

# Física I IME

2º Semestre de 2015

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz Nagamine**

**E-mail:** [nagamine@if.usp.br](mailto:nagamine@if.usp.br)

**Fone:** 3091.6877

## Cinemática Rotacional

Neste tópico, trataremos da rotação em torno de um eixo fixo no espaço, ou em torno de um eixo que se move sem alterar sua direção no espaço.

### Velocidade angular e aceleração angular

Seja um corpo rígido de massa  $M$ , que gira em torno de um eixo fixo. Cada ponto deste corpo descreve um círculo, cujo raio  $r_i$  é a distância entre o ponto e o eixo de rotação.

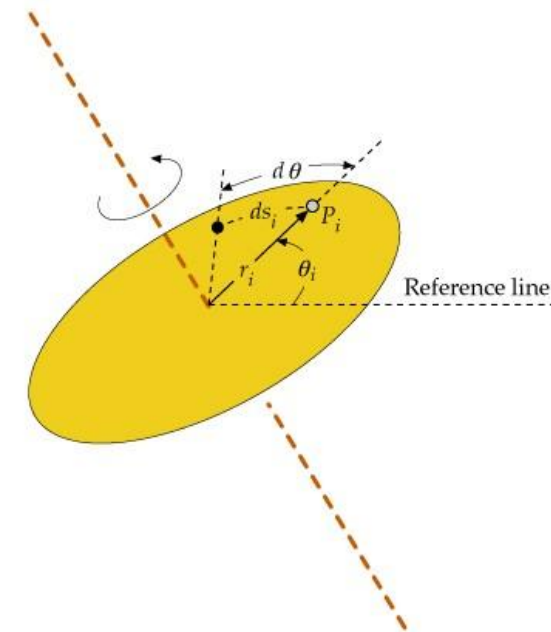
Quando o corpo gira de um ângulo  $d\theta$ , o ponto descreve um arco de comprimento  $dS_i$

$$dS_i = r_i d\theta$$

A taxa de variação do ângulo é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de velocidade angular  $\omega$ .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{1}{r_i} \frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i}$$



## Velocidade angular e aceleração angular

Analogamente, a taxa de variação da velocidade angular é a mesma para todas as posições no corpo e é chamada de aceleração angular  $\alpha$ .

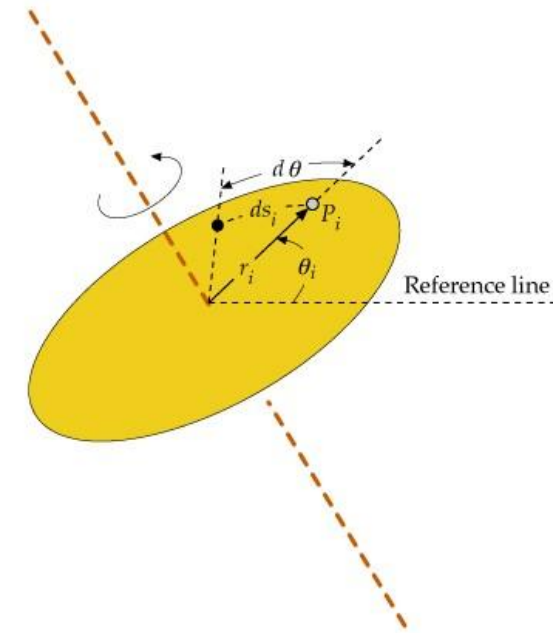
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para os valores médios temos:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Se  $\alpha$  é constante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{array} \right\} \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$



Um CD gira, do repouso a até 500 rpm, em 5,5 s. (a) Qual a aceleração angular suposta constante? (b) Quantas voltas o disco dá em 5,5 s? (c) Qual a distância percorrida por um ponto a 6,0 cm do centro, nestes 5,5 s?

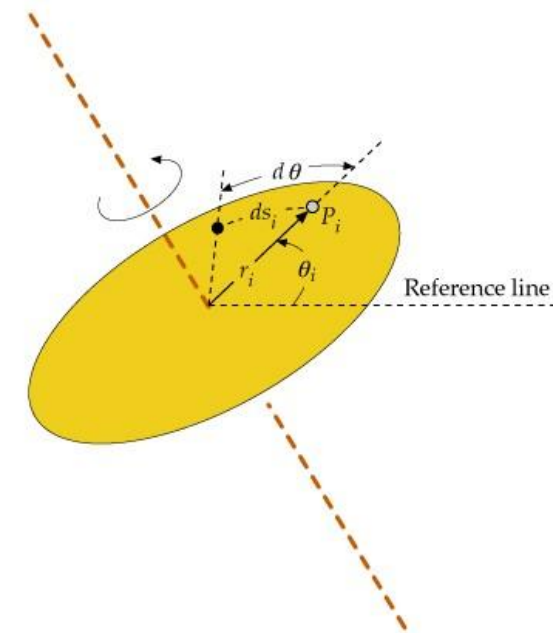
$$(a) \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \omega = 500 \text{ rpm} = 500 \cdot 2\pi / 60 = 52,36$$

$$52,36 = 0 + \alpha 5,5 \quad \alpha = 9,5 \text{ rad} / \text{s}^2$$

$$(b) \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2} 9,5 (5,5)^2 \quad \theta = 143,7 \text{ rad} \\ = 22,9 \text{ voltas}$$

$$(c) \quad \Delta S = r \cdot \Delta \theta = 0,06 \cdot 143,7 = 8,62 \text{ m}$$



## Acerações e velocidades angulares

Já vimos que:

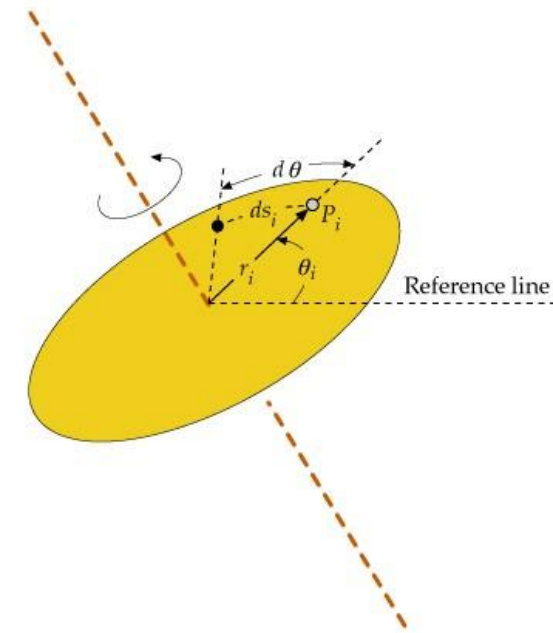
$$\omega = \frac{1}{r_i} \frac{dS_i}{dt} = \frac{v_i}{r_i} \quad v_i = r_i \omega$$

Analogamente, para a aceleração tangencial temos:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_t \frac{d\omega}{dt} \quad a_t = r \alpha$$

Mas, como o movimento é circular, existe uma aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_t} = \frac{(r_t \omega)^2}{r_t} \quad a_c = r_t \omega^2$$



## Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo.

Para a  $i^{\text{ésima}}$  partícula, de massa  $m_i$  e velocidade  $v_i$ , temos:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Somando sobre todas as partes, obtemos a energia cinética do corpo:

$$K = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i (m_i r_i^2)$$

Onde, o termo à direita recebe o nome de momento de inércia ( $I$ ) do corpo:

$$I = \sum_i (m_i r_i^2)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Um corpo consiste de 4 partículas pontuais, com massas  $m$ , ligadas por hastes sem massa, como na figura ao lado. O sistema gira com velocidade angular  $\omega$  em torno do centro do corpo. (a) Determine o momento de inércia do corpo. (b) Determine a energia cinética do corpo.

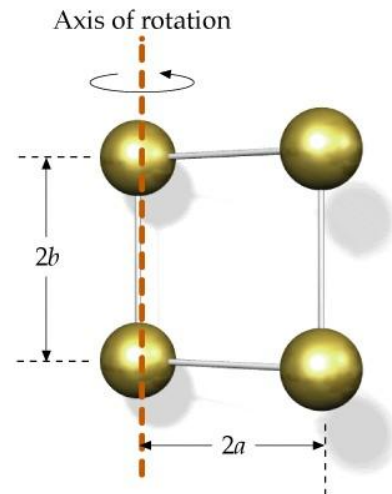
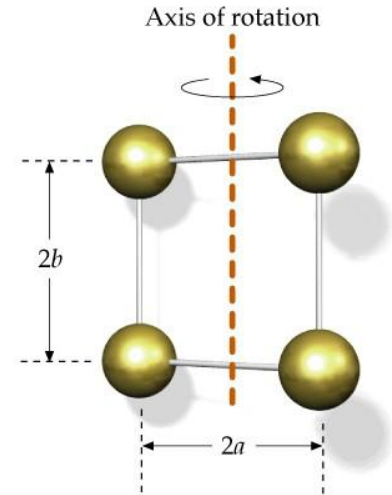
$$I = \sum_i (m_i r_i^2) \quad I = 4ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad K = 2ma^2 \omega^2$$

Repetir os cálculos para a nova configuração ao lado.

$$I = \sum_i (m_i r_i^2) \quad I = 2m(2a)^2 = 8ma^2$$

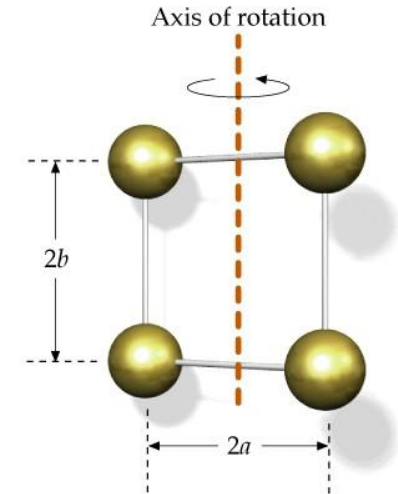
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad K = 4ma^2 \omega^2$$



## Cálculos do Momento de Inércia

Para sistemas discretos:

$$I = \sum_i (m_i r_i^2)$$



### Corpos contínuos

Se subdividirmos o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero, a somatória acima se transforma na integral:

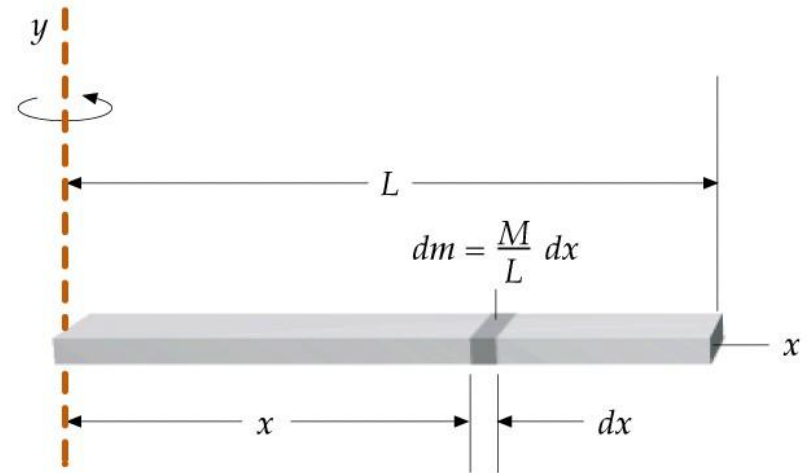
$$I = \int r^2 dm$$

Onde  $r$  é a distância ao eixo, de cada parcela  $dm$  do corpo.



Calcule o momento de inércia de uma barra fina de comprimento  $L$  e massa  $M$ , em relação ao eixo que passa por sua extremidade.

$$I = \int r^2 dm$$



Um pedaço  $dm$  da barra, situado na posição  $x$ , ocupa uma extensão  $dx$  da barra.

Considerando a densidade linear de massa  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{M}{L} \quad \longrightarrow \quad dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \quad I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

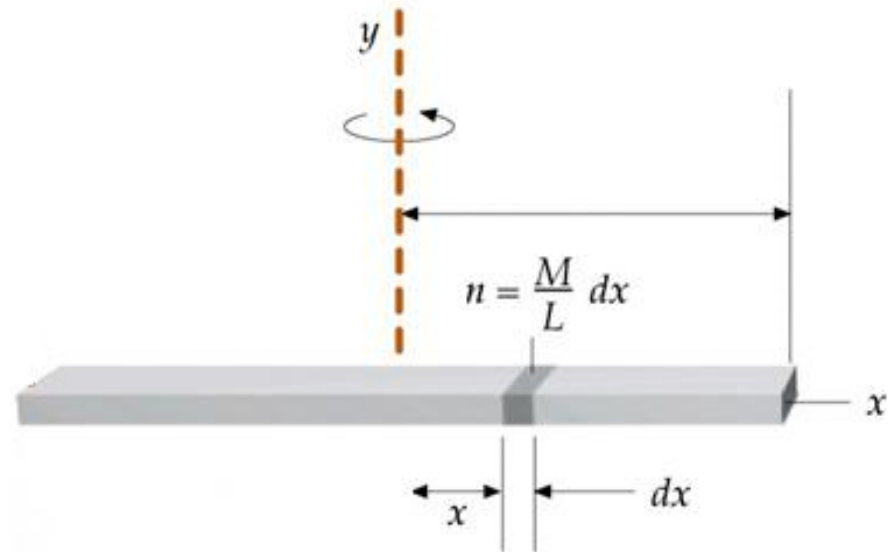
Repetir o cálculo para um eixo no centro da barra.

$$I = \int r^2 dm$$

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \left( \frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right) = \frac{M}{L} 2 \left( \frac{(L/2)^3}{3} \right) = \frac{ML^2}{12}$$

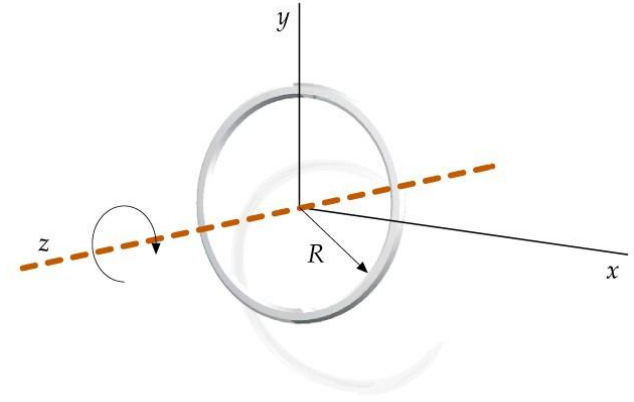


Calcule o momento de inércia de um anel circular de raio  $R$  e massa  $M$ , em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.

$$I = \int r^2 dm$$

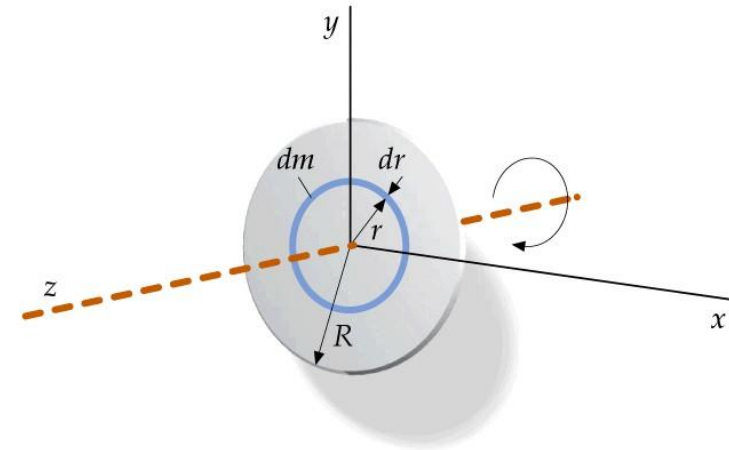
Todos os pedaços  $dm$  do anel, estão situados a uma mesma distância  $R$  do eixo.

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$



Calcule o momento de inércia de um disco homogêneo de raio  $R$  e massa  $M$ , em relação ao eixo que passa perpendicularmente por seu centro.

$$I = \int r^2 dm$$



Podemos subdividir o disco em uma série de anéis concêntricos.

Cada anel tem uma massa  $dm$ , raio  $r$  e espessura  $dr$ .

Considerando a densidade superficial de massa  $\sigma$ .

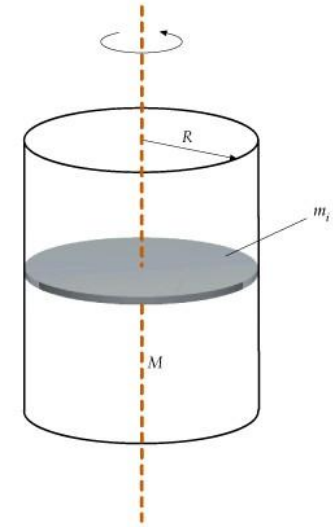
$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \quad \longrightarrow \quad dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{R^2} 2r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Calcule o momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de raio  $R$  e massa  $M$ , em relação ao seu eixo.

$$I = \int r^2 dm$$



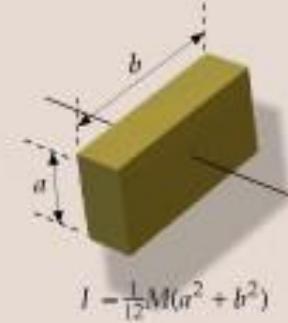
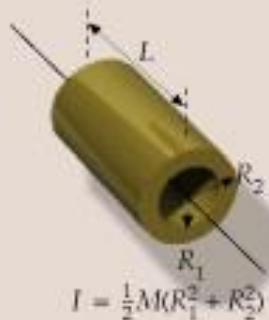
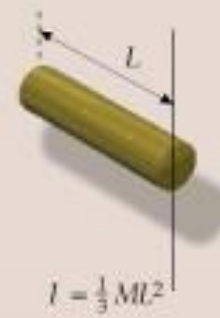
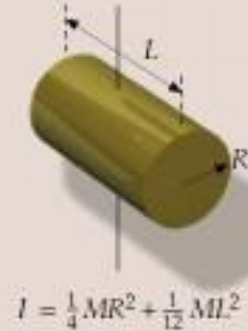
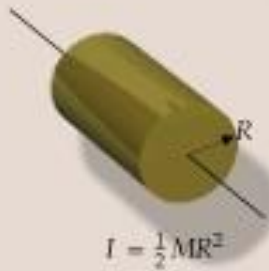
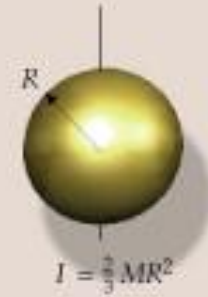
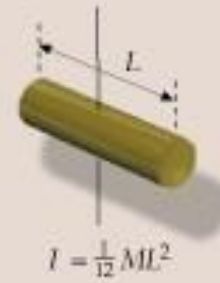
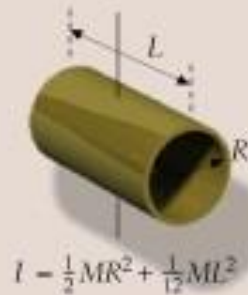
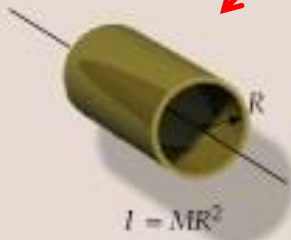
Podemos subdividir o cilindro em uma série de discos paralelos.

Como todos os discos são equivalentes, podemos considerar o momento de inércia do cilindro como igual ao dos discos.

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

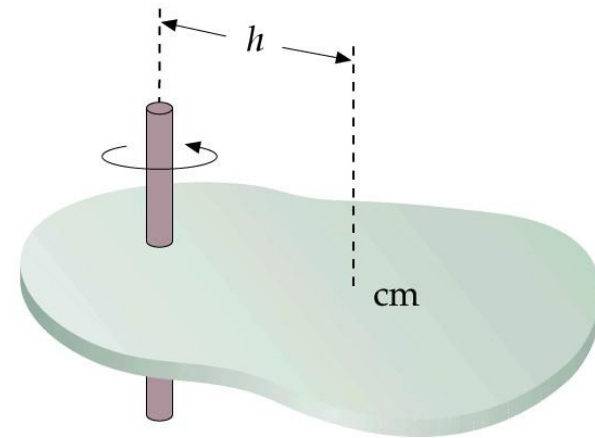
$$I = \int r^2 dm$$

**cascas**



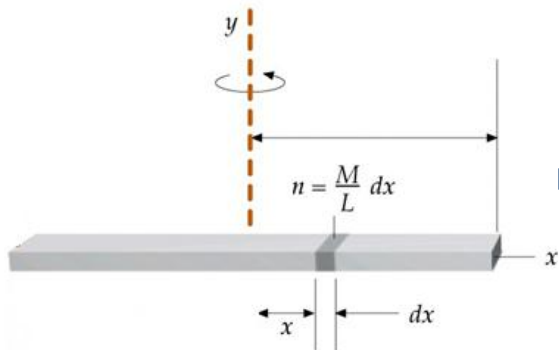
## Teorema dos Eixos Paralelos

Este teorema permite que se calcule o momento de inércia de um corpo de massa  $M$  em relação a um eixo qualquer, a partir do seu valor para o centro de massa, sabendo-se a distância  $h$  entre os dois eixos.

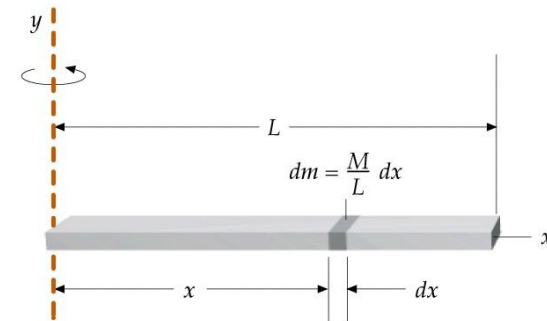


$$I = \int r^2 dm \quad \longrightarrow \quad I = I_{cm} + Mh^2$$

Exemplo:



$$I = I_{cm} + Mh^2$$



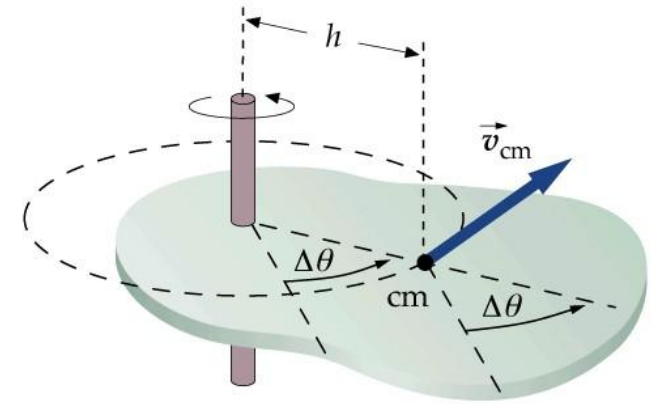
$$I = \frac{ML^2}{12}$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + M \left( \frac{L}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

## Demonstração do Teorema dos Eixos Paralelo

Vamos calcular a energia cinética de rotação para o eixo paralelo do corpo de massa  $M$  ao lado, quando girando com velocidade  $\omega$ .



$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Mas, já vimos que a energia cinética de um corpo pode ser escrita como a energia cinética de translação do centro de massa, mais a energia de rotação em relação ao centro de massa.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = K_{rot_{cm}} + K_{transl_{cm}} \longrightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Mas,  $v_{cm} = h\omega$

e  $\omega_{cm} = \omega$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M h^2 \omega^2$$

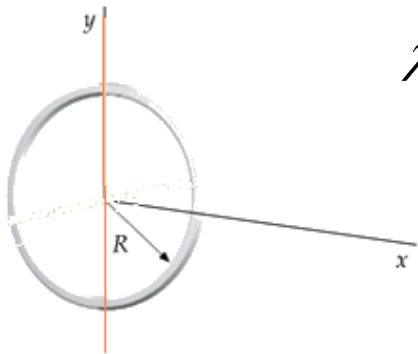
$$I = I_{cm} + M h^2$$



## Teorema dos Eixos Paralelos

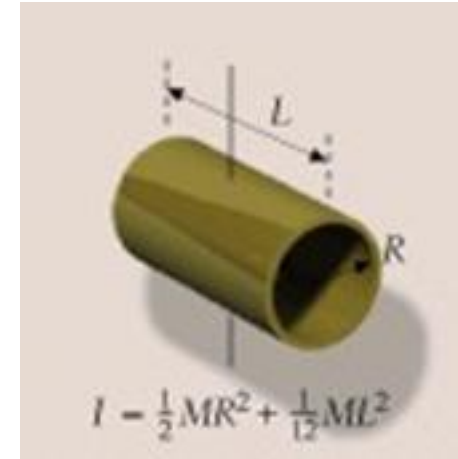
Vamos calcular o momento de inércia do corpo ao lado.

Mas inicialmente, calcularemos o momento de inércia de uma espira de massa  $m$  e raio  $R$ , através do eixo que passa por seu centro de massa.



$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \quad \longrightarrow \quad dm = \lambda dl = \frac{m}{2\pi R} R d\theta$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} (R \cos\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{2mR^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^2 d\theta \quad I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$$

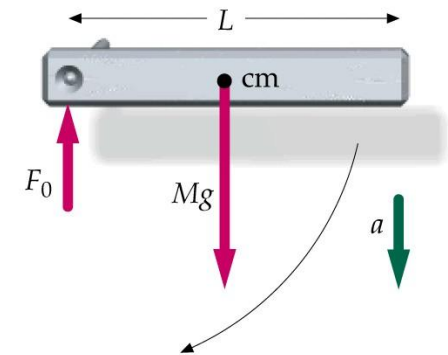


Mas, se esta espira estiver com seu eixo a uma distância  $l$  do eixo principal, ela contribuirá para o momento de inércia total, com

$$dI = \frac{dm \cdot R^2}{2} + dm \cdot l^2 \quad dm = \frac{M}{L} dl \quad dI = \frac{\frac{M}{L} dl \cdot R^2}{2} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M dl \cdot R^2}{2L} + \frac{M}{L} dl \cdot l^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{ML^2}{12}$$

Uma barra de comprimento  $L$  e massa  $M$ , articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine (a) a sua velocidade angular, na posição vertical, (b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste instante e (c) a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até uma posição vertical superior.



Considerando o sistema como sendo constituído pela barra, pivô e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad 0 = \frac{1}{2} I \omega^2 + Mgy_{cm} \quad 0 = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega^2 + Mg \left( -\frac{L}{2} \right) \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$F_0 - Mg = Ma_c = M \frac{L}{2} \omega^2 \quad F_0 = M \left( g + \frac{L}{2} \frac{3g}{L} \right) = \frac{5Mg}{2}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad \frac{1}{2} I \omega^2 + 0 = 0 + Mgy_{cm} \quad \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega^2 = Mg \frac{L}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Um objeto de massa  $m$  está suspenso por um fio de massa  $m_f$  que foi enrolado na polia, que tem raio  $R$  e massa  $m_p$ . Suponha que toda a massa da polia esteja em sua borda e que no instante inicial o corpo esteja em repouso e o fio enrolado. Determine qual a velocidade do corpo quando ele tiver caído uma distância  $d$ .

Considerando o sistema como sendo constituído pela corpo, polia e a Terra, temos conservação da energia mecânica, então

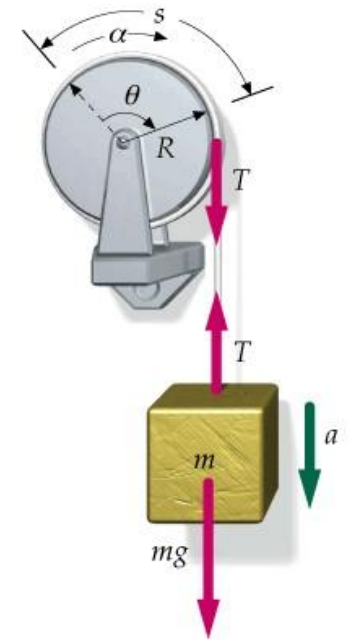
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_f v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mg(-d) + m_f^* g(-d/2)$$

$$I = m_p R^2$$

$$m_f^* = \frac{d}{L} m_f$$

$$v = \sqrt{\frac{(2mL + m_f d)gd}{(m_f + m + m_p)L}}$$



Já vimos a Segunda Lei de Newton, onde a resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas. Porém, quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa, temos um segundo efeito, que é a rotação do sistema. Esta rotação é acelerada. Assim, temos o equivalente à Segunda Lei de Newton, para a rotação.

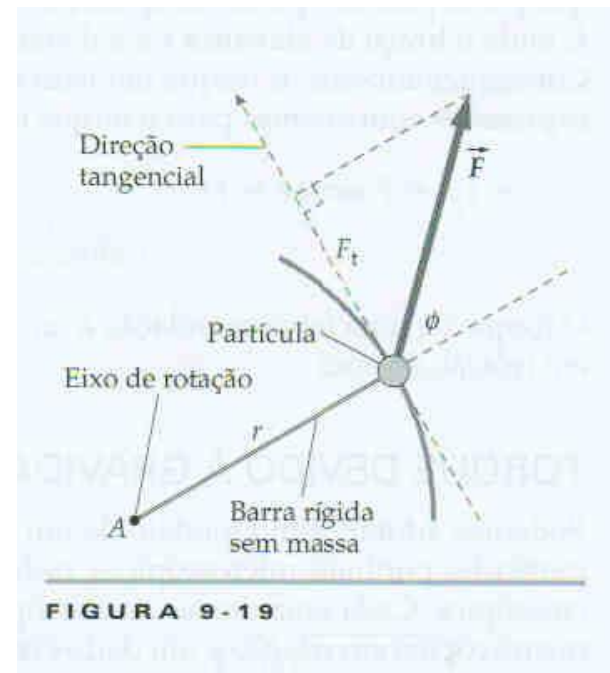
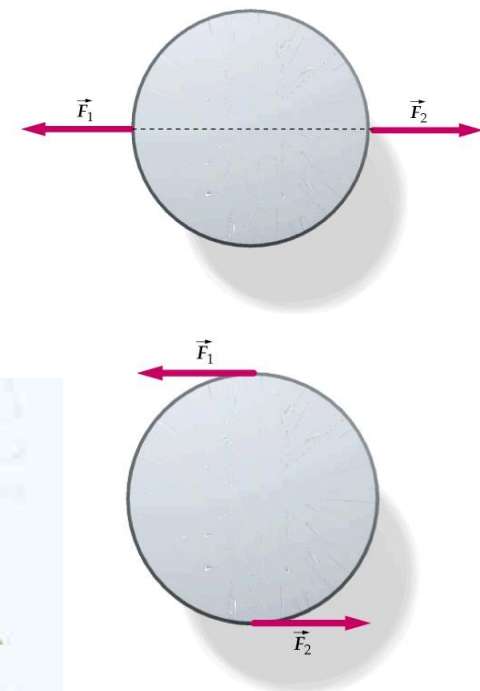
Considere uma partícula de massa  $m$ , presa a uma barra de comprimento  $r$ . Uma força  $F$  é aplicada à partícula, como na figura ao lado. Para a componente tangencial da força, temos:

$$F_t = ma_t \quad \text{Onde, } F_t = F \sin \Phi$$

Usando-se  $a_t = r\alpha$  e multiplicando a equação por  $r$ , temos:

$$rF_t = mr^2\alpha$$

O produto  $rF_t$  é o Torque  $\tau$  em relação ao eixo de rotação A



$$\tau = mr^2\alpha$$

Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.

$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$  Somando sobre todas as partículas do corpo, temos:

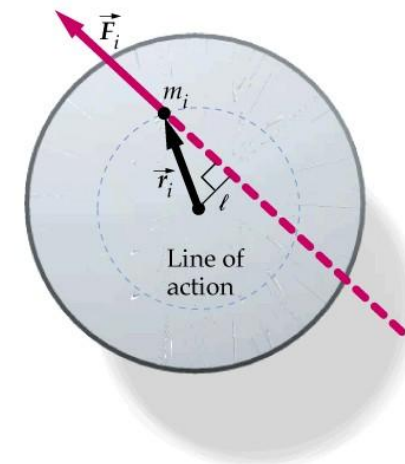
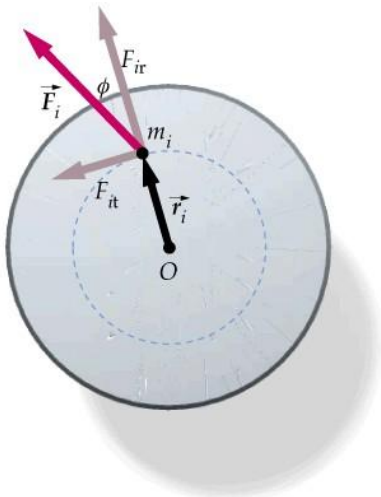
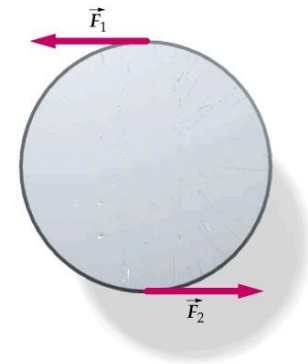
$$\sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = (\sum m_i r_i^2) \alpha = I \alpha$$

$\tau_{ext_{res}} = I \alpha$  Segunda Lei de Newton para a rotação

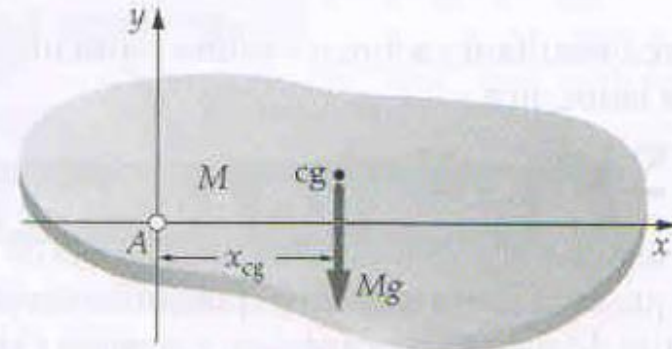
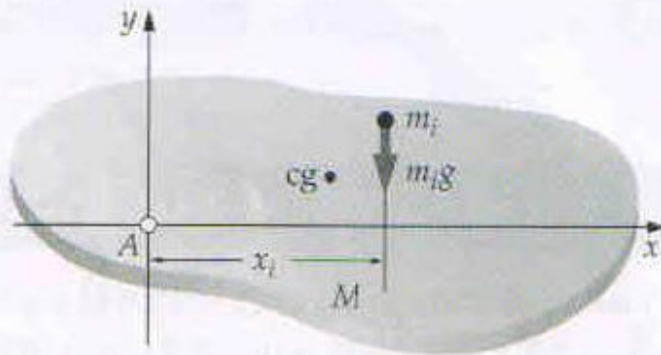
Para rotações, o que nos interessa são as componentes tangenciais da força

$$\tau = F_t r = F \sin \phi \cdot r = F r \sin \phi = F l$$

Onde,  $l$  é o “braço de alavanca”



Considere um corpo extenso de massa  $M$ , apoiado pelo eixo  $A$  e submetido à força gravitacional.



O torque sobre cada partícula constituinte será:

$$\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$$

O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = \left( \sum m_i x_i \right) g = M x_{cm} g = P x_{cm}$$

Uma bicicleta ergométrica possui uma roda com grande massa (2,4 kg) e raio  $R = 35$  cm. Aplica-se uma força de 18 N a uma distância de 7 cm do eixo da roda. Após 5 s, qual é a velocidade angular da roda?

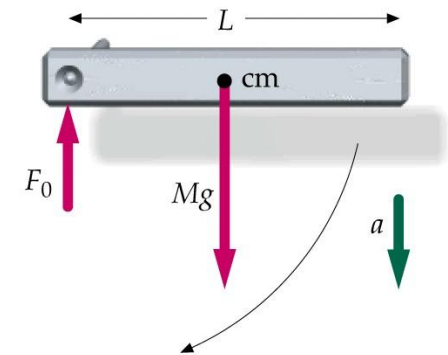
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t \\ \tau_{ext_{res}} = I\alpha = Fr \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{Fr}{MR^2}$$

$$\omega = \frac{Fr}{MR^2} t = 21 \text{ rad} / \text{s}$$



Uma barra de comprimento  $L$  e massa  $M$ , articulada em sua extremidade, é largada do repouso, da posição horizontal. Determine (a) a sua aceleração angular, quando largada e (b) a força exercida pelo pivô sobre a barra, neste instante.



O torque em relação ao eixo de rotação é dado apenas pela força peso.

$$\tau_{ext} = I\alpha = Px_{cm} \quad \alpha = \frac{Px_{cm}}{I}$$

$$\alpha = \frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$F_{ext} = Ma_{cm}$$

$$Mg - F_0 = Mx_{cm}\alpha$$

$$F_0 = M(g - x_{cm}\alpha) = Mg/4$$



Um objeto de massa  $m$  está suspenso por um fio leve que foi enrolado na polia com momento de inércia  $I$  e raio  $R$ . A polia é largada do repouso. Determine a tensão no fio e a aceleração do objeto.

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à polia (rotação) e ao objeto. (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\tau_{ext} = I\alpha = TR \quad \text{Com} \quad a_t = R\alpha$$

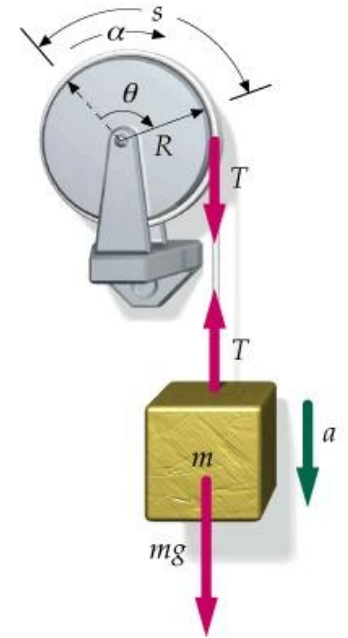
$$mg - T = ma_t$$

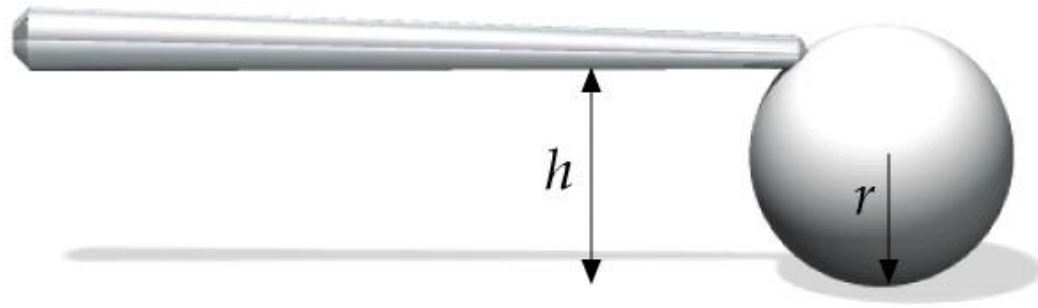
$$\frac{mg - T}{m} = R \frac{TR}{I}$$

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2 / I)}$$

$$a_t = \frac{mg - T}{m}$$

$$a_t = \frac{g}{1 + (I / mR^2)}$$





Um taco atinge uma bola de bilhar em um ponto a uma distância  $d$  acima do centro da bola. Determine o valor de  $d$  para que a bola role, sem deslizar.

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton à bola (rotação e translação). (o peso e a normal na polia, não geram torque)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ext} = I\alpha = Fd \\ F = ma_{cm} \end{array} \right.$$

Com

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$\frac{F}{m} = R \frac{Fd}{I}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{(2/5)mR^2}{mR}$$

$$d = \frac{I}{mR} = \frac{2R}{5}$$