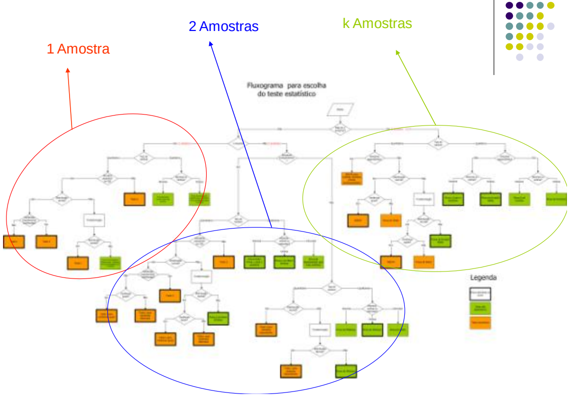
Análise de Variância (ANOVA) de 1 via

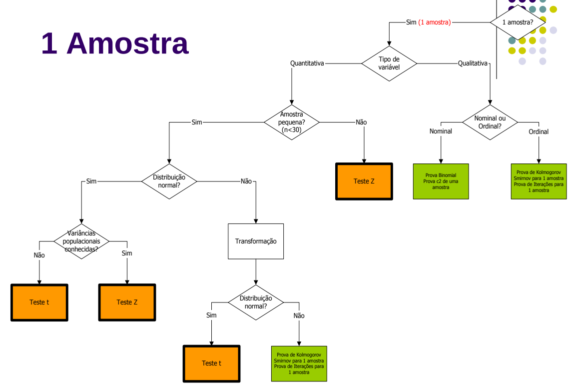
Comparação de *k* médias (*k* > 2)

Aula de hoje

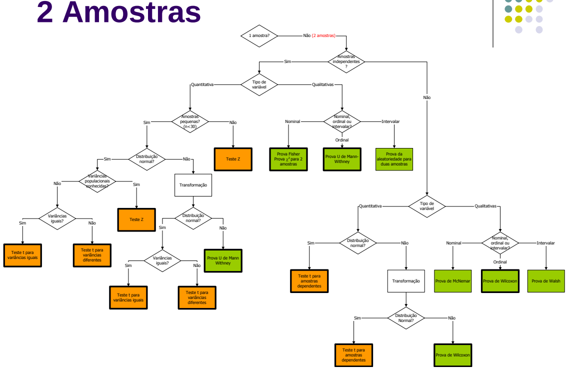
Testes de Tendência Central (média, mediana, proporção)	Classificação	Variável 1	Variável 2	Número Grupos	Dependência	Premissas
Teste Z	Paramétrico	Quantitativa	-	1	-	Variância pop. * conhecida
Teste t	Paramétrico	Quantitativa	-	1	-	Distribuição normal
Wilcoxon (teste dos sinais, Wilcoxon p/ 1 amostra)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	-	1	-	
Teste t p/ 2 amostras	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal; variâncias iguais
Teste t p/ 2 amostras com variâncias diferentes	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal; variâncias diferentes
Teste t pareado	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Dependentes	Distribuição normal
ANOVA	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Independentes	Distribuição normal; variâncias iguais
ANOVA p/ medidas repetidas	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Dependentes	Distribuição normal; Esfericidade
Mann-Whitney (Wilcoxon não-pareado)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Independentes	
Wilcoxon (Wilcoxon pareado, teste dos sinais)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Dependentes	
Kruskal-Wallis	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Independentes	
Friedman	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Dependentes	
Teste p/ 1 proporção	Paramétrico	Nominal	-	1	-	
Teste p/ 2 proporções	Paramétrico	Nominal	Nominal	2	Independentes	



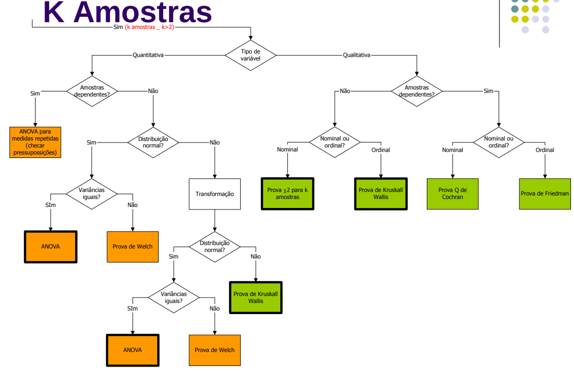
1 Amostra



2 Amostras



K Amostras



Princípios

- 1 Amostra

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

- 2 Amostras

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Análise de Variância

- Considere que há *k* populações de interesse. O método de análise de variância permite testar a hipótese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$
$$H_1 : \text{As médias não são iguais}$$

Por que não comparar as médias 2 a 2?

- A cada comparação temos a possibilidade de cometer um erro. A chance de cometer pelo menos um erro quando conduzimos todos os testes é normalmente inaceitavelmente grande.

Comparações 2 a 2

- 1 comparação:
  - Probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira (Erro tipo I) 5%
- 3 comparações (3 grupos)
  - Probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira (Erro tipo I) $(1-0{,}95^3)=0{,}14$
- 15 comparações (6 grupos)
  - Probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira (Erro tipo I) $(1-0{,}95^{15})=0{,}54$

Princípio da Análise de Variância

- Consiste em comparar a variabilidade entre as médias dos grupos e a variabilidade dentro dos grupos
- Se a variabilidade entre as médias dos grupos for muito maior que a variabilidade dentro dos grupos temos elementos para supor que as médias dos grupos não são iguais
- Comparação das variâncias é realizada por meio da razão das variâncias que segue a distribuição F

Pressuposições da ANOVA de 1via

- As distribuições populacionais devem ser normais
- As variâncias devem ser iguais (homocedasticidade)

Funcionamento do ANOVA

- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:
  - Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras

$$\text{Estimativa 1} = \frac{\sum_i s_i^2}{n}$$

  - Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central

Estimativa da Variância entre as Amostras

- Se H0 for verdadeira, é possível estimar a variância populacional pelo Teorema do Limite Central:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

logo

$$\sigma^2 = n \cdot \sigma_{\bar{x}}^2$$

n é o tamanho de cada amostra

podemos estimar $\sigma_{\bar{x}}^2$ por $s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$

k é o número de grupos

Funcionamento do ANOVA

- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:
  - Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras

$$\text{Estimativa 1} = \frac{\sum_i s_i^2}{n}$$

  - Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central

$$\text{Estimativa 2} = n \cdot s_{\bar{x}}^2 = n \cdot \frac{\sum(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$

  - Se H0 for verdadeira, as duas estimativas devem ser estatisticamente iguais

Funcionamento do ANOVA

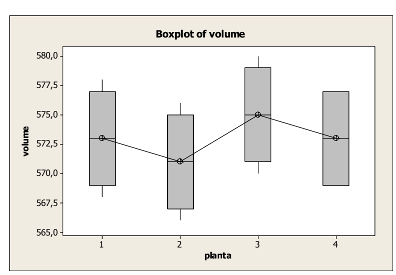
- É possível estimar a variância populacional de duas maneiras:
  - Estimativa 1 = Média entre as variâncias das amostras
  - Estimativa 2 = Utilizando o Teorema do Limite Central
  - Se H0 for verdadeira, as duas estimativas devem ser estatisticamente iguais
  - É possível fazer um teste F (teste entre variâncias), para testar se as variâncias são iguais

Exemplo

- Considere o volume de fertilizante produzido em 4 linhas de produção (plantas) durante 7 semanas

Planta	1	2	3	4
	574	566	580	573
	578	576	570	570
	573	569	577	569
Produção Semanal	568	571	575	577
	572	573	573	576
	577	575	579	577
	569	567	571	569
Média	573	571	575	573
Variância	14,0	15,0	15,0	13,67

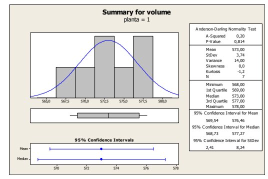
Boxplot

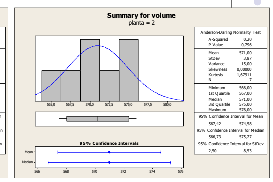


Checando as premissas

- Normalidade
- Variâncias

Teste de Normalidade



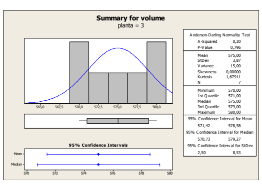


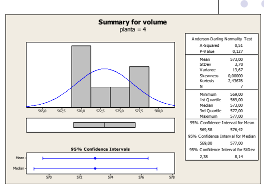
Teste de Normalidade de Anderson-Darling:
H_0: Dados seguem a distribuição Normal
H_1: Dados não seguem a distribuição Normal

Planta 1: p=0,814
Planta 2: p=0,796

p>5%: Dados das plantas 1 e 2 seguem a distribuição Normal

Teste de Normalidade





Planta 3: p=0,796
Planta 4: p=0,127

p>5%: Dados das plantas 3 e 4 seguem a distribuição Normal

Teste de comparação de variâncias (mais de 2 amostras)

Teste de comparação de variâncias
(teste de Bartlett)

H_0: As variâncias são iguais
H_1: As variâncias não são iguais

Teste de comparação de variâncias

```
Test for Equal Variances: volume versus planta

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

planta  N    Lower    StDev    Upper
     1  7  2,16067  3,74166  10,7047
     2  7  2,23651  3,87298  11,0804
     3  7  2,23651  3,87298  11,0804
     4  7  2,13480  3,69685  10,5765

Bartlett's Test (Normal Distribution)
Test statistic = 0,02; p-value = 0,999

Levene's Test (Any Continuous Distribution)
Test statistic = 0,04; p-value = 0,988
```

Teste de Bartlett (p=99,9%): p>5%, podemos considerar as variâncias iguais.

Amostras de Mesmo Tamanho

- Estimativa 1 (Variância dentro das amostras)
  - As 4 variâncias podem ser consideradas como estimativas de uma variância comum

$$\text{Estimativa 1} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2}{4}$$
$$= \frac{14 + 15 + 15 + 13{,}67}{4} = 14{,}4$$

Estimativa da Variância entre as Amostras

- Considere, por um momento, que a H_0 é verdadeira. Podemos então pensar as 4 plantas como sendo amostras de tamanho 7 de uma mesma população. As quatro médias amostrais são 4 valores da variável aleatória $\bar{x}$. Lembrando do Teorema do Limite Central temos:

Estimativa da Variância entre as Amostras

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

logo

$$\sigma^2 = n \cdot \sigma_{\bar{x}}^2$$

n é o tamanho de cada amostra

$$\text{podemos estimar } \sigma_{\bar{x}}^2 \text{ por } s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$

k é o número de grupos

Estimativa da Variância entre as Amostras

Média	Média-média das médias	(Média-média das médias)^2
573	0	0
571	-2	4
575	2	4
573	0	0
573		8

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\sum(\bar{x} - 573)^2}{4-1} =$$

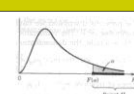
$$= \frac{(573-573)^2 + (571-573)^2 + (575-573)^2 + (573-573)^2}{4-1} = \frac{8}{3}$$

Amostras de Mesmo Tamanho

- Estimativa 2 (Variância entre as amostras)

$$\text{Estimativa 2} = n \cdot s_{\bar{x}}^2 = n \cdot \frac{\sum(\bar{x} - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = (7) \cdot \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{56}{3} = 18{,}7$$

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{n \cdot s_{\bar{x}}^2}{\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2\right)/4} = \frac{18{,}7}{14{,}4} = 1{,}29$$



Saída do Minitab

```
One-way ANOVA: volume versus planta

Source  DF     SS    MS     F      P
planta   3   56,0  18,7  1,29  0,299
Error   24  346,0  14,4
Total   27  402,0

S = 3,797   R-Sq = 13,93%   R-Sq(adj) = 3,17%

                             Individual 95% CIs For Mean Based on
                             Pooled StDev
Level   N    Mean  StDev  --------+---------+---------+---------+-
1       7  573,00   3,74          (-----------*-----------)
2       7  571,00   3,87  (-----------*-----------)
3       7  575,00   3,87                  (-----------*-----------)
4       7  573,00   3,70          (-----------*-----------)
                          --------+---------+---------+---------+-
                              570,0     572,5     575,0     577,5

Pooled StDev = 3,80
```

Tomada de decisão

- p=0,299=29,9%. Para um nível de significância de 5%, não rejeitamos a hipótese nula de médias iguais. Assim, não foi observada uma diferença estatística significativa entre os volumes médios de fertilizante produzidos nas 4 linhas de produção.

Amostras de Mesmo Tamanho

- Suponha que temos amostras aleatórias de tamanho *n* de cada *k* população normal que tenham a mesma variância. Então, se a hipótese de nulidade de médias iguais estiver correta, a variável aleatória

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{n \cdot s_{\bar{x}}^2}{\left(s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2\right)/k}$$

tem uma distribuição F. O número de graus de liberdade do numerador é *k*-1 e do denominador é *N*-*k*, onde *N* é o número total de observações em todas as amostras

Amostras de Tamanhos Diferentes

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2 / (N-k)}$$

Tabela de ANOVA

Soma dos quadrados entre os grupos:

$$SQE = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2$$

Quadrados médios entre os grupos:

$$QME = \frac{SQE}{k-1}$$

Soma dos quadrados dentro dos grupos:

$$SQD = \sum_{j=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2$$

Quadrados médios dentro dos grupos:

$$QMD = \frac{SQD}{N-k}$$

$$F = \frac{\text{estimativa 2}}{\text{estimativa 1}} = \frac{QME}{QMD} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2 / (N-k)}$$

Tabela de ANOVA

Fonte	Graus de liberdade	Soma dos quadrados (SQ)	Quadrados médios (QM)	F
Entre grupos	k-1	SQE	QME	QME/QMD
Dentro dos grupos	N-k	SQD	QMD	
Total	N-1	SQE+SQD		

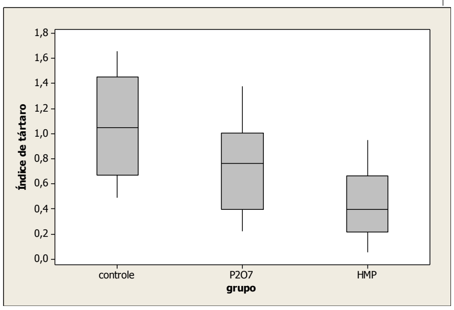
Exemplo com amostras de tamanhos diferentes

- Cães foram alimentados com ração cujos peletes estavam recobertos com agentes que, acredita-se, tenham efeito na formação do tártaro. O acúmulo de cálculo foi medido por um índice que combinou estimativas da proporção coberta do dente e espessura do depósito. Vinte e seis animais foram aleatoriamente alocados em um de três grupos. O primeiro grupo é o controle (n_1=9), que receberia ração sem adição de qualquer agente, o segundo (n_2=9) receberia ração com pirofosfato (P_2O_7) e o terceiro (n_3=8) hexametafosfato de sódio (HMP). O índice de acúmulo de tártaro foi medido em cada animal após 4 semanas do início do tratamento. Pergunta-se se há diferença na intensidade de formação de tártaro entre os grupos (Petri e Watson, 1999).

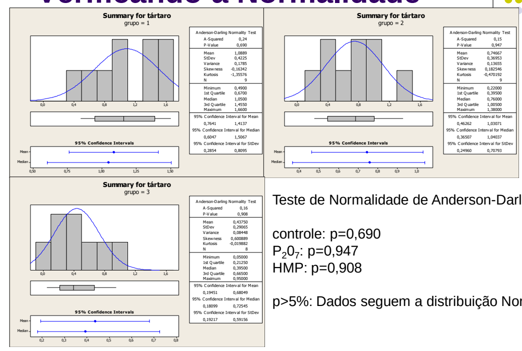
Teste de hipóteses

$$H_0 : \mu_{\text{controle}} = \mu_{P_2O_7} = \mu_{\text{HMP}}$$
$$H_1 : \text{As médias não são iguais}$$

Índice de cálculo nos 3 grupos



Verificando a Normalidade



Teste de Normalidade de Anderson-Darling

controle: p=0,690
P_2O_7: p=0,947
HMP: p=0,908

p>5%: Dados seguem a distribuição Normal

Teste de comparação de variâncias

```
Test for Equal Variances: tártaro versus grupo

95% Bonferroni confidence intervals for standard deviations

grupo  N     Lower     StDev     Upper
    1  9  0,263406  0,422535  0,956864
    2  9  0,230361  0,369527  0,836822
    3  8  0,176634  0,290652  0,711843


Bartlett's Test (Normal Distribution)
Test statistic = 0,95; p-value = 0,622


Levene's Test (Any Continuous Distribution)
Test statistic = 0,74; p-value = 0,486
```

Teste de Bartlett (p=62,2%): p>5%, podemos considerar as variâncias iguais.

Teste de ANOVA

```
One-way ANOVA: tártaro versus grupo

Source  DF     SS     MS     F      P
grupo    2  1,805  0,902  6,67  0,005
Error   23  3,112  0,135
Total   25  4,917

S = 0,3678   R-Sq = 36,70%   R-Sq(adj) = 31,20%

                          Individual 95% CIs For Mean Based on
                          Pooled StDev
Level  N    Mean   StDev  ----+---------+---------+---------+-----
1      9  1,0889  0,4225                       (--------*--------)
2      9  0,7467  0,3695            (--------*-------)
3      8  0,4375  0,2907  (--------*--------)
                          ----+---------+---------+---------+-----
                            0,30      0,60      0,90      1,20

Pooled StDev = 0,3678
```

p=0,005=0,5%. Portanto, como p<5%, rejeitamos a hipótese nula de médias iguais

Comparações Múltiplas (testes post hoc). Quem é diferente de quem?

- Teste de Tukey (nível de significância para o conjunto de comparações)
- Fisher (nível de significância para cada comparação individual)
- Dunnett (Contra grupo controle; nível de significância para o conjunto de comparações)

Teste Post Hoc

```
Grouping Information Using Tukey Method

grupo  N    Mean  Grouping
1      9  1,0889  A
2      9  0,7467  A B
3      8  0,4375    B

Means that do not share a letter are significantly different.

Tukey 95% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of grupo

Individual confidence level = 98,01%

grupo = 1 subtracted from:
grupo    Lower   Center    Upper  --+---------+---------+---------+-------
2      -0,7763  -0,3422   0,0918        (--------*--------)
3      -1,0988  -0,6514  -0,2040  (--------*--------)
                                  --+---------+---------+---------+-------
                                  -1,00     -0,50      0,00      0,50

grupo = 2 subtracted from:
grupo    Lower   Center   Upper  --+---------+---------+---------+-------
3      -0,7566  -0,3092  0,1382        (--------*--------)
                                 --+---------+---------+---------+-------
                                 -1,00     -0,50      0,00      0,50
```

Tomada de decisão

- Pelo teste de ANOVA, há uma diferença significativa entre as médias ($p=0,005=0,5\%$).
- No teste de comparações múltiplas, foi identificada uma diferença entre o grupo 1 (controle) e o grupo 3 (HMP), indicando que o índice de cálculo é significativamente maior no grupo controle do que no grupo que recebeu HMP.

Referências

- Petrie A, Watson P. Statistics for Veterinary and Animal Science. Blackwell Science, Oxford, 1999.
- Chase W, Bown F. General Statistics. 2.ed., Wiley, New York, 1992.
- Shott S. Statistics for Health Professionals. Saunders, Philadelphia, 1990.