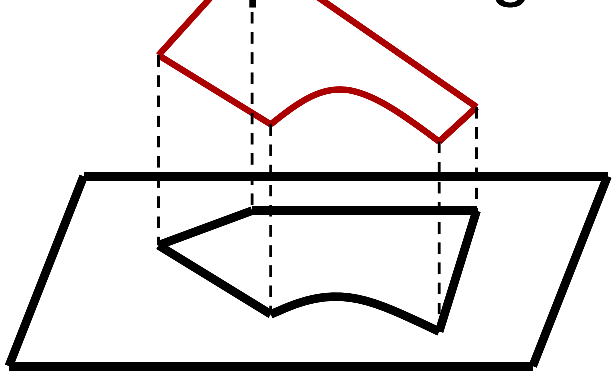
Cálculo de Áreas

Avaliação de Áreas

A avaliação de áreas é fundamental para planejamentos de engenharia, agricultura, loteamentos, limites de preservação ambiental, levantamentos cadastrais para compra e venda, partilha, escrituras, etc.

As **áreas topográficas** são **projeções horizontais** das obras projetadas e executadas pela engenharia.



Avaliação de Áreas

Processos de Cálculo:

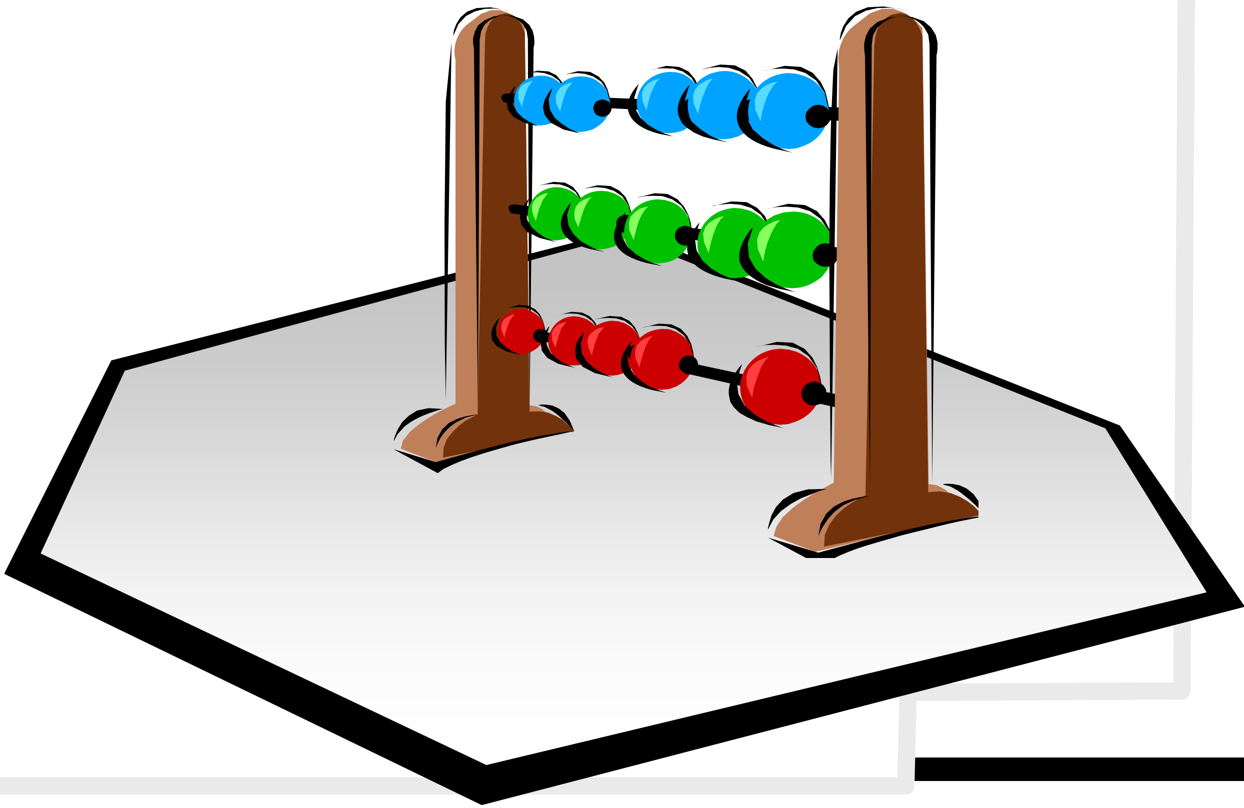
- analíticos;
- computacionais;
- gráficos;
- mecânicos;
- mistos

Avaliação de Áreas

Processos Analíticos

- foram os primeiros métodos desenvolvidos para o cálculo de área de poligonais, sendo baseados em fórmulas matemáticas, limitantes da figura.

- Fórmula de Gauss
- Método de Bezout
- Método de Poncelet
- Método de Simpson



Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

(Áreas delimitadas por poligonais regulares: triângulos, trapézios, etc)

- baseia-se na soma e subtração da área de trapézios formados pelos vértices e projeções sobre os eixos N, E.

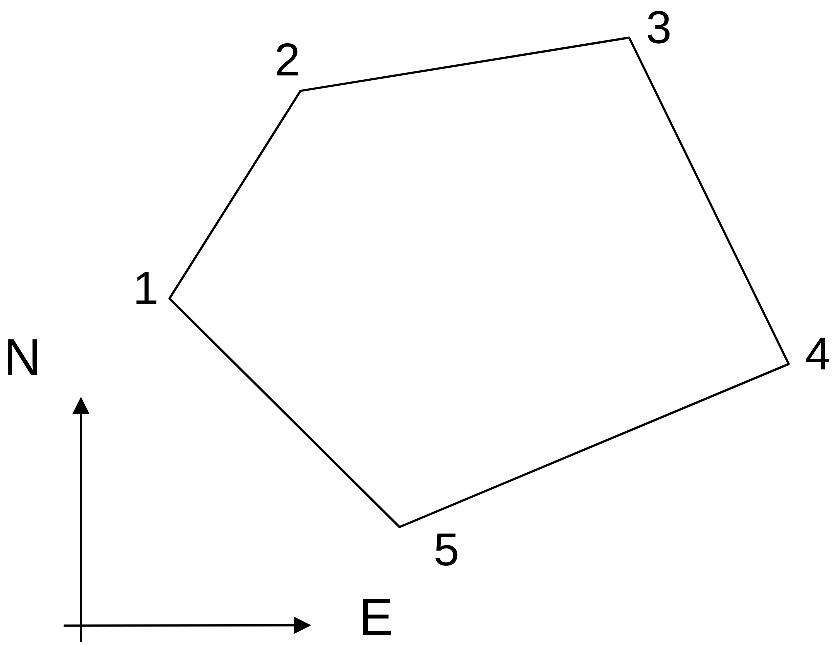
- essa operação pode ser expressa por diferentes equações, como a equação a seguir, que utiliza a propriedade distributiva.

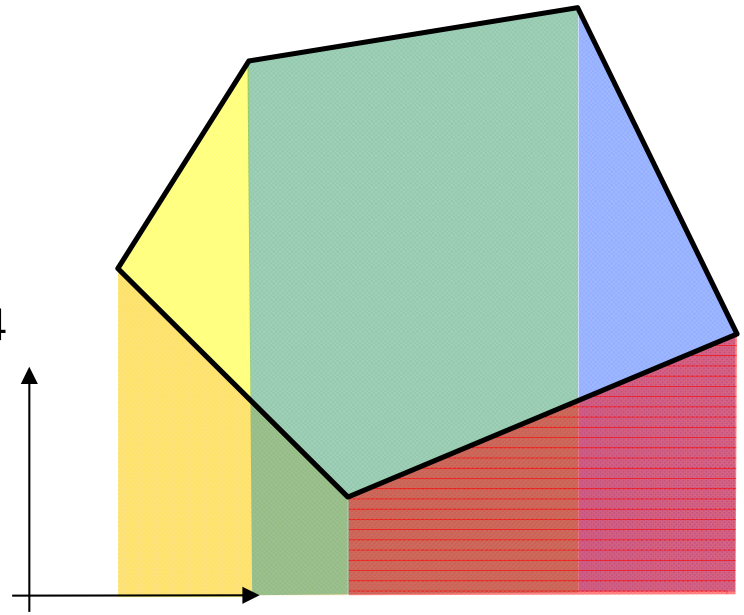
$$S = 0,5 \times \left(\sum_{i=1}^{n} N_i \times E_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} E_i \times N_{i+1} \right)$$

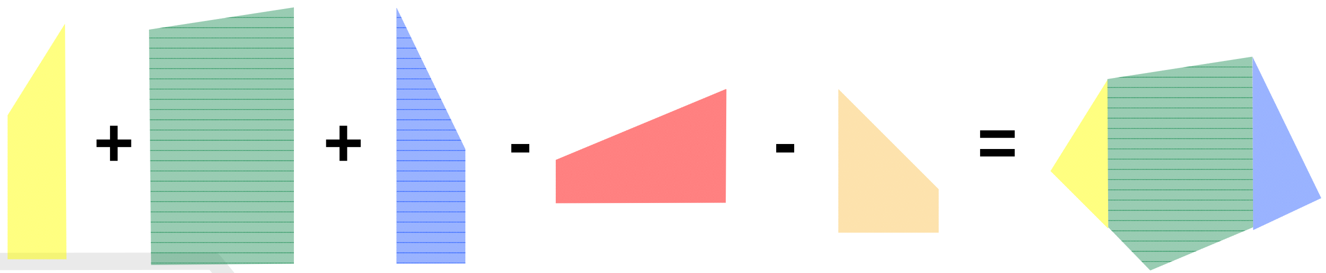
Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

Exemplo: Base dos trapézios no eixo “E”



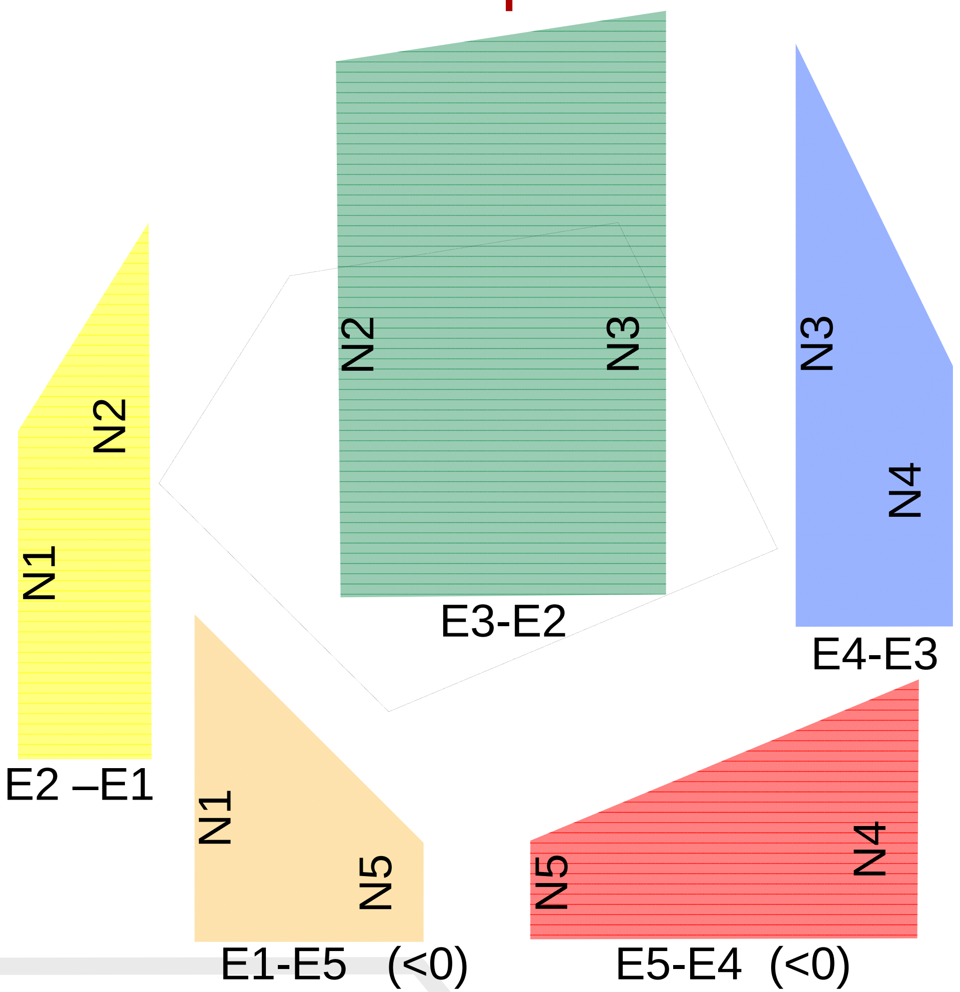




Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

Exemplo: Base dos trapézios no eixo “E”



S = 0,5 x [(E2-E1) x (N1+N2)
+ (E3-E2) x (N3+N2)
+ (E4-E3) x (N4+N3)
+ (E5-E4) x (N5+N4)
+ (E1-E5) x (N1+N5)]

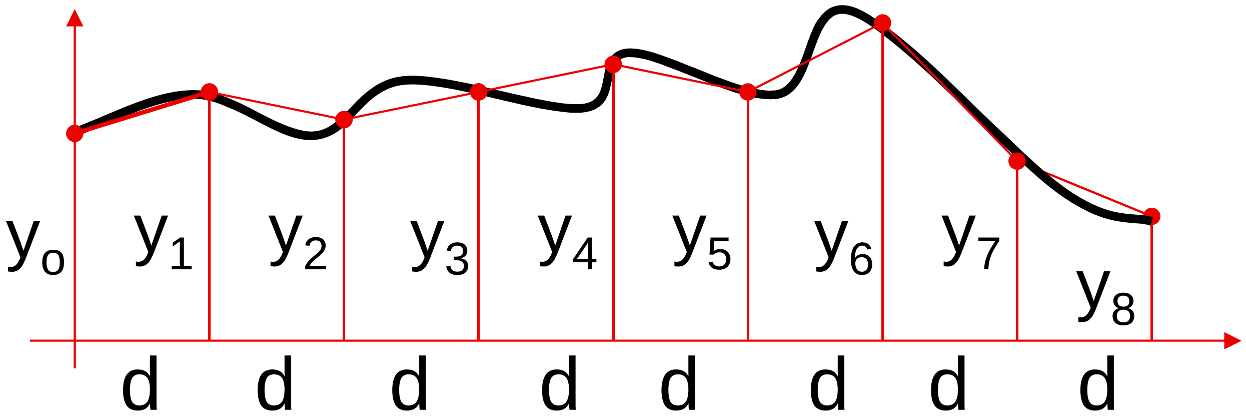
(uma das formas
da fórmula de Gauss)

Processos Analíticos

MÉTODO DE BEZOUT

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Para n qualquer (par ou ímpar) esse método interpreta a curva como uma série de trapézios de altura **d**.



$$S = d \times \left(\frac{y_o + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Processos Analíticos

MÉTODO DE PONCELET

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Para n par, interpreta a curva como uma série de trapézios de altura **2d**.

$$S = d \times \left(2 \times \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{(y_o + y_n) - (y_1 + y_{n-1})}{4} \right)$$

Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Para n par, interpreta a curva como uma série de trechos de parábola de base **2d,** e calcula-se a área por integração.

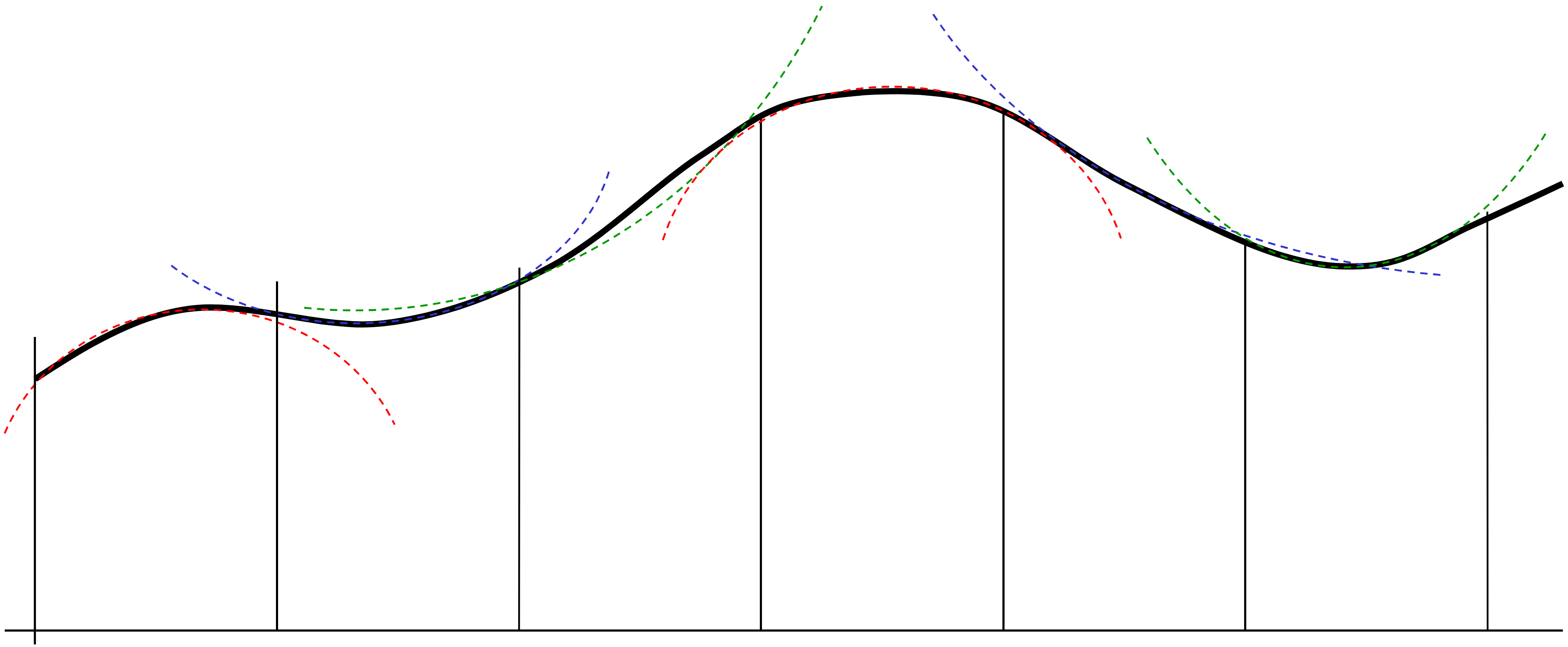
$$S = \frac{d}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \cdot \sum y_p + 4 \cdot \sum y_i \right)$$

onde: $\sum y_p = y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2}$

$\sum y_i = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}$

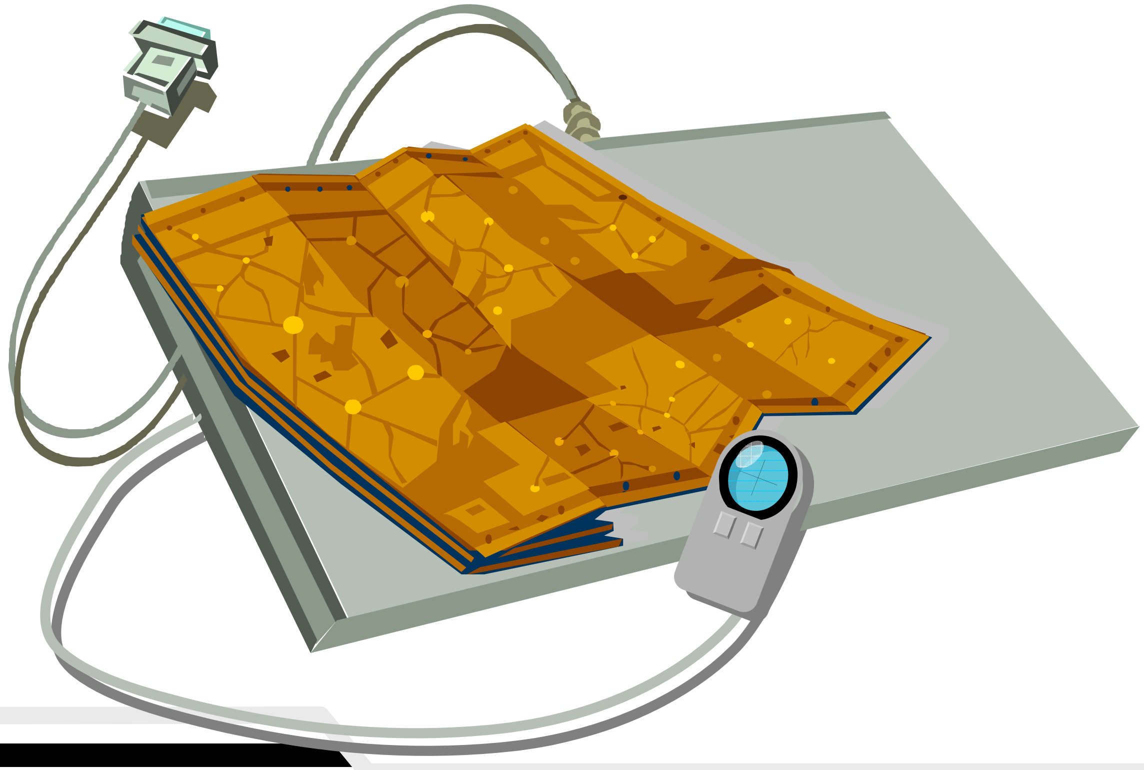
Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON



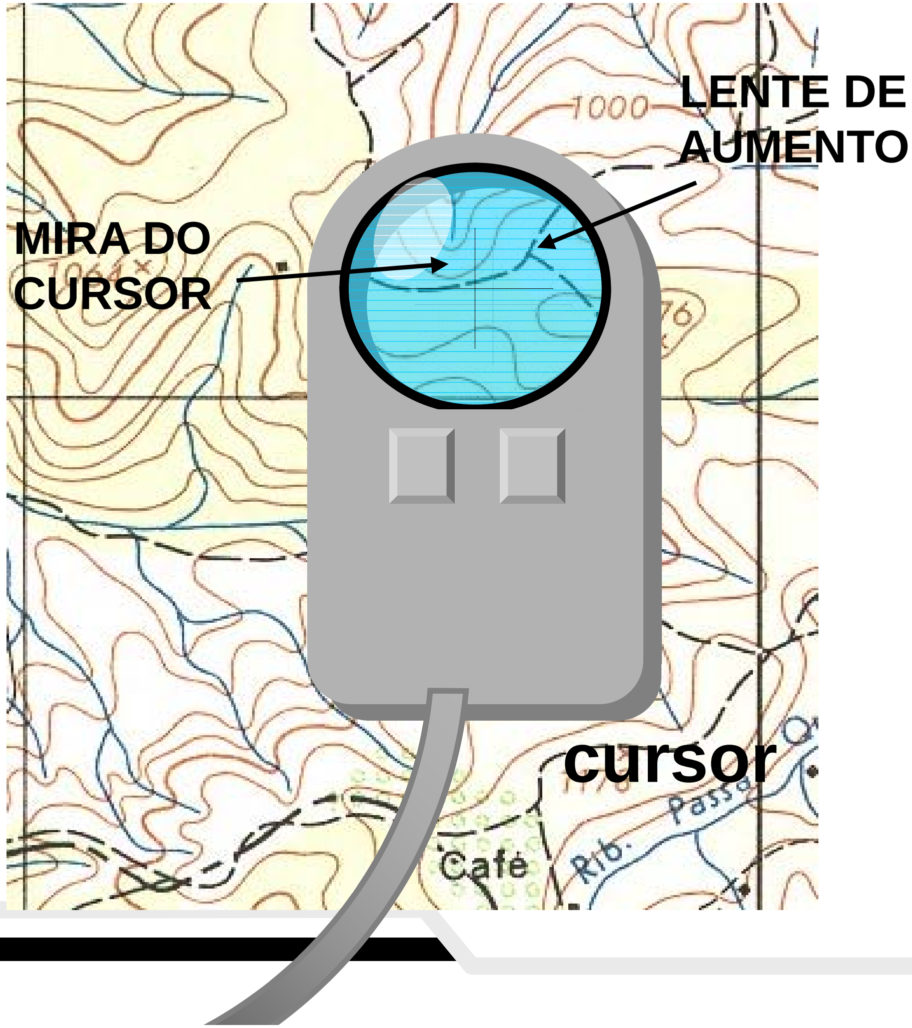
Processos Computacionais

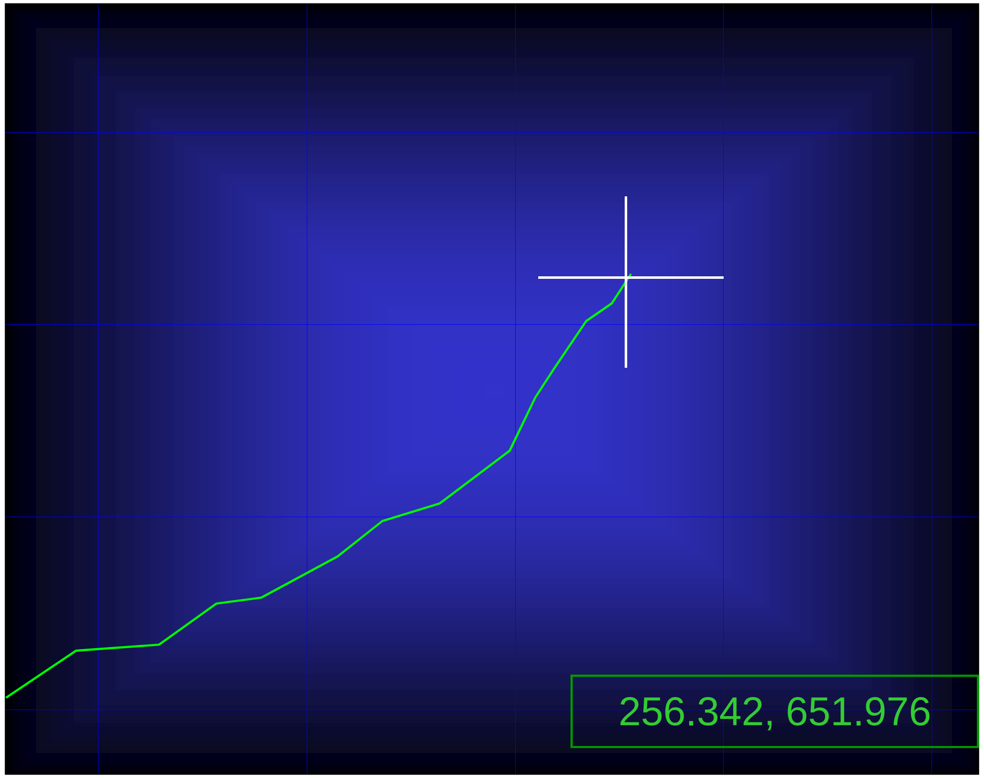
A partir de uma mesa digitalizadora acoplada a um computador que disponha de um editor de desenho (AutoCAD ou similar), fornecem-se as coordenadas (x,y) de pelo menos dois pontos. O cursor passa a fornecer coordenadas reais.



Processos Computacionais

O programa utiliza a **fórmula de Gauss**, já que o contorno da figura é na realidade uma poligonal de muitos lados.





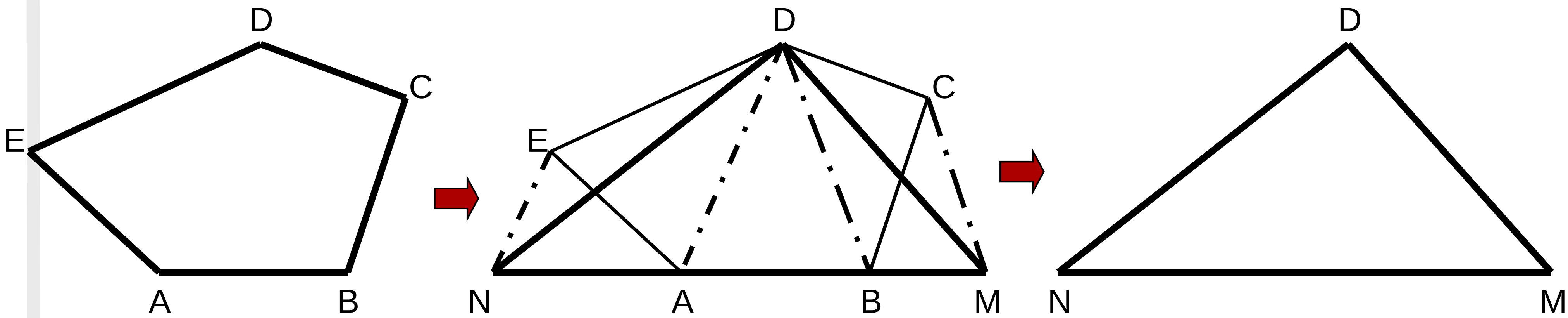
Processos Gráficos

- Transformação Geométrica
- Faixas de Igual Espessura
- Divisão de Quadrículas
- Figuras Geométricas Equivalentes

Processos Gráficos

TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

Consiste em transformar as poligonais regulares em um triângulo de área equivalente.



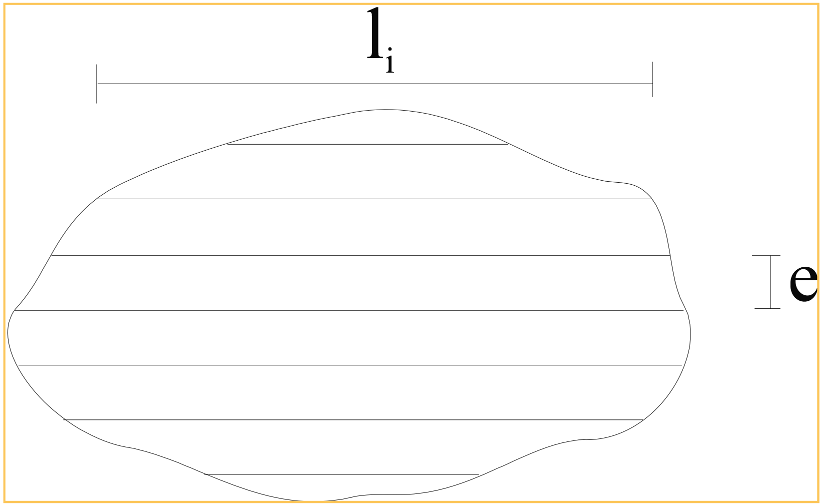
Processos Gráficos

FAIXAS DE IGUAL ESPESSURA

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em efetuar a divisão da figura em faixas de espessura constante (e), medindo-se as larguras (l_i) das mesmas.

$$S = e \cdot \sum_i l_i$$



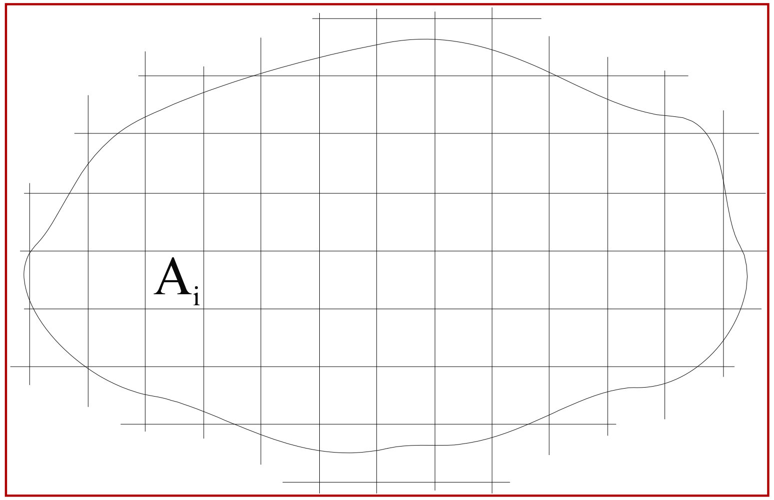
Processos Gráficos

DIVISÃO EM QUADRÍCULAS

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste na contagem direta dos quadrados multiplicados pela área deles (papel milimetrado poderá ser usado para facilitar a tarefa).

$$S = \sum_i A_i$$



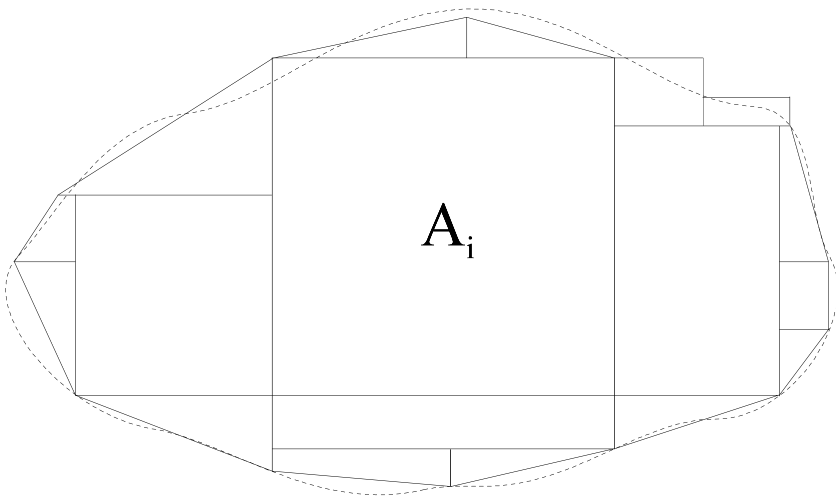
Processos Gráficos

FIGURAS GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em dividir a área em figuras geométricas equivalentes: retângulos, triângulos e trapézios, de modo a compensar as áreas que ficaram dentro e fora da figura geométrica.

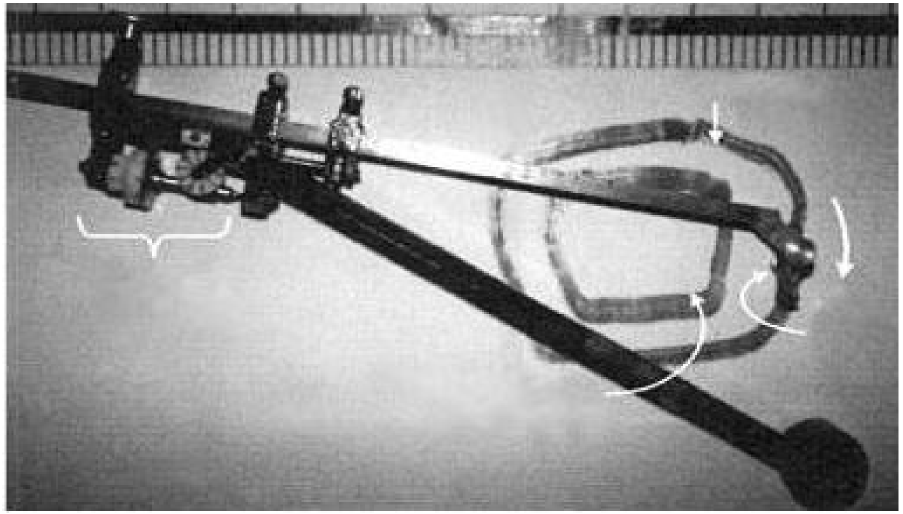
$$S = \sum_i A_i$$



Processo Mecânico

PLANÍMETRO

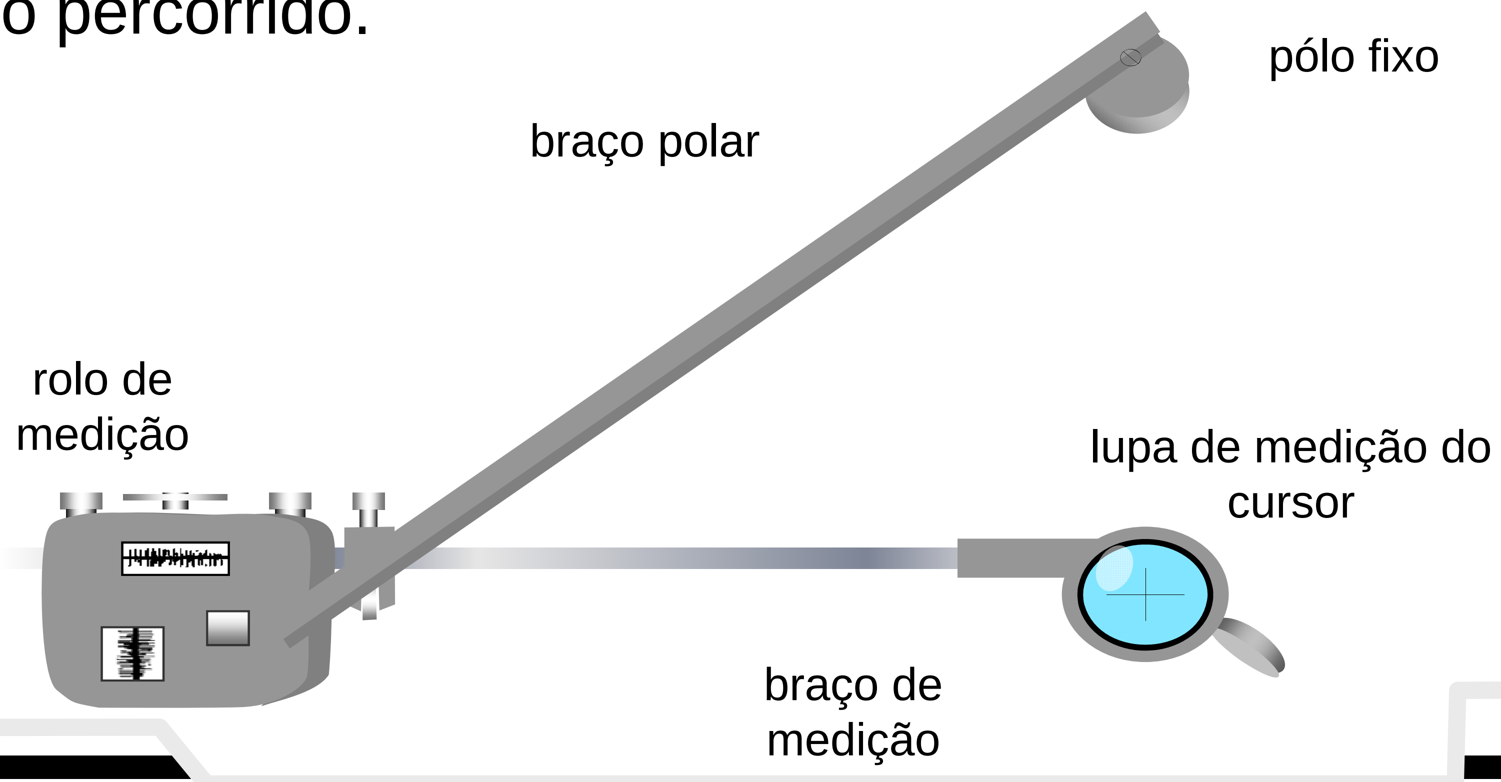
O planímetro é um equipamento que possui dois braços articulados com um pólo, que deve permanecer fixo, numa extremidade, e um cursor na outra, este devendo percorrer todo o contorno da área até retornar ao ponto inicial.



Processo Mecânico

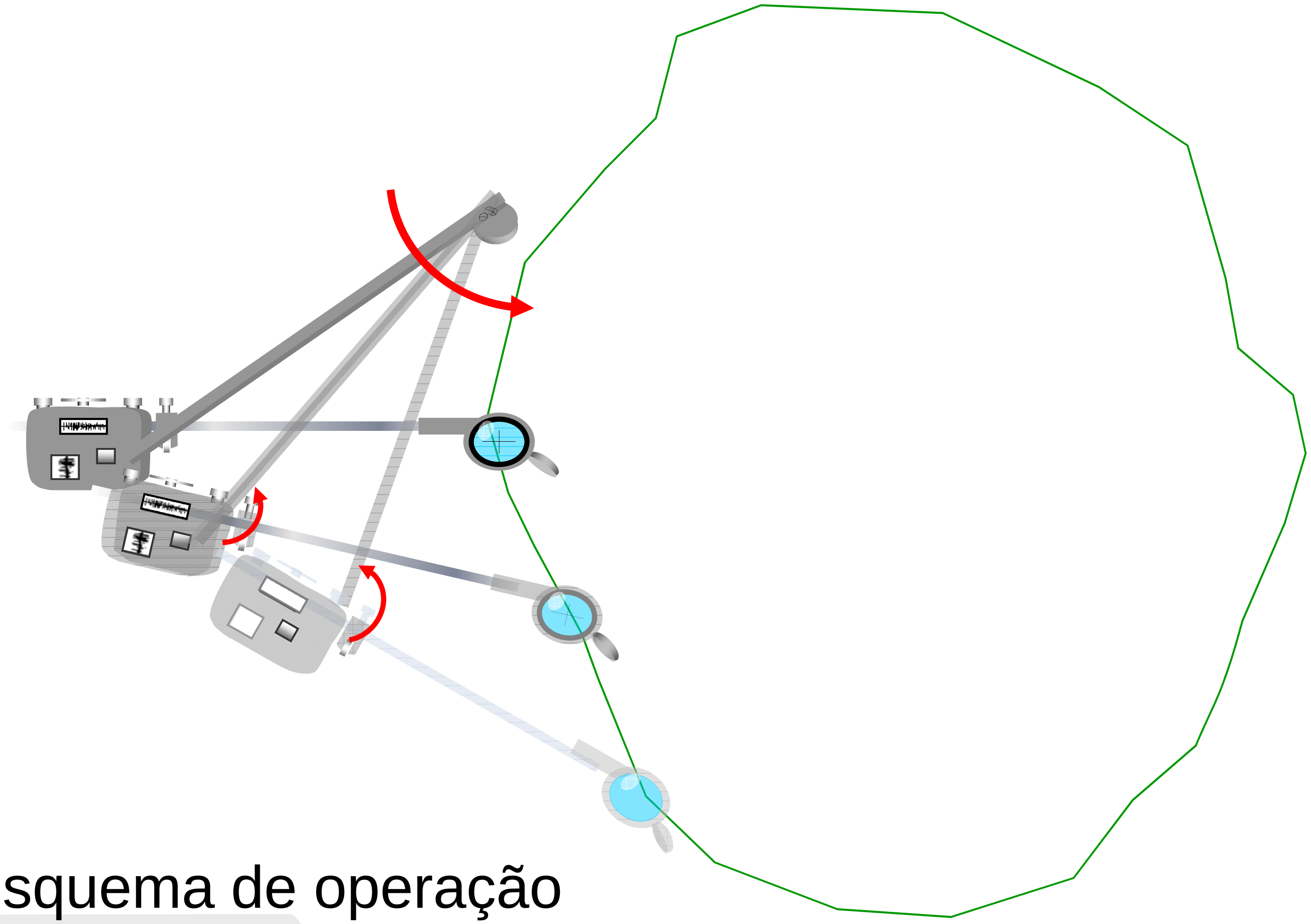
PLANÍMETRO

Um tambor giratório no mesmo braço do cursor, situado na extremidade oposta, faz girar um ponteiro sobre o círculo de leitura. Pode-se demonstrar que o giro do tambor, e portanto a diferença de leituras, é proporcional à área envolvida pelo contorno percorrido.



Processo Mecânico

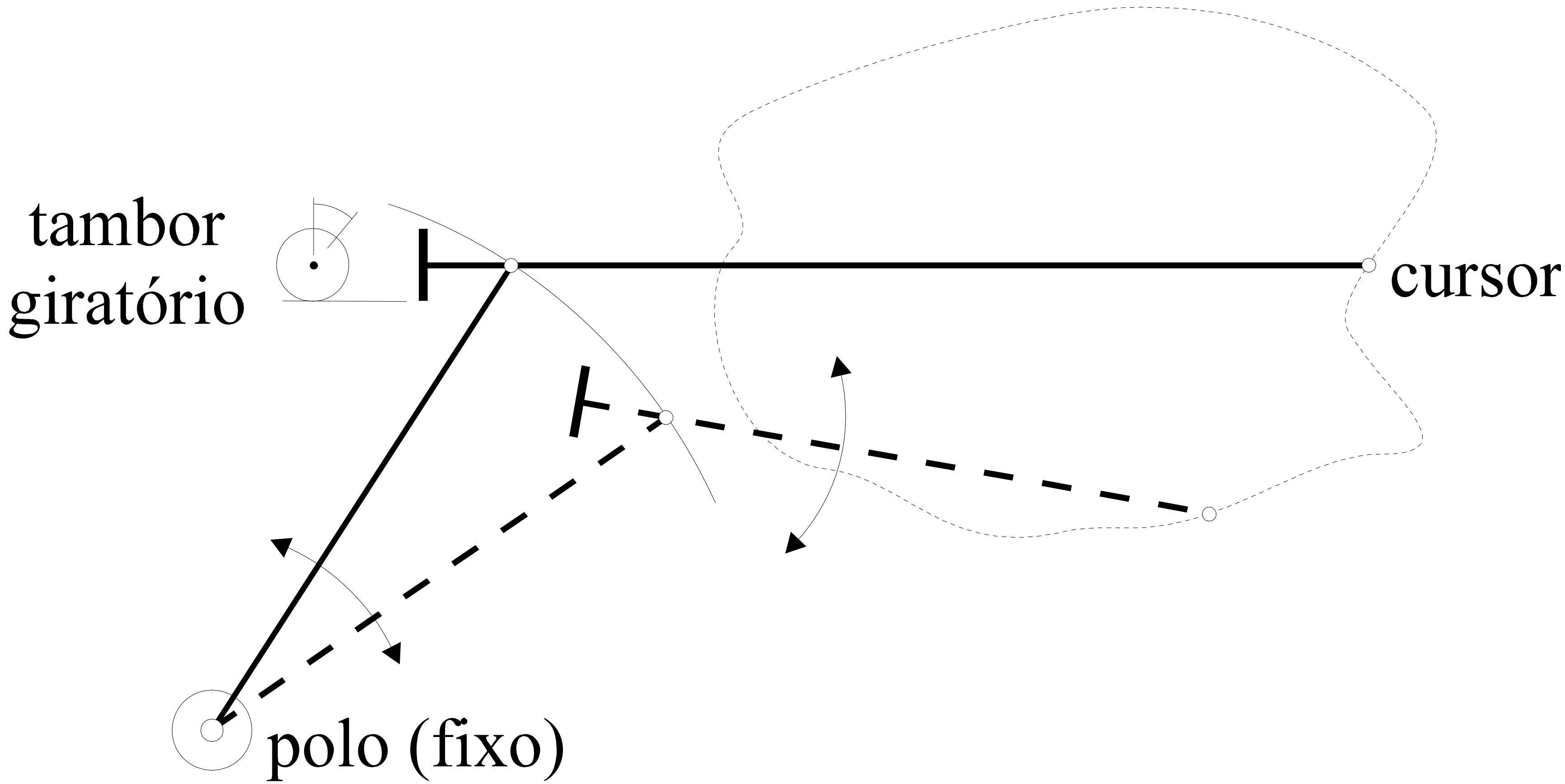
PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO

$$S = k \cdot (L_f - L_i)$$

S – área
Lf – leitura final
Li – leitura inicial
k – constante do aparelho

Para determinar o valor de k, sugere-se planimetrar n vezes uma área S conhecida.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Dada a poligonal fechada ABCDEA, determinar sua área pelo método de Gauss

Solução

vertice	coordenadas (m)		$N_i \cdot E_{i+1}$	$N_{i+1} \cdot E_i$
	N	E		
A	200,00	200,00	-	58728,00
B	293,64	260,78	52156,00	110484,66
C	423,67	239,90	70444,24	91063,64
D	379,59	149,85	63486,95	43682,77
E	291,51	130,21	49426,41	26042,00
A	200,00	200,00	58302,00	-
		TOTAL	293815,60	330001,07

2.S = (293.815,60 - 330.001,07) = 36.185,47 m2

S = 18.092, 74 m2

Obs.:

1) deve-se procurar que as coordenadas (NE) de todos os vértices sejam positivas. Se for o caso somando uma constante adequada a todas elas;

2) deve-se efetuar a diferença entre as duas somatórias, tomando-se ao final o módulo e dividindo por dois para obter a área.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Supondo que uma superfície extra-poligonal tenha sido dividida em segmentos com as alturas relacionadas abaixo e sendo d = 2,0 metros o espaçamento, calcular a área desse trecho pelos três métodos (fórmulas) apresentados.

DADOS:

$y0 = 3{,}0$ m	$y5 = 2{,}6$ m
$y1 = 3{,}5$ m	$y6 = 2{,}4$ m
$y2 = 3{,}8$ m	$y7 = 2{,}0$ m
$y3 = 3{,}2$ m	$y8 = 1{,}8$ m
$y4 = 2{,}6$ m	

a) Fórmula de Bezout

$$\sum y = 3{,}5 + 3{,}8 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}6 + 2{,}4 + 2{,}0 = 20{,}1 \text{ m}$$

$$S = 2{,}0 \cdot \left(20{,}1 + \frac{3{,}0 + 1{,}8}{2}\right) = 45{,}00 \text{ m}^2$$

b) Fórmula de Poncelet

$$\sum y_i = 3{,}5 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 = 11{,}3 \text{ m}$$

$$S = 2{,}0 \cdot \left(2 \cdot 11{,}3 + \frac{(3{,}0 + 1{,}8) - (3{,}5 + 2{,}0)}{4}\right) = 44{,}85 \text{ m}^2$$

c) Fórmula de Simpson

$$\sum y_p = 3{,}8 + 2{,}6 + 2{,}4 = 8{,}8 \text{ m}$$

$$\sum y_i = 3{,}5 + 3{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 = 11{,}3 \text{ m}$$

$$S = \frac{2{,}0}{3} \cdot (3{,}0 + 1{,}8 + 2 \cdot 8{,}8 + 4 \cdot 11{,}3) = 45{,}07 \text{ m}^2$$

Como se pode ver, as fórmulas chegam a valores muito semelhantes: no caso mais desfavorável a diferença é menor que 0,5%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

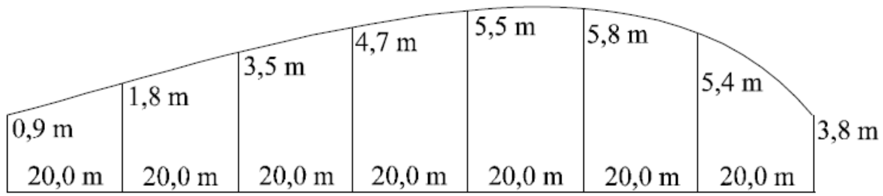
1. Transformar esquematicamente a superfície de um polígono de 7 lados qualquer, na de um triângulo de mesma área, utilizando o processo de redução ou equivalência geométrica.

2. Calcule a área da poligonal fornecida abaixo, através do método analítico. Obs.: não esqueça de repetir, ao final, a coordenada do primeiro vértice.

vertice	coordenadas		produtos	
	N	E	$N_i \cdot E_{i+1}$	$E_i \cdot N_{i+1}$
1	10,00	30,00		
2	27,53	8,54		
3	55,01	6,03		
4	79,47	8,49		
5	77,54	45,04		
6	81,61	77,98		
7	42,52	67,48		
8	16,08	77,93		
		somas		
		diferença		
		área calculada		

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3. Calcular a área do desenho abaixo reproduzido, utilizando os métodos de Bezout, Simpson e Poncelet.



4. Calcular a área do polígono de 5 lados, cujas coordenadas estão indicadas abaixo, através dos processos analíticos (fórmula de Gauss e de redução – equivalência geométrica).

PONTOS	COORDENADAS	
	N	E
A	22	3
B	22	7
C	24	9
D	27	5
E	25	2