pois os B_n são tais que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, (Série de Dirichlet).

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil