MAE 224 - PROBABILIDADE II
Primeira Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \exp[-(x-\theta)], \quad se \quad x \geq \theta \quad 0 \quad se \quad x < \theta$$

e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X, qual o limite em probabilidade de

$$\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta?$$

Qual o limite quase certo de $\min\{X_1, ..., X_n\}$?

2) Seja X uma variável aleatória com função de distribuição absolutamente contínua F e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X. Defina $Y_n = n[1 - F(M_n)]$, onde $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

a) Qual a função de distribuição $G_n(y)$ de Y_n?

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} G_n(y)$.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $E[X_n]$ converge para a constante c e $Var(X_n)$ converge para 0 quando n converge para ∞. Prove que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para c.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Prove que $\max\{X_1, ..., X_n\}$ converge em probabilidade para θ.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Mostre que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para 0 mas não converge quase certamente.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Prove que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente e ache o limite X. Mostre que $E[X_n^k]$ no converge para $E[X^k]$ para $k = 1, 2, 3, ...$