

**Universidade de São Paulo
Instituto de Física**

FÍSICA MODERNA I

AULA 17 - REVISÃO

**Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br**

1o. Semestre de 2015

Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:

<http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=5215>

15/05/2015

Conteúdo P2

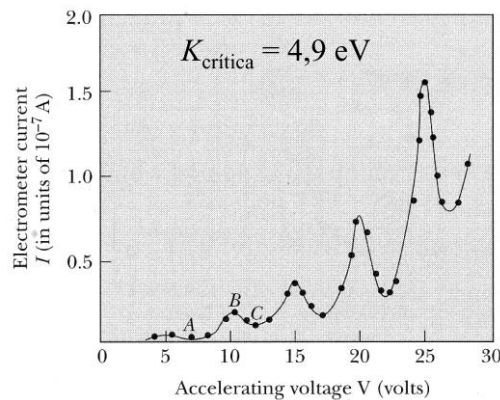
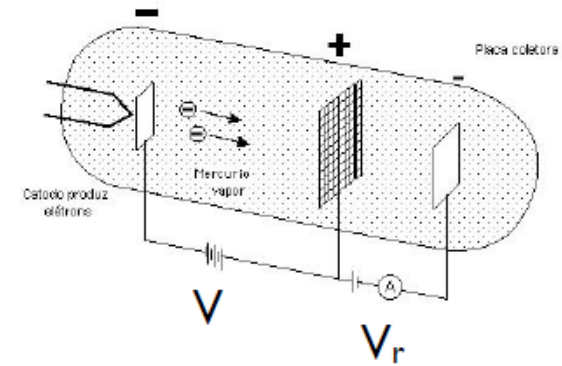
- **Panorama da Física no final do século XIX**
- **Natureza Ondulatória da Radiação eletromagnética**
 - **Radiação Térmica – Hipótese de Planck**
- **Dualidade onda – partícula: Radiação eletromagnética e as propriedades corpusculares**
 - **Efeito fotoelétrico**
 - **Efeito Compton**
 - **Produção e aniquilação de pares**
 - **Difração de raios-X**
- **Dualidade onda – partícula: Matéria e as propriedades corpusculares**
 - **Natureza atômica da matéria**
 - **Modelo de Thomson**
 - **Modelo de Rutherford**
 - **Modelo de Bohr**
 - **Modelo de Sommerfeld –FranckHertz**
- **Dualidade onda – partícula: Matéria e as propriedades ondulatórias**
 - **Postulado de de Broglie**
 - **Difração de elétrons,**
 - **Difração de Bragg**
 - **Princípios de incerteza**
- **Teoria de Schroedinger da Mecânica Quântica**
 - **Equação de Schroedinger – equação de onda para o elétron**
 - **Autofunções e autovalores**
 - **Valores esperados**
 - **Equação de Schroedinger Dependente e independente do tempo**
 - **Potenciais nulo, degrau e poço quadrado**
- **Átomo de Hidrogênio**

BIBLIOGRAFIA

- 1) Física Quântica, Eisberg e Resnick (ER);
Capítulo 3, 4 (4.8 até 4.12) , 5 (até 5.4)
- 2) Modern Physics for scientists and engineers, T. Thornton e Andrew Rex (TR);
Capítulo 4 (4.7), 5, 6 (até 6.3)
- 3) Modern Physics de Serway, Moses e Moyer (SMM);
Capítulo 4 (4.5), 5, 6 (até 6.4)
- 4) Física Moderna, Paul A. Tipler e Ralph A. Liewellyn (TL);
Capítulo 4 (4.5), 5 , 6 (6.1)
- 5) Notas de aula do Professor Roberto V. Ribas (RR)
Capítulo 4 (4.4), 5
- 6) Física Moderna, Francisco Caruso e Vitor Oguri (FV)
Capítulo 14

Experimento de Frank - Hertz

- Franck e Hertz em 1914 realizaram um experimento que para confirmação que os estados de energia interna de um átomo são quantizados.
- Ampola de vidro com gás a baixa pressão (gás de átomos para investigar).
- Catodo aquecido que produz elétrons.
- Elétrons são acelerados por um potencial V e atraídos pela grade polarizada positiva.
- Os elétrons que passam pela grade só chegam a placa P se tiverem energia suficiente para vencer o potencial retardador V_r .



$eV = E_2 - E_1 = 4,9\text{eV}$ (gráfico mostra primeiro pico).

- Se $eV \geq 4,9\text{eV}$, o elétron incidente poderá transferir $4,9\text{eV}$ ao elétron do gás (fazer o elétron ir para o estado excitado), o espalhamento é inelástico e o elétron perde toda a sua energia e não consegue vencer o potencia V_r e a corrente cai.

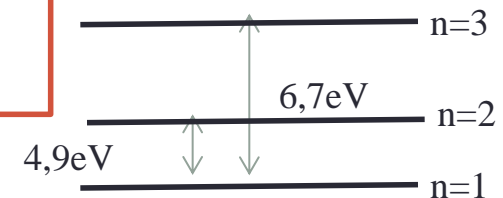
Experimento de Franck - Hertz

- O primeiro estado excitado do Hg (mercúrio) tem energia 4,9 eV acima do estado fundamental

$$\frac{hc}{\lambda} = 4,9 \quad \lambda = 2536 \text{ \AA} = 253,6 \text{ nm}$$

- Experimentalmente temos uma linha espectral do mercúrio com este comprimento de onda
- E excitações múltiplas causadas pelo mesmo elétron $2 \times 4,9 = 9,8 \text{ V}$ (metade do caminho até a grade)

- Na configuração do arranjo apenas as excitações múltiplas para o primeiro estado excitado são observadas, de modo que as quedas de corrente acontecem a cada 4,9V



Hipóteses de de Broglie

- A hipótese de de Broglie em sua tese de doutorado de 1924, era que o comportamento dual (onda-partícula) da radiação eletromagnética poderia ser aplicado a matéria
- Vimos que podemos associar a um fóton uma frequência de uma onda luminosa que governa seu movimento $E=h\nu$
- E um momento do fóton é relacionado ao comprimento de onda

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

- Então segundo de Broglie se ondas de luz tem propriedades de partículas, partículas devem ter propriedades de onda. E propôs que ambas as relações cima são validas também para partículas.
- Deste modo, o comprimento de onda (não relativístico) associado a partícula d emassa m e velocidade v é:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Difração de RX

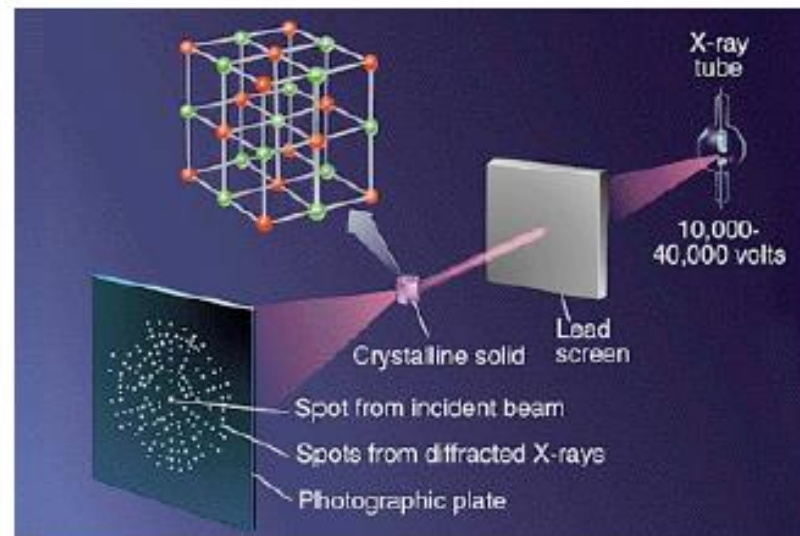
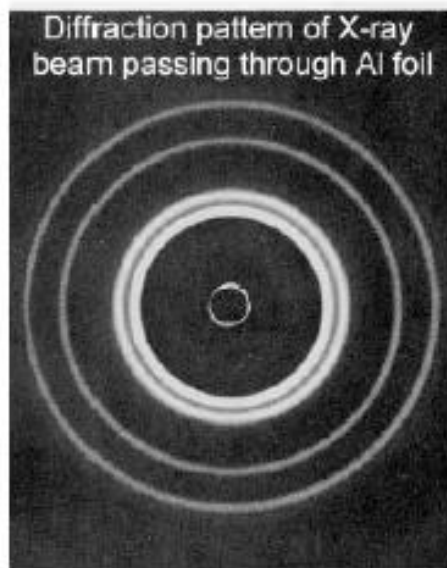
7

- O pequeno alargamento sofrido por um feixe de raios X ao passar por uma fenda de alguns milésimos de milímetros de largura indicava que

$$\lambda \sim 10^{-10} m = 0,1 nm$$

- Bragg em 1912 estudou a difração de raios X em várias famílias de planos paralelos de átomos
- As ondas difratadas com o mesmo ângulo por átomos situados em planos diferentes estarão em fase (interferência construtiva) se a diferença entre os dois percursos foi igual ao um número inteiro de comprimento de onda

$$2d \sin \theta = n\lambda$$



Difração de elétrons

Temos que :

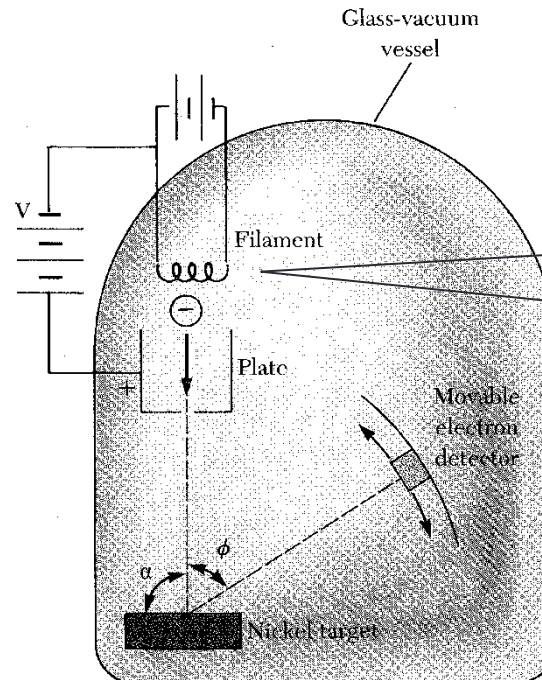
Elétron para este caso podemos associar um comprimento de onda (por exemplo para energia cinética de 100 eV) – De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2m^2c^2E}} = \frac{1,24 \text{ keVnm}}{\sqrt{25.10^3 \text{ (eV)}^2}} = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Testes experimentais da hipótese de de Broglie

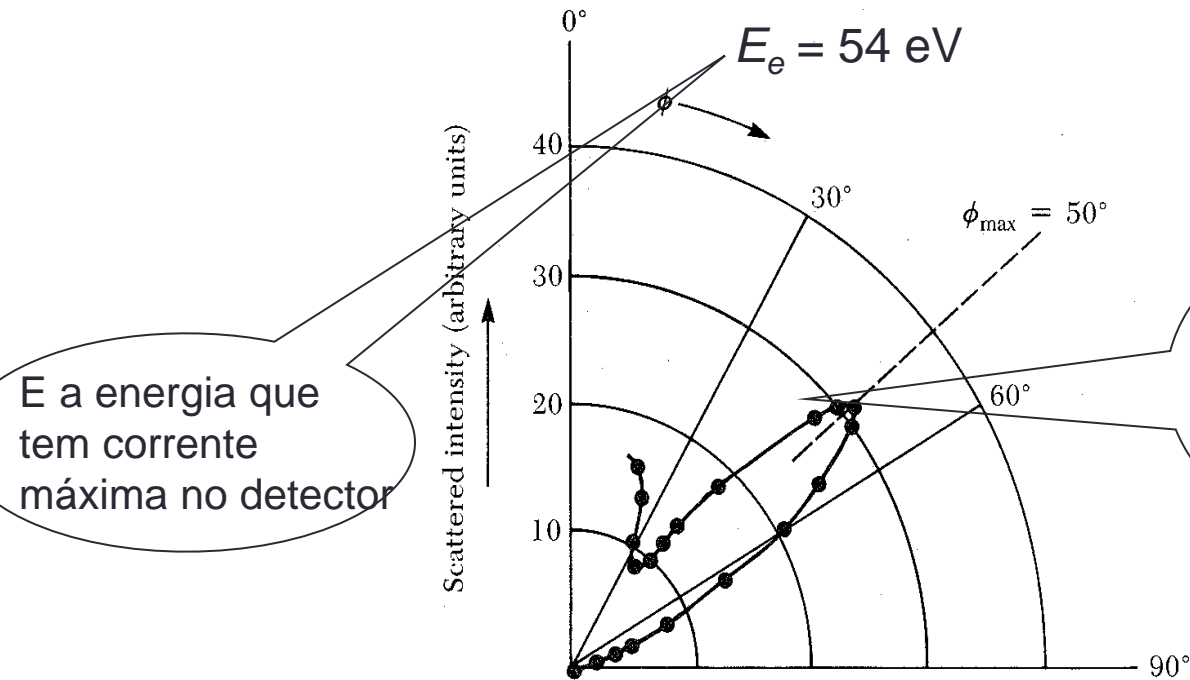
1927 Davisson e Germer (USA) e G. Thomson (Escócia):

- Estudaram a quantidade de elétrons que eram espalhados em uma superfície de Ni em função do ângulo de espalhamento



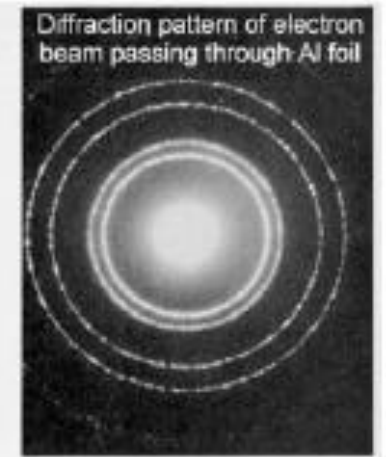
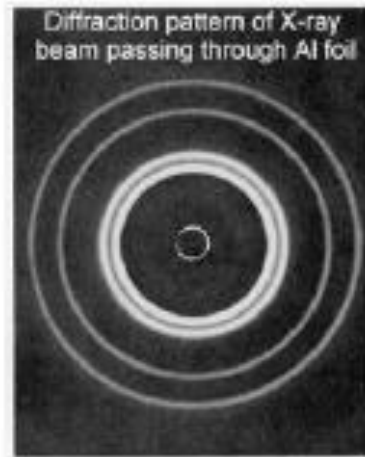
Potencial faz com que os e⁻ sejam emitidos com E (eV)

Difração de elétrons

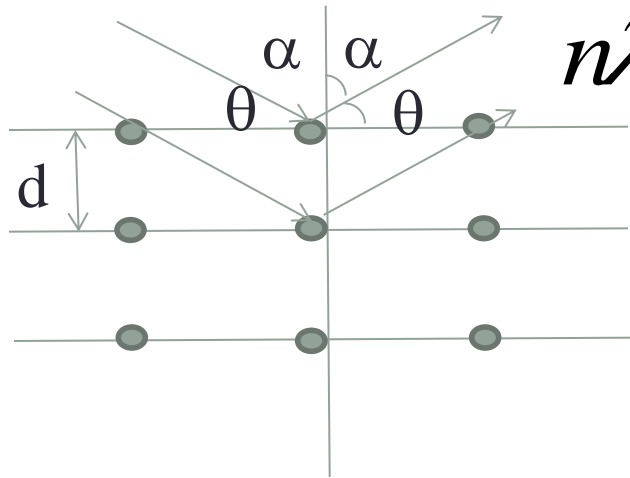


E a energia que tem corrente máxima no detector

A existência deste pico em 50° mostra qualitativamente o postulado de de Broglie pois só pode ser explicado com uma interferência construtiva de ondas espalhadas



Difração de elétrons

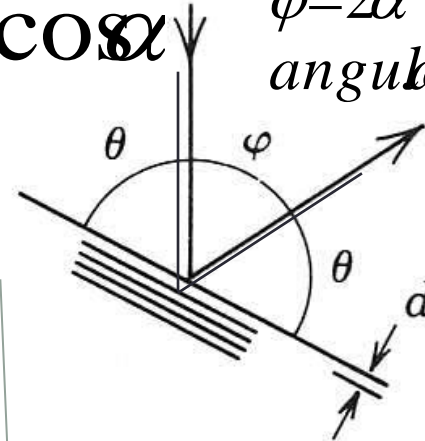


$$n\lambda = 2d \sin \theta = 2d \cos \alpha$$

Máximo \Rightarrow

$$\varphi = 2\alpha$$

ângulo de espalhamento



d é a distância entre os planos de Bragg esta relacionada a distância interatômica D através da relação: $d = D \sin \alpha$

$$n\lambda = 2D \sin \alpha \cos \alpha$$

$$n\lambda = D \sin 2\alpha = D \sin \varphi$$

Medidas de difração de RX revelaram que $D = 0,215 \text{ nm}$ para o Ni.

O comprimento de onda então calculado para $n=1$

$$\lambda = 0,215 \text{ e } 50 = 0,165 \text{ \AA}$$

Caso relativístico

- Para se determinar uma expressão equivalente que se aplique tanto as partículas relativísticas como não-relativísticas:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad mc^2 = E_0$$

Energia de repouso da partícula

Energia total

$$(E_0 + E_K)^2 = (pc)^2 + (E_0)^2$$

$$E = E_0 + E_K \quad p = \frac{(2E_0E_K + E_K^2)^{1/2}}{c}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{(2E_0E_K + E_K^2)^{1/2}}$$

Aplicável a qualquer partícula com qualquer energia

Regras de quantização de Wilson e Sommerfeld

- Em 1916, Wilson e Sommerfeld enunciaram um conjunto de regra de quantização:
- “Para qualquer sistema físico no qual as coordenadas são funções periódica do tempo existe uma condição quântica para cada coordenada”

$$\oint P_q dq = n_q h$$

q é uma coordenada, p_q é o momento associado a esta coordenada e , n_q é o número quântico que toma apenas valores inteiros.

\oint significa que a integração é tomada sobre um período da coordenada q .

Exemplo:

No caso do átomo de H o elétron se movendo em uma órbita de raio r tem momento angular constante $L = mvr$.

A coordenada θ é uma função periódica do tempo
(0 a 2π)

$$\oint L d\theta = n h$$

$$L \int_0^{2\pi} d\theta = n h$$

$$L 2\pi = n h \Rightarrow L = n \hbar$$

Regras de quantização de Wilson e Sommerfeld

- Uma interpretação física da regra de quantização de Bohr foi dada em 1924 por de Broglie

$$L = mvr = n\hbar$$

$$pr = \frac{nh}{2\pi}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\frac{h}{\lambda} r = \frac{nh}{2\pi}$$

$$2\pi r = n\lambda$$

Momento do elétron em uma órbita possível de raio r ,

As órbitas possíveis são aquelas nas quais as circunferências podem conter exatamente um número inteiro de comprimentos de onda de de Broglie



Sommerfeld trabalhou com órbitas elípticas para o átomo de H e também levou em conta as correções relativísticas para a energia do elétron. Usou isto como tentativa de explicar a estrutura fina do hidrogênio (**Estrutura fina é uma separação das linhas espectrais em várias componentes diferentes**).

Órbitas elípticas de Sommerfeld

Sommerfeld calculou os valores dos semi-eixos maior (a) e menor (b) que dão a forma e o tamanho das órbitas elípticas e a energia total E do elétron nessa órbita

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu Z e^2}$$

$$b = a \frac{n_\theta}{n}$$

$$E = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n\hbar^2}$$

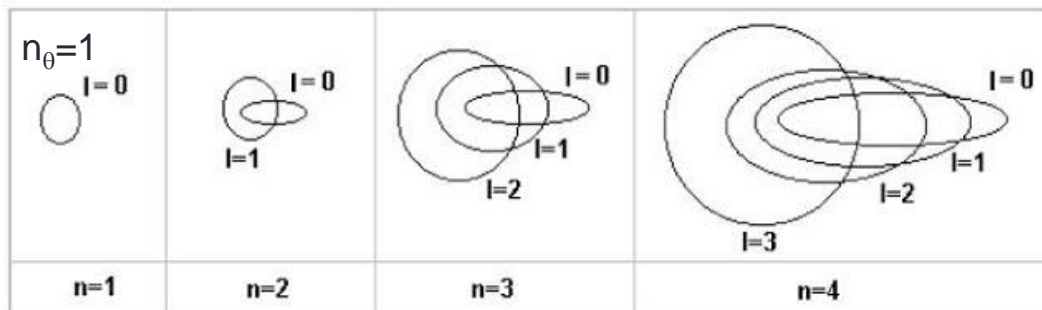
μ é a massa reduzida

n é o número quântico:

$$n \equiv n_\theta + n_r \quad \begin{array}{l} n_\theta = 1, 2, 3, \dots \\ n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

As energias são degeneradas

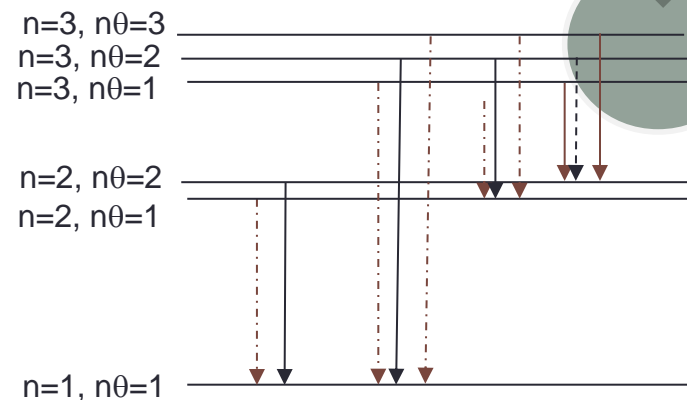


$$E = E_1$$

$$E = E_2$$

$$E = E_3$$

$$E = E_4$$



Órbitas elípticas de Sommerfeld tratadas relativisticamente

O tamanho real da correção depende da velocidade média do elétron que por sua vez depende da excentricidade da órbita, correções da ordem de v^2/c^2 , era provável que a maior correção fosse na órbita muito excêntrica, porque v aumenta à medida que o elétron se aproxima do núcleo

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{\hbar}{mr} \quad (n=1)$$

$$r_1 = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e^2} = \frac{\hbar^2}{mk_e^2}$$

$$v = \frac{\hbar}{mr} = \frac{\hbar}{m\left(\frac{\hbar^2}{mk_e^2}\right)} = \frac{k_e^2}{\hbar} \quad \frac{v}{c} = \frac{k_e^2}{\hbar c} = \frac{1,44 \text{ eV nm}}{19,7 \text{ BeV nm}}$$

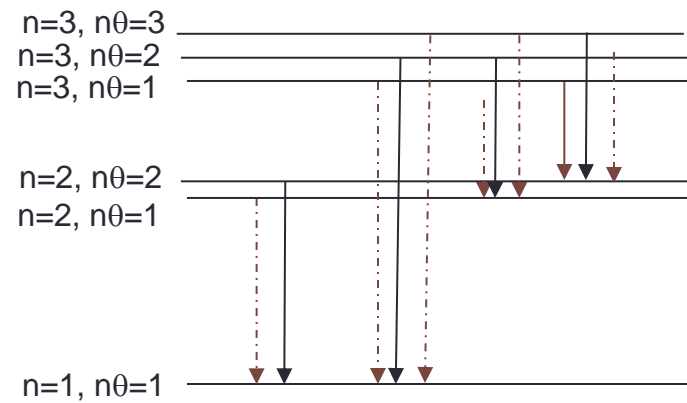
$$E = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n\hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

α é chamada de “constante de estrutura fina”

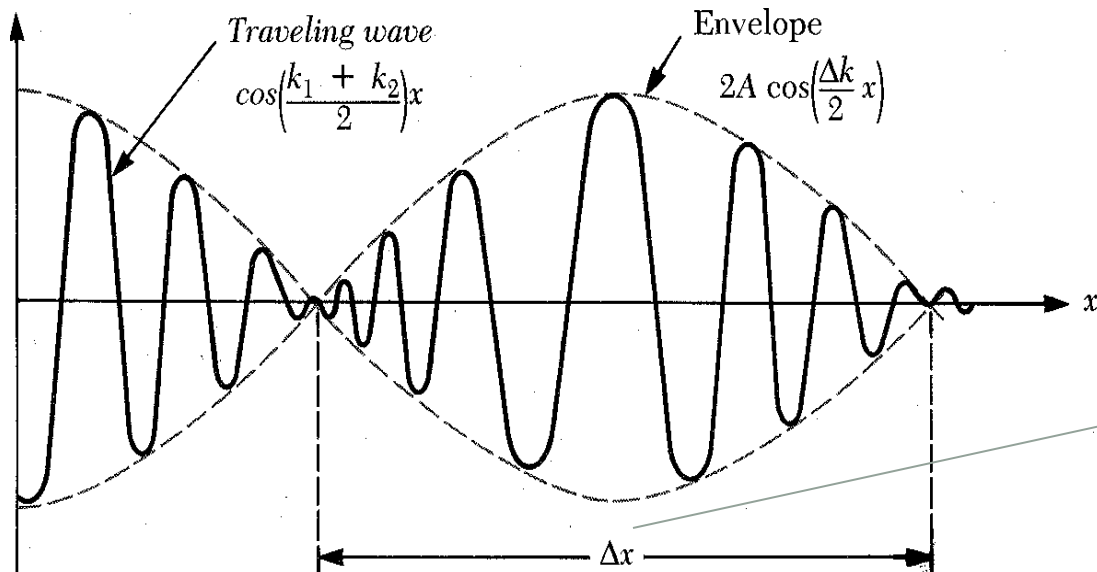
$$\alpha = \frac{k_e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

As linhas tracejadas não foram observadas nos espectros e estas transições não ocorrem (regras de seleção):

$$n_{\theta_i} - n_{\theta_f} = \pm 1$$



Superposição de duas Ondas



Podemos interpretar a onda soma como sendo um envelope que modula lentamente uma onda com k e w médios

Δx é a largura do envoltório e é inversamente proporcional ao número de onda

$$\Psi(x, t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta \omega t}{2}\right) \cos(kx - \omega t)$$

amplitude
(envelope)

A velocidade de propagação das ondas individuais $v_f = w/k$

$$\frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \omega t) = \frac{1}{2} \Delta k \left(x - \frac{\Delta \omega}{\Delta k} t \right) = \frac{1}{2} \Delta k (x - v_g t)$$

velocidade de grupo

A velocidade de propagação do grupo (que é a velocidade do envoltório)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Em contraste com o pulso a combinação de ondas não é localizada no espaço

Ondas harmônicas que compõem um pacote de ondas. A velocidade é dada por:

$$v_f = \lambda f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = 2\pi f$$

Velocidade de fase

$$v_f = \left(\frac{2\pi}{k} \right) \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

$$v_f = \left(\frac{\omega}{k} \right)$$

$$v_f \cdot k = \omega$$

A velocidade de grupo esta relacionada a velocidade de fase por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k v_f) = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

- A velocidade v_g pode ser $>$ ou $<$ que v_f

- Para o postulado de de Broglie

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E \hbar}{\hbar p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

- A velocidade de fase não corresponde a velocidade da partícula

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

- O pacote de onda se propaga com velocidade do elétron

Princípio de incerteza de Heisenberg, diz:

que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x , por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:

Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$E = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Probabilidade

Em 1925-1926 Max Born propôs como relacionar a Ψ (função de onda) com o comportamento das partículas que ela descreve:

A probabilidade que a partícula seja encontrada no instante t em uma coordenada entre x e $x+dx$ é :

$$P(x)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$P(x)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

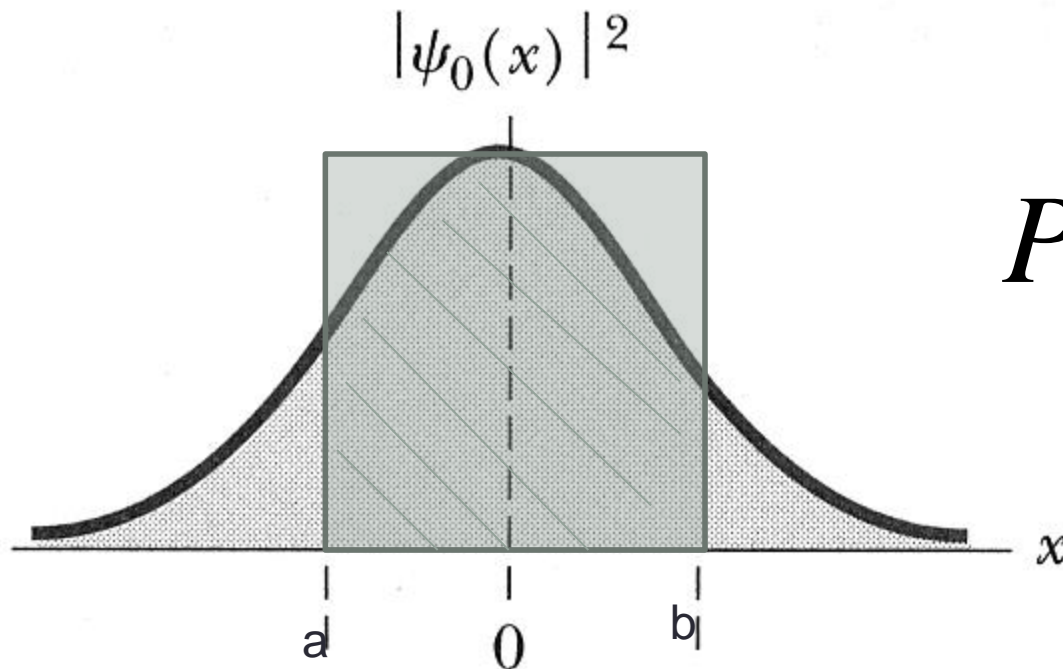
Ψ não é uma quantidade mensurável, mas o seu módulo ao quadrado é mensurável e é justamente a probabilidade por unidade de comprimento ou densidade de probabilidade $P(x)$ para encontrar a partícula no ponto x no tempo t .

Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

A probabilidade de uma partícula estar no intervalo $a \leq x \leq b$ esta relacionado área embaixo da curva de a até b de uma função densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2$



$$P = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx =$$

o área embaixo da curva entre a e b

OBSERVÁVEIS:

Ψ não é uma quantidade mensurável

MAS como podemos relacionar a função de onda com grandezas observáveis????

COMO podemos obter a posição, o momento ou a energia de uma partícula a partir da função de onda (de maneira exata no mundo quântico)?????

VALORES ESPERADOS:

USANDO a interpretação probabilística de Bohr, podemos obter apenas os valores médios ou valores esperados das grandezas

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x R(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx$$

OPERADORES – OBSERVÁVEIS RESUMIDAMENTE

1- no caso da posição o operador é o próprio valor da posição:

$$\hat{x} \leftrightarrow x$$

2 - no caso do momento, operador é dado por:

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\bar{p} = \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx$$

3 - no caso da energia, operador é dado por:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$E = \langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(x, t) dx$$

OBSERVÁVEIS - VALOR ESPERADO

Temos então que o valor esperado de qualquer grandeza que depende da posição, do momento, da energia pode ser determinado através de:

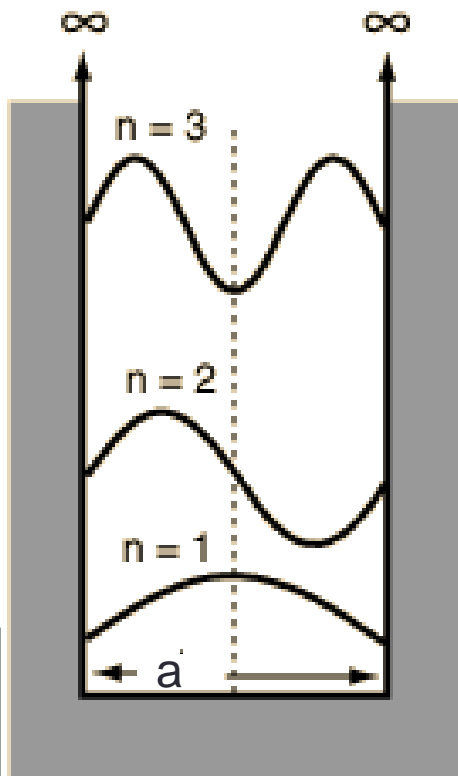
$$f(x, p, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \hat{f}\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(x, t) dx$$

O valor médio de uma grandeza em mecânica quântica é normalmente chamado de valor esperado, que é o valor que se espera obter de uma medida daquela grandeza.

Observe que não esperamos necessariamente que o valor de uma medida que tenha uma alta probabilidade seja igual ao valor esperado.

Elétron em uma caixa

Podemos associar a probabilidade de localizar a partícula em um estado com menor energia usando uma função de onda para o elétron (associar ao elétron uma onda cossenoidal)



$x = 0$ at left wall of box.

Função de onda

$$\Psi(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, n=1,2,3\dots$$

A probabilidade que a partícula seja encontrada em um ponto na coordenada x entre $-a/2$ e $a/2$ é :

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 dx$$

$$P(x) = \Psi^*(x) \Psi(x) dx$$

$$\Psi_n^2(x) = A^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

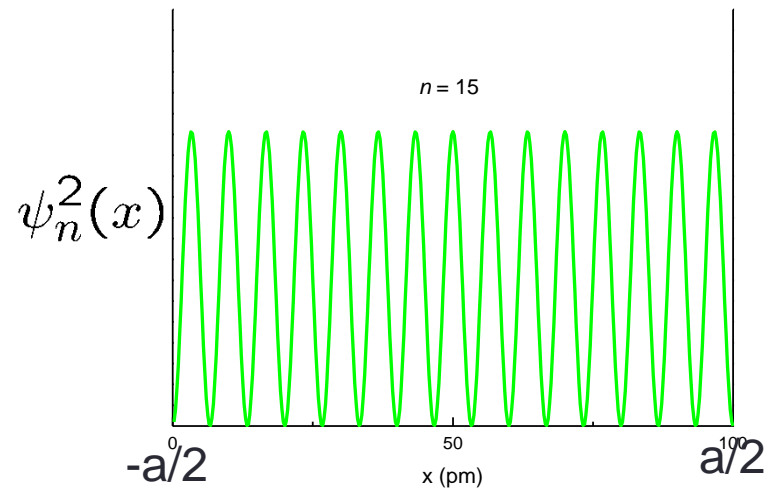
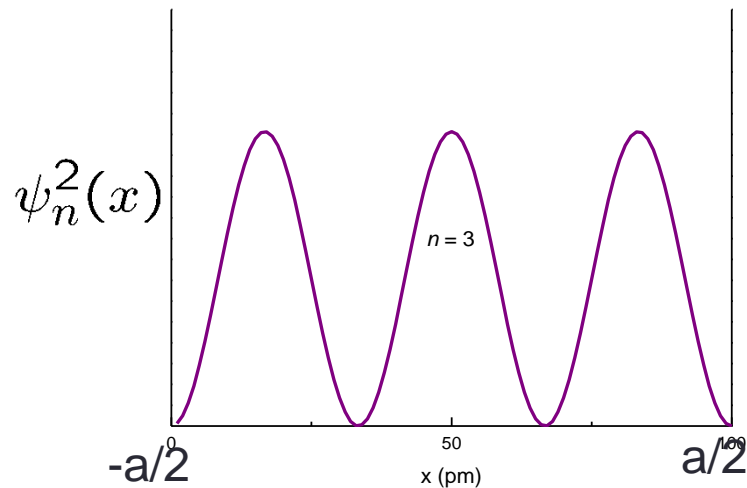
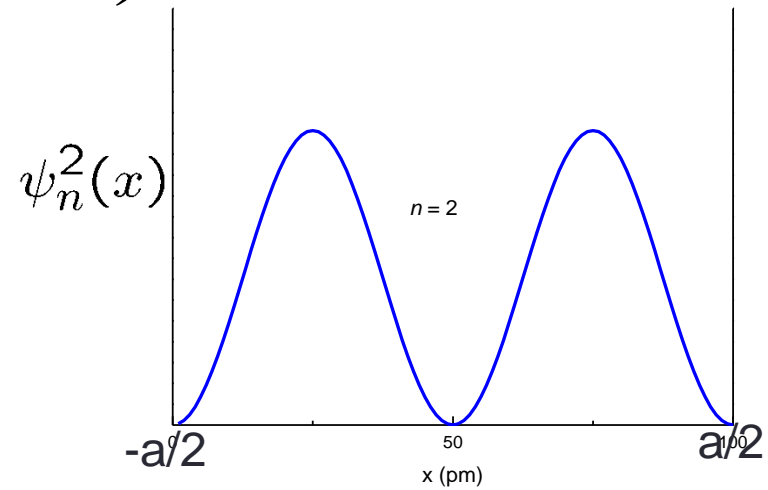
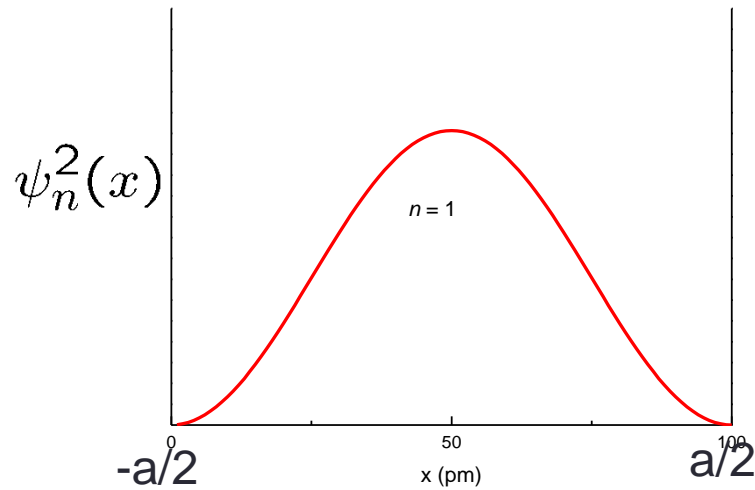
$$P(x) = \int_{-a/2}^{+a/2} A^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

Onda fixa nas ponta separada por uma distância a , terá $\lambda/2$ comprimentos de onda:

$$a = \frac{n\lambda}{2}$$

Elétron em uma caixa

$$\Psi_n^2(x) = A^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right), n=1,2,3\dots$$



Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

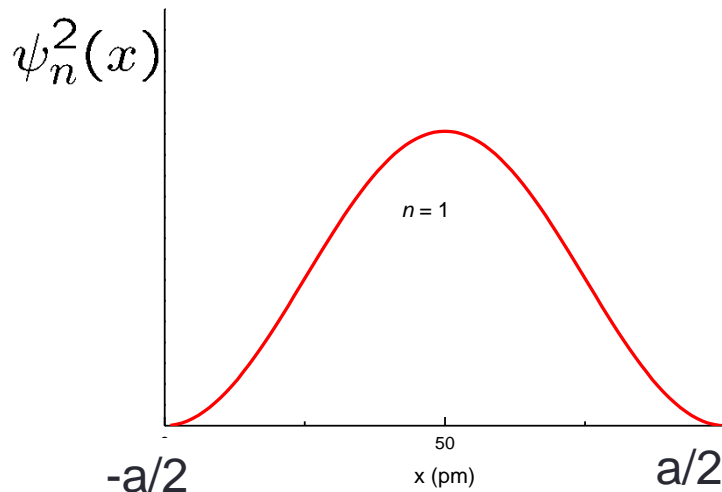
No nosso caso:

$$P(x) = \int_{-a/2}^{+a/2} A^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{a}x$$

Mudança de variável

$$d\theta = \frac{\pi}{a} dx$$



$$P(x) = A^2 \frac{a}{\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos^2 \theta d\theta = 1$$

$$A^2 \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Constante de normalização

Posso calcular:

$$\bar{x} = \langle x \rangle \text{ ou } \langle x^2 \rangle$$

ou

$$\bar{p} = \langle p \rangle \text{ ou } \langle p^2 \rangle$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Esperamos que a Equação de Schrödinger incorpore os seguintes princípios fundamentais:

- A conservação de energia: este princípio é tão básico que sua exclusão é impensável.
- A hipótese de de Broglie: mecânica quântica está especificamente relacionada a partículas que mostram distintas propriedades de ondas.

O princípio de conservação de energia é definido pela equação:

$$E = E_c + E_p \quad E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \text{Substituindo a equação de de Broglie:}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad E_c = \frac{h^2}{2\lambda^2 m}$$

Vamos assumir, por simplicidade, que a parte da função de onda da partícula independente do tempo, em uma dimensão, pode ser escrita como:

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Acabamos de ver que: $E_c = \frac{h^2}{2\lambda m}$ então : $E_c = \frac{h^2}{2\lambda m} = E - E_p$

A equação:

$$\psi = A \sin kx$$

$$\lambda = \frac{h^2}{2(E - E_p)m}$$

A derivada segunda desta equação é:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A \sin kx = -k^2 \psi \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -4\pi^2 \frac{2(E - E_p)m}{h^2} \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - E_p) \psi$$

Esta equação é a forma unidimensional da **equação de Schrödinger**

Vimos que :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{8\pi^2m}{h^2}(E - E_p)\psi$$

Vamos re-escrever:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - E_p)\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - E_p)\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E_p\psi = E\psi$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Para uma função de onda
dependente de x e t

$$\psi(x, t)$$

Equação de Schrödinger dependente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Equação de Schrödinger independente do tempo

Geralmente estudaremos os casos que correspondem a situações de onda estacionária:

- átomo de hidrogênio,
- Partículas em uma caixa
- Oscilador harmônico

Nestes casos o potencial V não depende explicitamente do tempo

$V(\mathbf{x},t)=V(\mathbf{x})$ – Utilizaremos neste caso a ideia de separação de variáveis:

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad \phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Cuja parte espacial, chamada de autofunção é obtida pela equação diferencial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$