

Universidade de São Paulo Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 08

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2015

Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

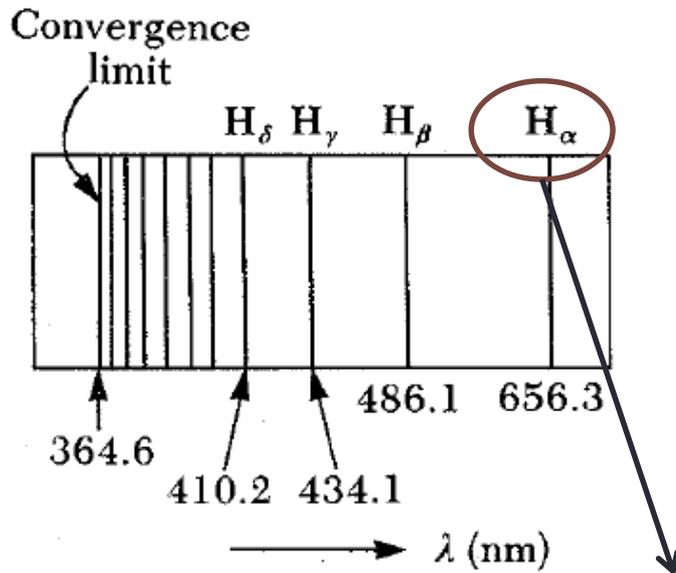
Página do curso:

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=5215>

20/03/2015

Espectro Hidrogênio

- ❑ Espectro de emissão do átomo de Hidrogênio (átomo + simples) possui linhas discretas na **região visível e ultravioleta**:



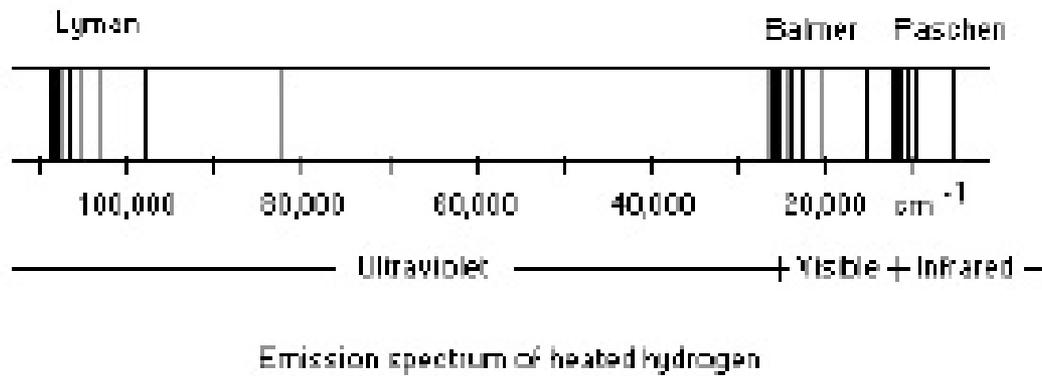
1885: J. Balmer descobriu que as linhas do espectro de hidrogênio podiam ser calculadas através de fórmula empírica:

$$\lambda_m = 3646 \frac{m^2}{m^2 - 4}, m = 3, 4, 5$$

Corresponde a $m=3$

Espectro Hidrogênio

- Balmer previu que uma expressão mais geral que pudesse explicar as outras séries:



- 1890 Rydberg finalmente encontra uma formulação mais geral para as séries observadas:

$$K = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m = 1, 2, 3, \dots, n > m$$

$$R_H = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Espectro Hidrogênio

$$R_H = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

→ Constante de Rydberg para o H

$$K = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m = 1, 2, 3, \dots, n > m$$

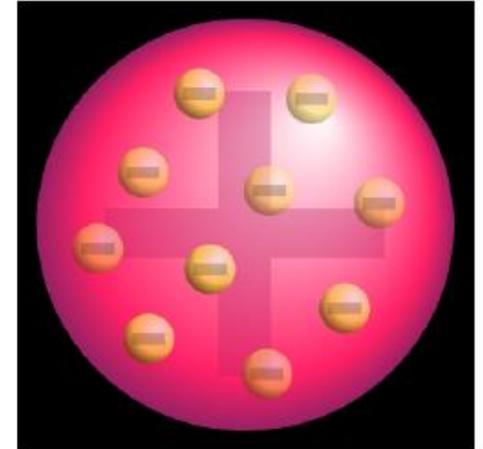
Nomes	Faixa de comprimentos de onda	Fórmulas	
Lyman	Ultravioleta	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$
Balmer	Ultravioleta próximo e visível	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$
Paschen	Infravermelho	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$
Brackett	Infravermelho	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$
Pfund	Infravermelho	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$

Modelo atômico

1º Proposta:

Thomson em 1904: esfera de carga positiva embebida por elétrons – carga total nula

MODELO CHAMADO DE “PUDIM DE PASSAS”



Problema:

- Forças eletrostáticas não são suficientes para manter o sistema em equilíbrio
 - Cargas deveria, ter movimento (acelerado) já que se mantinham dentro do átomo
 - Cargas (aceleradas) em movimento – irradiar energia continuamente
- ↓ Não observado
- Neste modelo, quando o átomo era aquecido, os elétrons poderiam vibrar em torno de sua posição de equilíbrio produzindo radiação eletromagnética - no entanto, não se conseguiu calcular o espectro de luz observado

Estrutura do átomo



- Rutherford começou a realizar experimentos com radioatividade natural
- Descobriu que o Urânio emitia pelo menos dois tipos de partículas que ele chamou de α e β
- Observou que a razão q/m das partículas α era duas vezes menor que para o próton
- Suspeitava que as partículas α eram átomos de Hélio duplamente ionizada
- Deixou uma amostra de substância radioativa se desintegrar emitindo partículas α e submeteu este conteúdo a uma descarga elétrica e observou as linhas do espectro de Hélio
- Percebeu que as partículas α possuíam alta energia e massa relativamente elevada

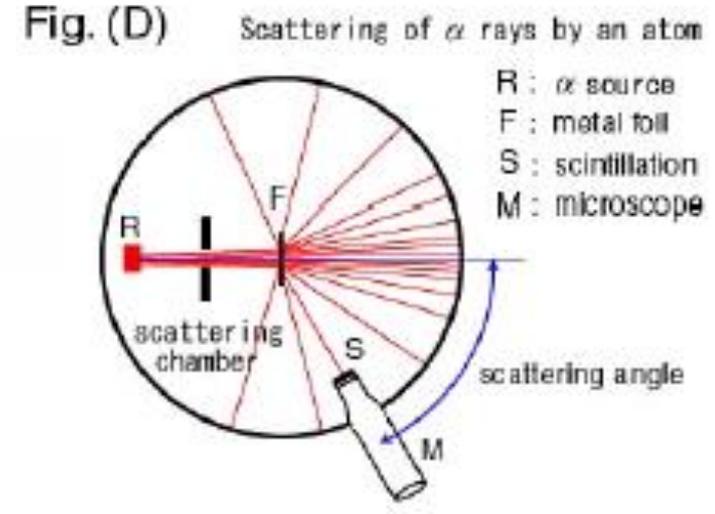
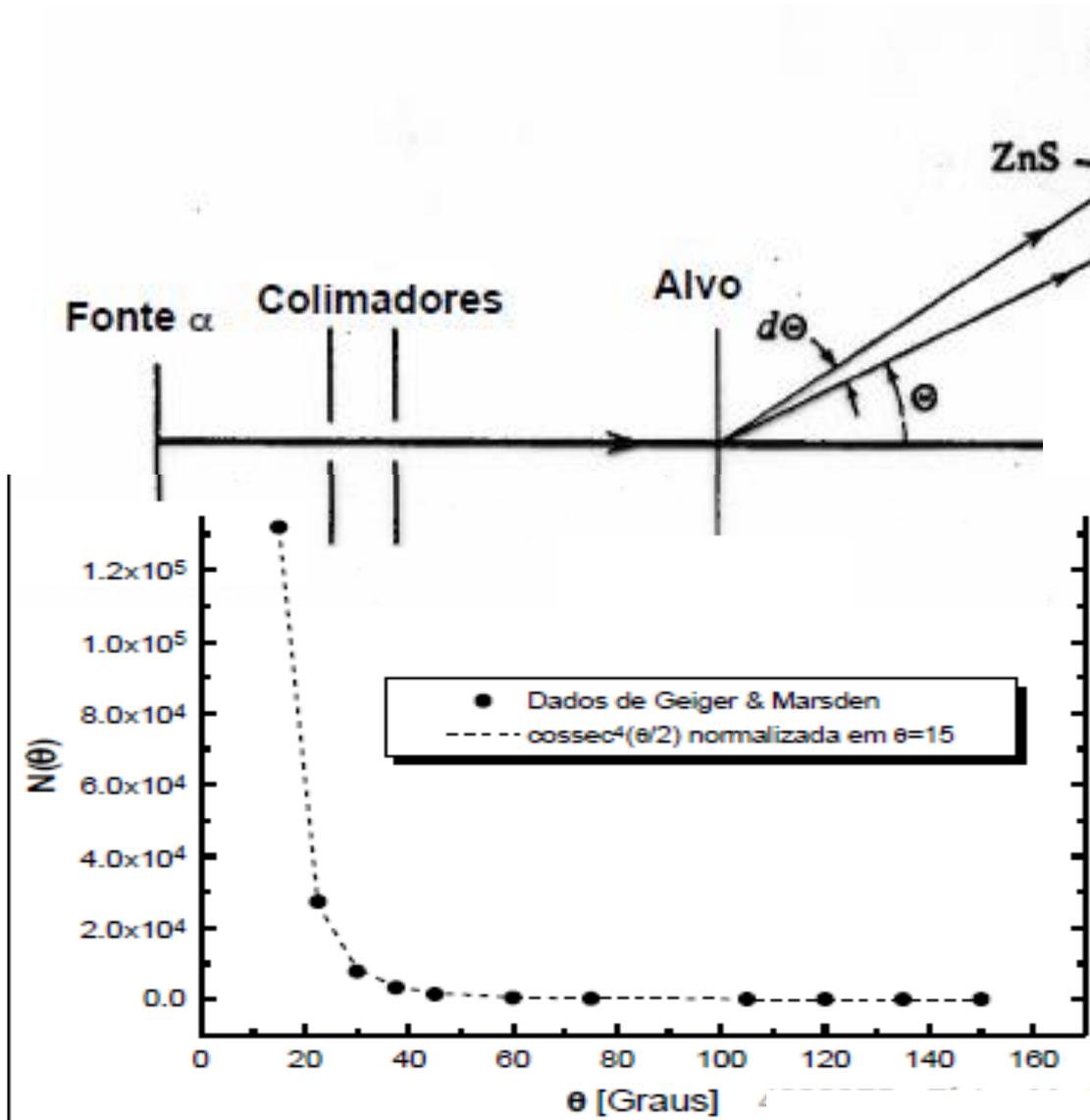


Ótimo instrumento para sondar os átomos

Estrutura do átomo



Experimento de Rutherford, Geiger e Marsden (1909)

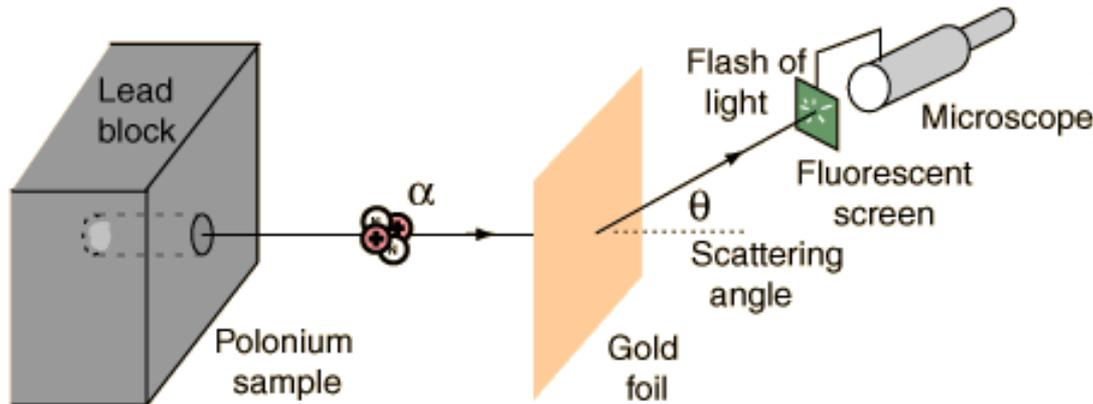
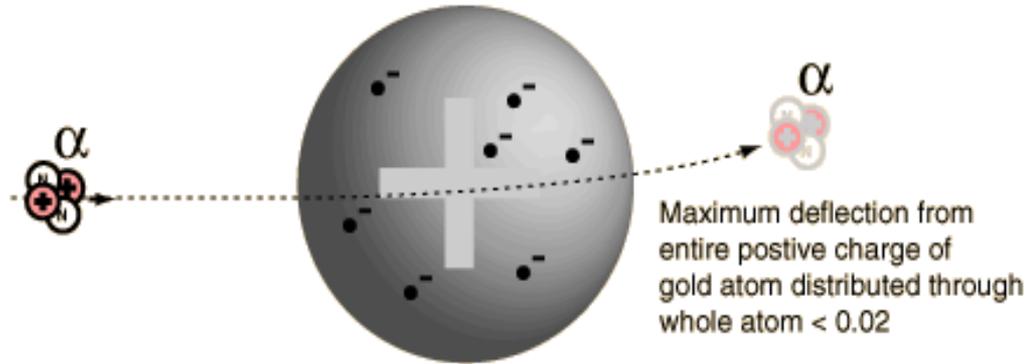
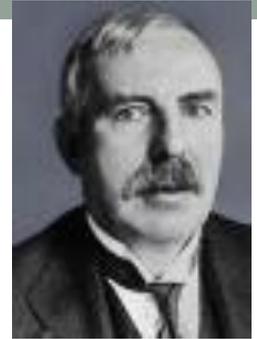


1 a cada 8000 α s são espalhadas $> 90^\circ$

Estrutura do átomo

- As primeiras experiências de espalhamento usou partículas α (possuíam alta energia e massa relativamente elevada)
- Ótimo instrumento para sondar os átomos

Modelo de Thomson: previa deflexão pequena das partículas α



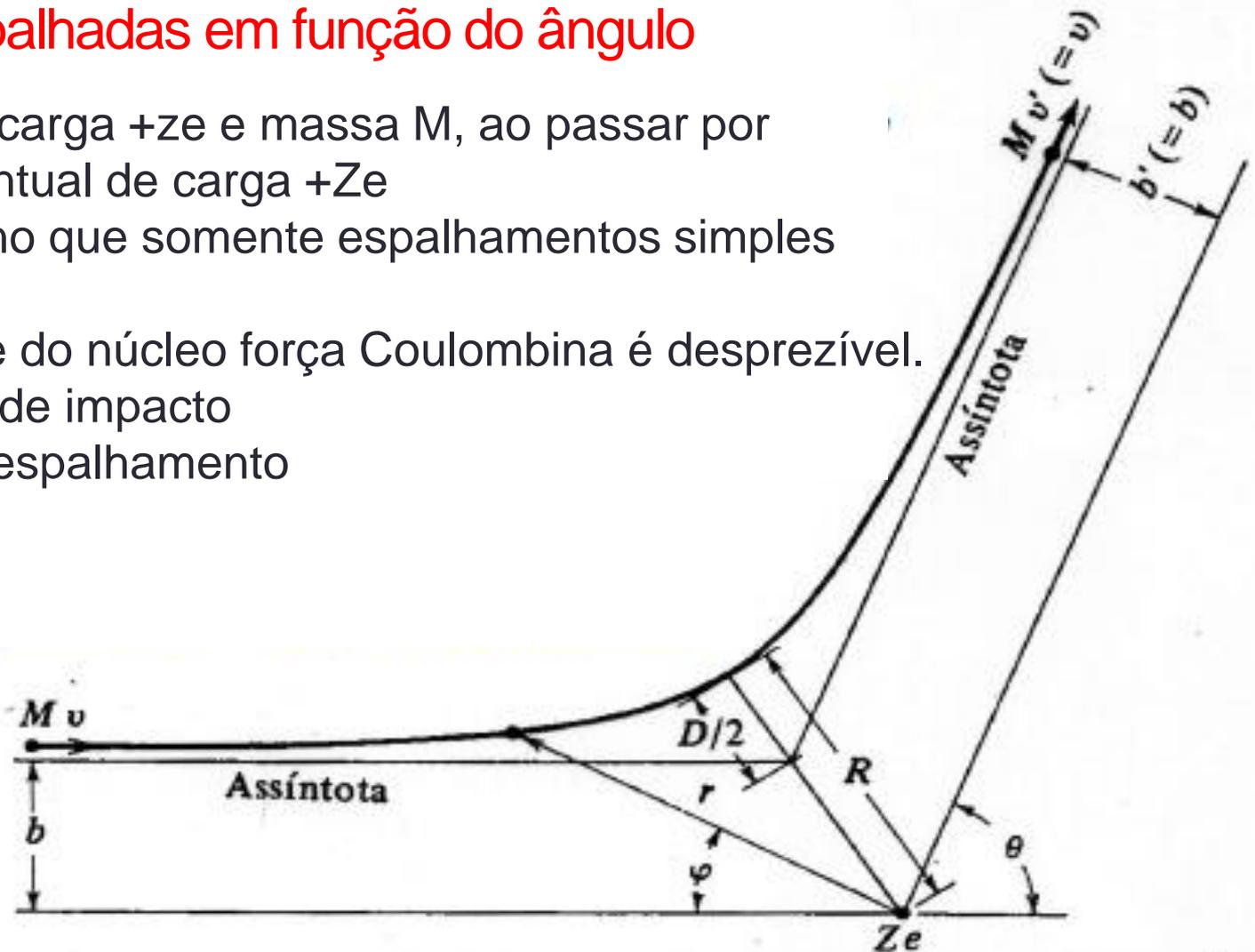
Rutherford observou grandes deflexões, sugerindo um núcleo duro e pequeno



ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

Melhor caracterização é preciso calcular o número de partículas espalhadas em função do ângulo

- Partícula α de carga $+ze$ e massa M , ao passar por um núcleo pontual de carga $+Ze$
- O alvo é tão fino que somente espalhamentos simples ocorrem
- Partícula longe do núcleo força Coulombiana é desprezível.
- b – parâmetro de impacto
- θ – ângulo de espalhamento



ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

- b e v parâmetro de impacto e velocidade antes da colisão
- b' e v' depois da colisão

Uma vez que a força agindo sobre as partículas é central, temos que o momento angular do sistema se conserva na colisão

$$L = Mvb = Mv'b'$$

- Supondo colisão elástica e desprezando a E_{cin} adquirida pelo núcleo

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2$$

- $v=v'$ me diz que a trajetória da partícula espalhada esta no mesmo plano
- $b=b'$ o parâmetro de impacto não é alterado após a colisão

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO



Estimativa do raio do núcleo

- A trajetória da partícula α neste espalhamento é descrito por uma hipérbole

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

- D é a distância de máxima aproximação numa colisão frontal

$E_{\text{pot}} = E_{\text{cin}}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{D} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

- Rutherford foi capaz de estimar o raio do núcleo, a partir da distância de maior aproximação:

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

- Ele obteve valores da ordem de 10^{-15}m (1fm) para partículas α com E de $\sim 5\text{MeV}$

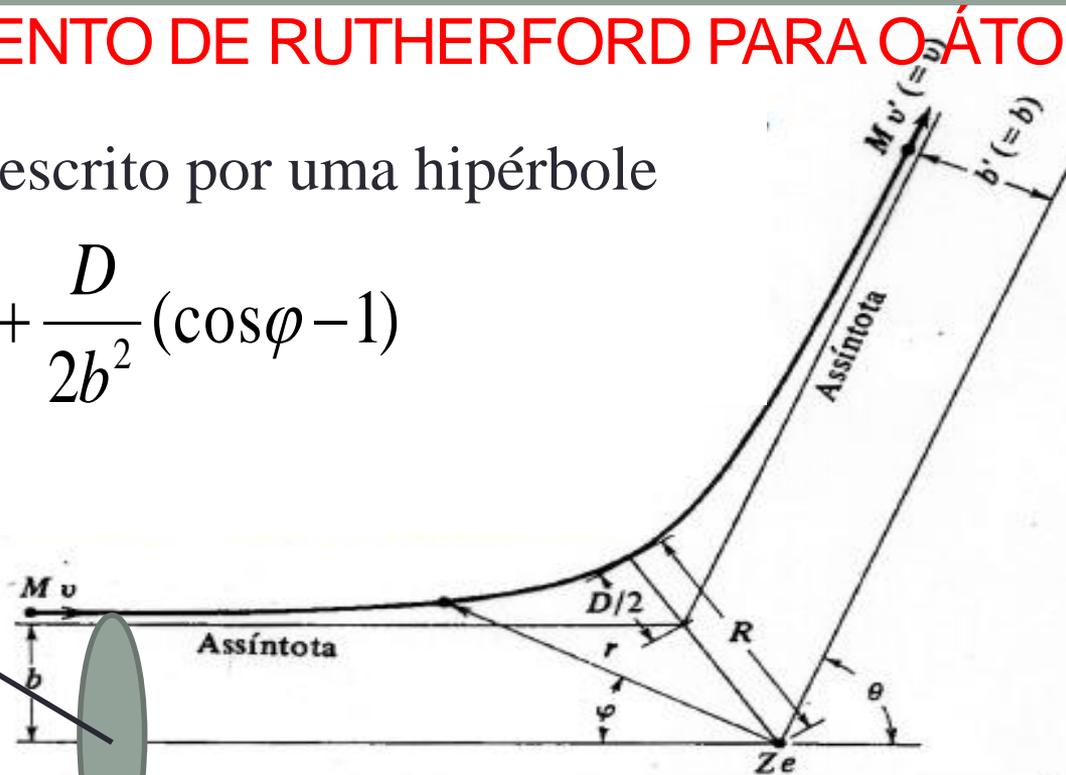
ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD PARA O ÁTOMO

espalhamento é descrito por uma hipérbole

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

$$\text{area} = \pi b^2$$

Seção de choque de espalhamento



- Fazendo $r \rightarrow \infty$ e usando a relação assintótica $\varphi = \pi - \theta$

$$\frac{1}{b} \operatorname{sen} \varphi = -\frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

$$b = \frac{D}{2} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$b = \frac{D}{2} \cot g \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 0, b = \infty$$

$$\theta = 180^\circ, b = 0$$

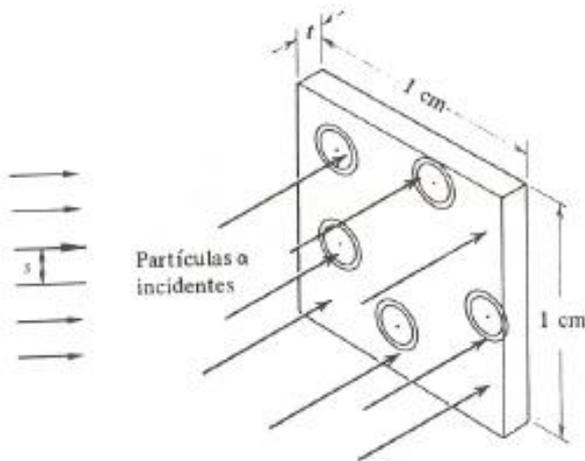
Espalhamento α

□ No espalhamento de uma partícula por um núcleo deve-se considerar:

□ Folha de espessura t com densidade ρ

□ Estamos supondo que a folha é tão fina que a probabilidade de que um núcleo esteja na “sombra” de outro é insignificante.

Chamaremos de n o número de núcleos (átomos) por unidade de volume



$$n = \frac{\rho(\text{g} / \text{cm}^3) \cdot N_A (\text{átomos} / \text{mol})}{M (\text{g} / \text{mol})}$$

$$n = \frac{\rho N_A}{M} \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3}$$

Se a folha tem uma espessura t (cm) temos que nt é o número de átomos por unidade de área (átomos/cm²)

Seção de choque σ

□ Esta relacionada a probabilidade de uma partícula ser espalhada por um núcleo

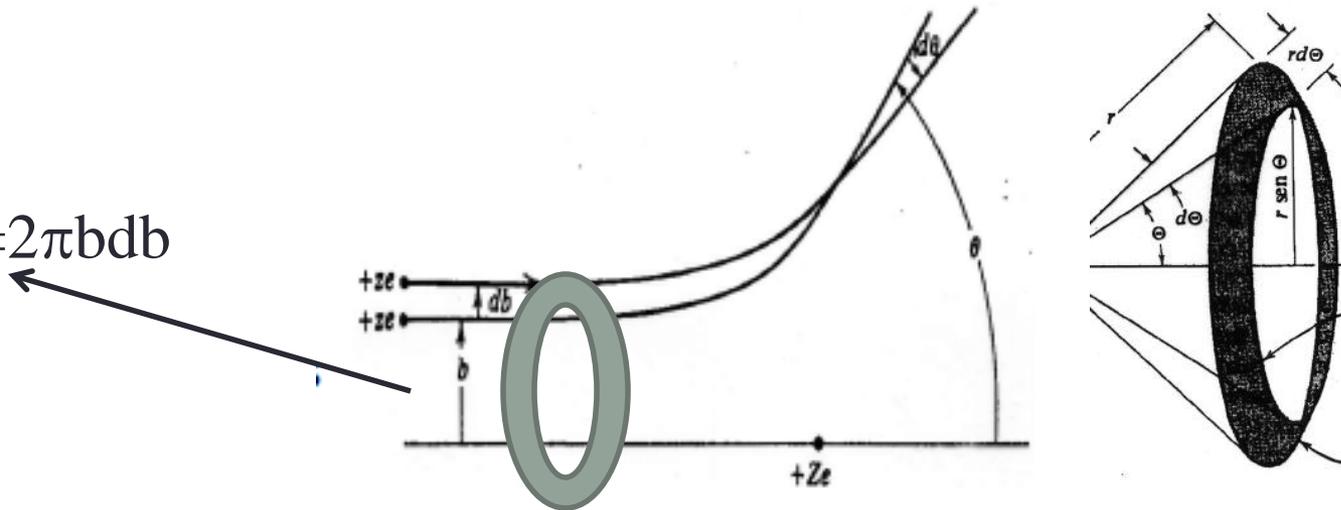
Vemos que na vida real o detector esta

Posicionado sobre um intervalo de ângulo

θ e $\theta+d\theta$ que corresponde a um parâmetro de impacto

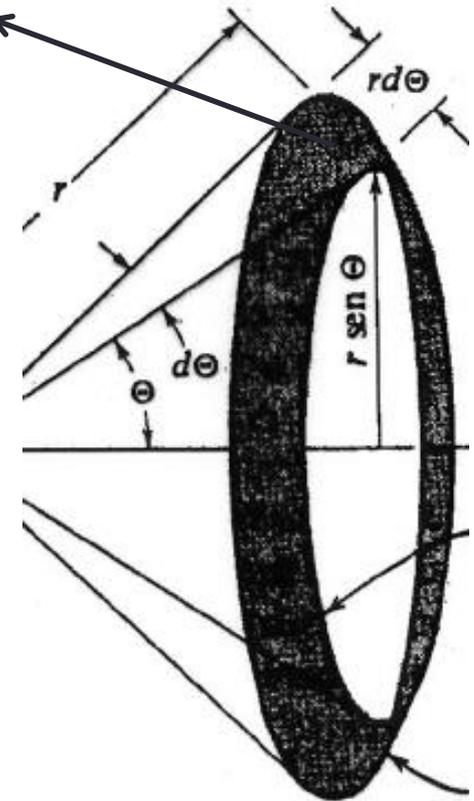
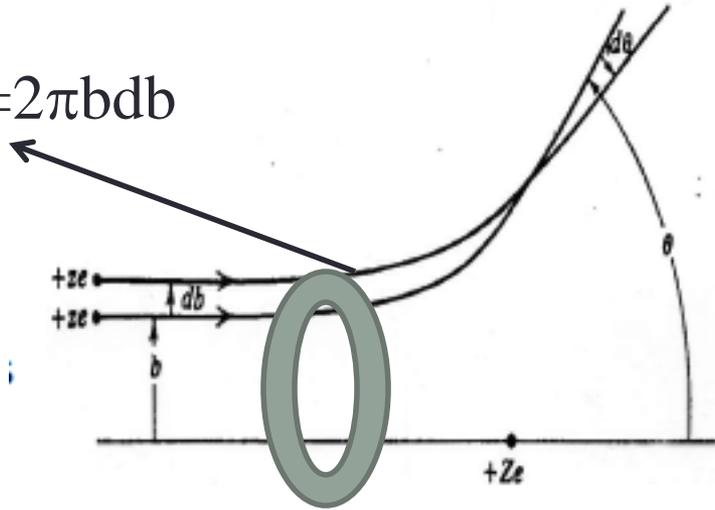
b e $b+db$

$$\text{Área} = 2\pi b db$$



$$dA = (2\pi r \sin\theta)(r d\theta)$$

$$\text{Área} = 2\pi b db$$



- A probabilidade de α passar por um desse anéis $P(b)db$, é igual :

$$b = \frac{D}{2} \cot g \frac{\theta}{2} \quad P(b)db = nt 2\pi b db$$

$$P(b)db = 2\pi nt \frac{D}{2} \cot g \frac{\theta}{2} \left(-\frac{D}{2} \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \right)$$

$$db = -\frac{D}{2} \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$P(b)db = -\pi nt \frac{D^2}{4} \cot g \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta/2} \right) d\theta$$

- A probabilidade de α passar por um desses anéis $P(b)db$, é igual a:

$$P(b)db = 2\pi nt \frac{D}{2} \cot g \frac{\theta}{2} \left(-\frac{D}{2} \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \right)$$

$$P(b)db = -\pi nt \frac{D^2}{4} \cot g \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \right) d\theta$$

$$\cot g \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\text{sen} \frac{\theta}{2}}$$

$$2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \text{sen} \theta$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen} \theta}{2 \text{sen} \frac{\theta}{2}}$$

$$P(b)db = -\frac{\pi nt D^2}{8} \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

- $P(b)db$ é igual a probabilidade de que as partículas sejam espalhadas entre $\theta+d\theta$
- O sinal negativo aparece pois uma redução de b provoca um aumento em θ .

- Assim o número de partículas α de um feixe de intensidade I espalhada entre $\theta+d\theta$ será :

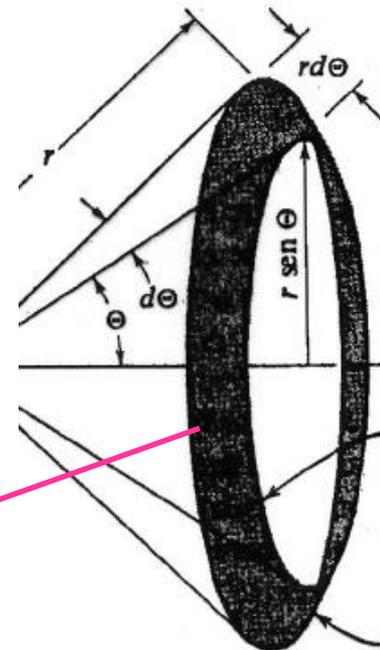
$$N(\theta)d\theta = -P(b)dbI$$

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2}mv^2} \quad N(\theta)d\theta = \frac{I\pi n t D^2}{8} \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

Equação de espalhamento de Rutherford

- As N partículas α cujo ângulo de espalhamento esta entre $\theta+d\theta$ passam por uma zona esférica de raios r com centro no átomo responsável pelo espalhamento:

$$dA = (rd\theta).(2\pi r \text{sen } \theta)$$



$$N(\theta)d\theta = -P(b)dbI$$

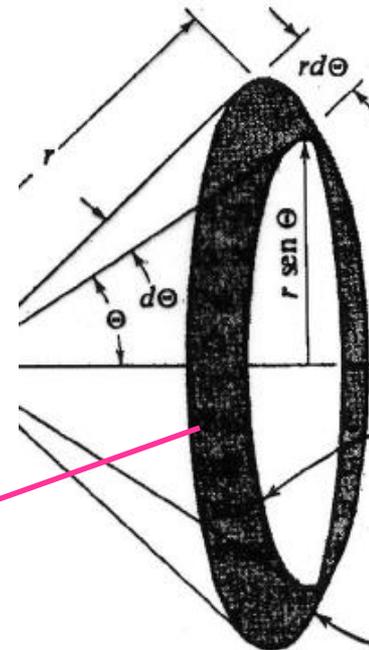
$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$N(\theta)d\theta = \frac{I\pi n t D^2}{8} \frac{\sin\theta}{\sin^4\theta/2} d\theta$$

Equação de espalhamento de Rutherford

- As N partículas α cujo ângulo de espalhamento esta entre $\theta+d\theta$ passam por uma zona esférica de raios r com centro no átomo responsável pelo espalhamento:

$$dA = (rd\theta).(2\pi r \sin\theta)$$

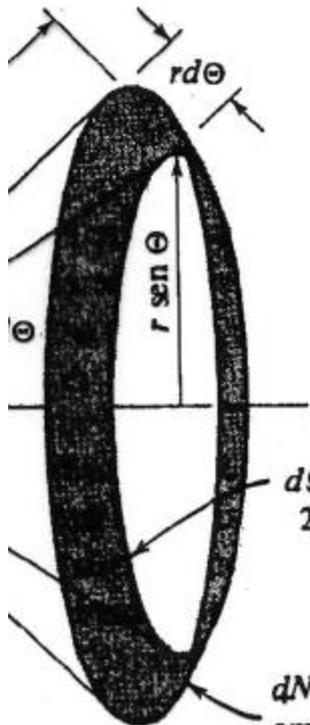


$$dN \leftarrow N(\theta)d\theta = \frac{I\pi n t D^2}{8} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4 \theta / 2} \quad D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2} m_\alpha v^2} E_\alpha$$

- O número de partículas α espalhadas em um ângulo sólido $d\Omega$ em torno de um ângulo de espalhamento θ

$$dA = (rd\theta).(2\pi r \sin\theta)$$

$$d\Omega = \text{área} / r^2$$



$$d\Omega = \text{área} / r^2 = \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{r^2}$$

dN partículas emitidas em um ângulo sólido $d\Omega$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{I n t \cancel{2} \pi D^2}{16} \frac{\cancel{\sin\theta} d\theta}{\cancel{\sin^4 \theta} / 2} \frac{1}{\cancel{2} \pi \cancel{\sin\theta} d\theta}$$

$$dN = \frac{I n t D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \theta / 2} d\Omega$$

$$dN = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{I n t}{\sin^4 \theta / 2} d\Omega$$

$$dN = \frac{Int D^2}{16} \frac{1}{\text{sen}^4 \theta / 2} d\Omega$$

$$dN = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} d\Omega$$

Pontos importantes:

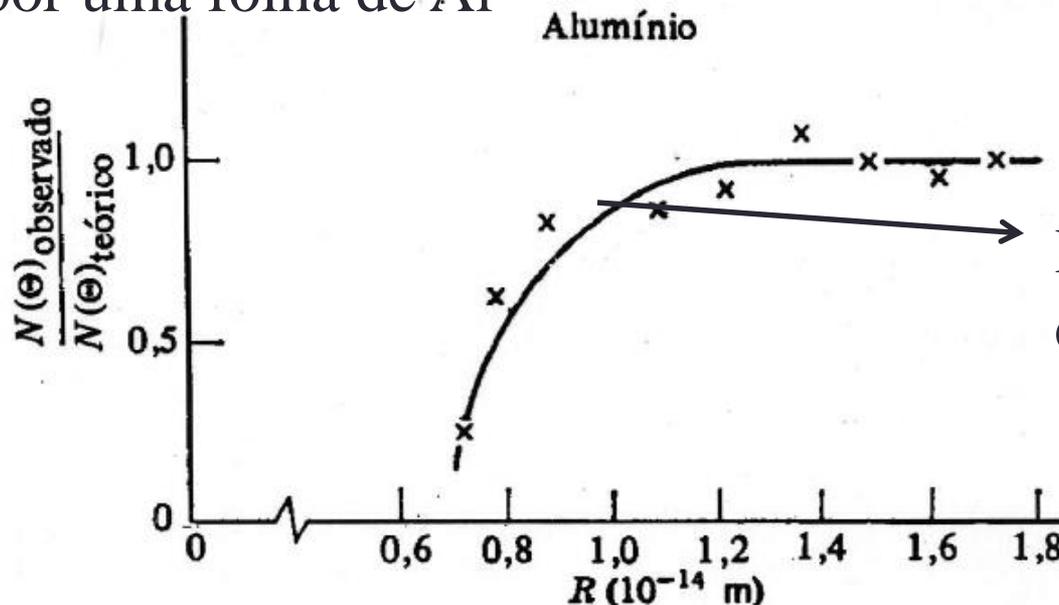
- O espalhamento é proporcional a Z_1^2 e Z_2^2
- O termo Mv^2 é a energia cinética da partícula a incidente, e o espalhamento é inversamente proporcional a energia cinética desta partícula
- O espalhamento é inversamente proporcional a 4 potencia de $\text{sen}(\theta/2)$
- O espalhamento é proporcional a espessura da folha de metal n

$$dN \sim \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot I \cdot n \cdot t \cdot d\Omega \quad \begin{array}{l} \text{Secção de choque de} \\ \text{Rutherford} \end{array}$$

Secção de choque diferencial de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \theta/2}$$

Fornece o número de partículas espalhadas em um dado elemento de ângulo sólido $d\Omega$. Dados obtidos pelo grupo de Rutherford para o espalhamento de partículas α de várias energias a um ângulo fixo grande por uma folha de Al



Raio do núcleo de Al
é aproximadamente
 $10^{-14}\text{m} = 10\text{F}$

Modelo de Rutherford

De acordo com o modelo de Rutherford o número de partículas espalhadas α por núcleo, observadas na tela de um cintilômetro de área A será a uma distância r da folha espalhadora:

$$\Delta N = \text{Int} \left(\frac{A}{r^2} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{\text{sen}^4 \theta/2} d\Omega$$

Fator devido a área do cintilômetro e a distância deste da folha espalhadora

Energia cinética das partículas α antes do espalhamento

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Partículas α são produzidas pela desintegração do ^{226}Ra e 450 partículas por minuto são produzidas em um cintilômetro para um ângulo $\theta = 45^\circ$. Se as condições experimentais forem mantidas e o detector for deslocado de modo a observar as partículas no ângulo de 90° , qual será o número de partículas observadas por minuto?

$$\Delta N = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{Int}{\text{sen}^4 \theta / 2} \left(\frac{A}{r^2} \right)$$

Exercício: Espalhamento de partículas α

- Um feixe de partículas α com $E_k = 6,0\text{MeV}$ incide em uma folha de prata com $1,0\mu\text{m}$ de espessura. A corrente do feixe é de $1,0\text{nA}$. Quantas partículas α serão contadas por um pequeno cintilômetro com 5mm^2 de área situado a $2,0\text{cm}$ da folha com um ângulo de 75° ? (dados: Ag: $Z=47$, $\rho=10,5\text{g/cm}^3$, $M=108\text{g/mol}$)