## 1. **Resolução da lista 1.**

Primeiro apresentaremos uma integral importante, obtida a partir da distribuição gama generalizada.

$$J = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma(a/c)}{cb^{a/c}},\ a, b, c > 0. \tag{1}$$

Demonstração: fazendo a substituição $y = bx^c$ em $J$ temos

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{y}{b}\right)^{(a-1)/c} e^{-y} \left(bc\left(\frac{y}{b}\right)^{(c-1)/c}\right)^{-1} dy = (bc)^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{y}{b}\right)^{(a-1)/c} e^{-y} \left(\frac{y}{b}\right)^{1/c-1} dy$$

$$= (bc)^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{y}{b}\right)^{a/c-1} e^{-y} dy = \left(cb^{a/c}\right)^{-1} \int_0^\infty y^{a/c-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(a/c)}{cb^{a/c}},\ a, b, c > 0.$$

1) Seja $f(x) = e^{-(x-\theta)},\ x \geq \theta$. Definindo $Y = X - \theta$, temos

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X - \theta \leq y) = P(X \leq y + \theta) = F(y + \theta),$$

logo $g(y) = [F(y+\theta)]' = f(y+\theta) = e^{-(y+\theta-\theta)} = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$
e portanto $Y \sim Exp(1)$ e $X = Y + \theta,\ \theta > 0$.

Considerando $Y_1, \ldots, Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(1)$ vemos que a distrisbuição do mínimo, $Y_{(1)}$, é dada por

$$g_{Y_{(1)}}(y) = \frac{n!}{(n-1)!} \left[1 - \left(e^{-y}\right)\right]^{n-1} e^{y} = ne^{-ny} I_{(0,\infty)}(y),$$

isto é, $Y_{(1)} \sim Exp(n)$.

Calcularemos a esperança e a variância de $Y_{(1)}$ utilizando o resultado (1).

$$\mathbb{E}\left[Y_{(1)}^r\right] = n \int_0^\infty y^r e^{-ny} dy = n \int_0^\infty y^{(r+1)-1} e^{-ny} dy = n\frac{\Gamma(r+1)}{n^{r+1}} = \frac{\Gamma(r+1)}{n^r}$$

então

$$\mathbb{E}\left[Y_{(1)}\right] = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}\left(Y_{(1)}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Então $Y_{(1)}$ converge para uma variável degenerada no ponto zero, pois

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_{(1)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(Y_{(1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Devido ao fato supracitado, temos, $Y_{(1)} \overset{P}{\Rightarrow} 0$.

Agora provaremos que $Y_{(1)}$ converge quase certamente para zero. Basta mostrar que $P(Y_{(1)} > \epsilon \text{ infinitas vezes}) = 0$, para $\epsilon > 0$ fixado e usar o lema de Borel-Cantelli.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{(1)} > \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\epsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\epsilon}\right)^n = \frac{e^{-\epsilon}}{1-e^{-\epsilon}} < +\infty,$$

note que $e^{-\epsilon} < 1 \; \forall \; \epsilon > 0$, portanto $P(Y_{(1)} > \epsilon \text{ infinitas vezes}) = 0$ por Borel-Cantelli.

Como o resultado vale para qualquer $\epsilon$ então o evento $[Y_{(1)} > 0]$ ocorre um número finito de vezes acarretando que ocorre $Y_{(1)} = 0$ um número infinito de vezes e portanto $Y_{(1)} \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0$.

Então, respondendo a questão:

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta = \min\{Y_1 + \theta, \ldots, Y_n + \theta\} - \theta$$
$$= \min\{Y_1, \ldots, Y_n\} + \theta - \theta = Y_{(1)} + \theta - \theta = Y_{(1)}$$

que converge em probabilidade para zero.

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} = \min\{Y_1 + \theta, \ldots, Y_n + \theta\}$$
$$= \min\{Y_1, \ldots, Y_n\} + \theta = Y_{(1)} + \theta$$

que converge para $0+\theta = \theta$ (pois uma função contínua de uma V.A. que converge quase certamente também converge quase certamente, neste caso a função é $Y_{(1)} + \theta$).

2) $X$ é uma V.A. absolutamente contínua e $Y_n = [1 - F(M_n)]$.

$$G_n(y) = P(Y \le y) = P\left(n\left[1 - F(M_n)\right] \le y\right) = P\left(1 - F(M_n) \le \frac{y}{n}\right) = P\left(F(M_n) \ge 1 - \frac{y}{n}\right)$$

$$= P\left(M_n \ge F^{-1}\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right) = 1 - P\left(M_n \le F^{-1}\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right) \overset{iid}{=} 1 - \left(F\left(F^{-1}\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right)\right)^n$$

o último passo se deve ao fato de que os $X_i$ são independentes e identicamente distribuídos. Também supomos que a inversa da função de distribuição, $F^{-1}(\cdot)$, existe, obtendo:

$$G_n(y) = 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n I_{(0,n)} + 0I_{(-\infty,0]} + 1I_{[n,\infty)}.$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = 1 - e^{-y} I_{(0,\infty)} + 0I_{(-\infty,0]},$$

caracterizando a função de distribuição de uma exponencial com parâmetro 1.

3) Queremos provar que $\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) = 0,\ \forall\, \epsilon > 0$ e temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(X_n\right) = 0.$$

Pelos axiomas de Kolmogorov,

$$0 \leq P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) \leq 1,$$

para qualquer $n$ e usando a desigualdade de Tchebychev e fixando um $\epsilon > 0$, temos

$$0 \leq P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(X_n\right)}{\epsilon^2}$$

Aplicando o limite nas inequações, obtemos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\left(X_n\right)}{\epsilon^2}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) \leq \frac{0}{\epsilon^2} = 0$$

e pelo teorema do “sanduiche” para limites de funções reais vemos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - c| > \epsilon\right) = 0$$

e assim provamos que a sequência $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para $c$.

4) $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$ e $X_i = \theta Y_i$, em que $Y_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$. Estamos interessados na distribuição do máximo dos $Y_i$, $Y_{(n)}$, que é dada por

$$g_{Y_{(n)}}(y) = \frac{n!}{(n-1)!} y^{n-1} I_{(0,1)}(y) = n y^{n-1} I_{(0,1)}(y),$$

logo $Y_{(n)} \sim Beta(n,1)$.

$$\mathbb{E}\left[Y_{(n)}^r\right] = \frac{1}{Beta(n,1)} \int_0^1 y^r y^{n-1} dy = \frac{1}{Beta(n,1)} \int_0^1 y^{r+n-1} dy$$

$$= \frac{Beta(r+n,1)}{Beta(n,1)} = \frac{n}{r+n}$$

então

$$\mathbb{E}\left[Y_{(n)}\right] = \frac{n}{n+1} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}\left[Y_{(n)}^2\right] = \frac{n}{n+2}$$

$$\text{Var}\left(Y_{(n)}\right) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 = \frac{n(1+2n+n^2) - n^2(2+n)}{(1+n^2)(2+n)} = \frac{n}{(1+n^2)(2+n)}.$$

Então $Y_{(n)}$ converge para uma variável degenerada no ponto um pois

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_{(n)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \text{Var}\left(Y_{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+n^2)(2+n)} = 0.$$

Devido ao fato supracitado, $Y_{(n)} \overset{P}{\Rightarrow} 1$. Agora note que

$$\theta X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = \max\{\theta Y_1, \ldots, \theta Y_n\} = \theta \max\{Y_1, \ldots, Y_n\} = \theta Y_{(n)},$$

assim obtemos que $X_{(n)} \overset{P}{\Rightarrow} \theta$(pois uma função contínua de uma V.A. que converge em probabilidade também converge em probabilidade, neste caso a função é $\theta Y_{(n)}$ e $Y_{(n)} \overset{P}{\Rightarrow} 1$). Logo $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \overset{P}{\Rightarrow} \theta$.

5) $P(X_n = 1) = 1/n$ e $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$, logo, $\mathbb{E}[X_n] = 1/n$ e $\mathbb{E}[X_n^2] = 1/n$, consequentemente, $\text{Var}(X_n) = 1/n - (1/n)^2 = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}$.

Então $X_n$ converge em probabilidade para zero, pois

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \text{Var}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n-1}{n} = 0.$$

Agora mostraremos que $X_n \overset{q.c.}{\not\Rightarrow} 0$. Note que

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

pois trata-se de uma série harmônica de grau 1. Como os $X_n$ são independentes, pelo lema de Borel-Cantelli o evento $[X_n = 1]$ ocorre infinitas vezes com probabilidade um. Formalmente, seja $A_n = [X_n = 1]$. Se $\omega \in [A_n$ infinitas vezes $]$, então $X_n = 1$ para um número infinito de $n's$, logo $X_n$ não converge para zero. Como provamos $P(X_n = 1$ infinitas vezes $) = 1$, temos $P(Y_n \not\Rightarrow 0) = 1$.

6) $P(X_n = n^2) = 1/n^2$ e $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$.

Agora mostraremos que $X_n \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0$. Fixando $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X_n > \epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_n = n^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty,$$

pois trata-se de uma série harmônica de grau 2. Pelo lema de Borel-Cantelli o evento $[X_n > \epsilon]$ ocorre infinitas vezes com probabilidade zero. Formalmente, seja $A_n = [X_n > \epsilon]$. Se $\omega \notin [A_n$ infinitas vezes $]$, então $X_n > \epsilon$ para um número finito de $n's$, logo $X_n$ converge para zero.

Como provamos $P(X_n > \epsilon \text{ infinitas vezes }) = 0$, temos $P(X_n \Rightarrow 0) = 1$.

A segunda parte do problema é demonstrar que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n^k\right] \neq \mathbb{E}\left[X^k\right] = \mathbb{E}\left[0^k\right] = 0$.

$$\mathbb{E}\left[X_n^k\right] = \frac{n^{2k}}{n^2} = n^{2(k-1)},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = 1 \neq 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n^k\right] = \lim_{n\to\infty} n^{2(k-1)} = +\infty \ \neq 0,\ k = 2, 3, \ldots$$

*E-mail address*: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil