4. Resolução Numérica de Equações (Zero de Funções)

4.1 Introdução

No exemplo usado na introdução desta apostila, vimos que ao tentar calcularmos a corrente elétrica de um circuito simples contendo apenas uma bateria, um resistor e um diodo, já nos deparamos com um problema matemático de difícil solução. Esse problema corresponde ao cálculo do valor da corrente *i* que satisfaz a equação

$$V - R \cdot i - \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{i}{I_s} + 1\right) = 0 \tag{4.1}$$

Em outras palavras, precisamos resolver ou encontrar o **zero** da função acima.

Neste capítulo iniciaremos o estudo de métodos numéricos que nos permitirão resolver problemas como esse.

4.2 Zeros ou Raízes de Funções

Dada uma função $f(x)$, dizemos que α é raiz, ou zero de f se e somente $f(\alpha)=0$.

Graficamente, os zeros de uma função $f(x)$ correspondem aos valores de x em que a função intercepta o eixo horizontal do gráfico, como mostrado na figura 4.1.

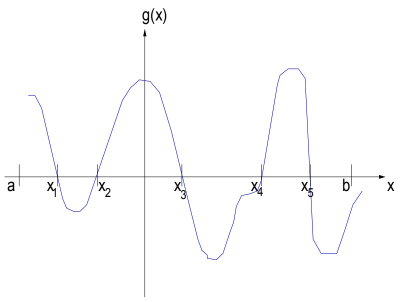


Figura 4.1 - Interpretação gráfica do zero de uma função.

A função $g(x)$ da figura 4.1 tem 5 raízes no intervalo $[a,b]$: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

As raízes de uma função podem ser encontradas analiticamente, ou seja, resolvendo a equação *f(x)=0* de maneira exata, como mostrado nos exemplos a seguir:

1–) $f(x) = x - 3$

$x = 3$ é raíz de $f(x)$ pois :

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2–) $g(x) = \frac{8}{3}x - 4$

$\frac{8}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ é a raíz de $g(x)$ pois :

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{3}.\frac{3}{2} - 4 = 0$

3–) $h(x) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

tanto $x = 2$ quanto $x = 3$ são soluções de $h(x)$ pois :

$h(3) = 3^2 - 5.3 + 6$ $\qquad$ $h(2) = 2^2 - 5.2 + 6$

$h(3) = 15 - 15 = 0$ $\qquad$ $h(2) = 10 - 10 = 0$

Porém, nem sempre é possível se encontrar analiticamente a raiz de uma função, como nos casos a seguir:

1–) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

2–) $g(x) = \text{sen}(x) + e^x$

3–) $h(x) = x + \ln(x)$

Nestes casos precisamos de um método numérico para encontrar ***uma estimativa*** para a raiz da função estudada, ou seja, um valor tão aproximado quando se deseje.

Tais métodos devem envolver as seguintes etapas:

(a) Determinação de um intervalo em x que contenha pelo menos uma raiz da função $f(x)$, ou seja, isolamento das raízes;

(b) Calculo da raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.

4.3 Processos Iterativos

Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos. Como o próprio nome já diz (consulte um dicionário para verificar o significado de *iterativo*), esses processos se caracterizam pela **repetição** de uma determinada operação. A idéia nesse tipo de processo é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou **iteração** um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. E, a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Alguns aspectos comuns a qualquer processo iterativo, são:

- ✓ **Estimativa inicial**: como um processo iterativo se caracteriza pela utilização do resultado da iteração anterior para o cálculo seguinte, a fim de se iniciar um processo iterativo, é preciso que se tenha uma estimativa inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser conseguida de diferentes formas, conforme o problema que se deseja resolver;
- ✓ **Convergência**: a fim de se obter um resultado próximo do resultado real, é preciso que a cada passo ou iteração, o resultado esteja mais próximo daquele esperado, isto é, é preciso que o método **convirja** para o resultado real. Essa convergência nem sempre é garantida em um processo numérico. Portanto, é muito importante se estar atento a isso e realizar a verificação da convergência do método para um determinado problema antes de tentar resolvê-lo;
- ✓ **Critério de Parada**: obviamente não podemos repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. Para isso, devemos utilizar um certo critério, que vai depender do problema a ser resolvido e da precisão que precisamos obter na solução. O critério adotado para **parar** as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada.

Para encontrarmos as raízes ou zeros de uma função iremos utilizar métodos numéricos iterativos. Como já mencionado, o primeiro passo para se resolver um processo iterativo corresponde a obtenção de uma estimativa inicial para o resultado do problema. No caso de zeros de funções, usamos a operação chamada de **isolamento de raízes**, que veremos na seção seguinte.

4.4 Isolamento de Raízes

Para determinarmos o número e a localização aproximada de raízes de uma função, a fim de obtermos uma estimativa inicial a ser usada nos processo iterativos, podemos examinar o comportamento dessa função através de um esboço gráfico.

Por exemplo, seja uma função $f(x)$ tal que:

$$f(x) = g(x) - h(x) \tag{4.2}$$

As raízes de $f(x)$, são tais que:

$$g(x) - h(x) = 0 \tag{4.3}$$

ou ainda:

$$g(x) = h(x) \tag{4.4}$$

Assim, os valores de x em que o gráfico $g(x)$ intercepta o gráfico de $h(x)$ é a raiz de $f(x)$.

Exemplo:

Dada a função $f(x) = sen(x) - [-cos(x)]$, encontrar os intervalos que contenham raízes entre **0** e 2π .

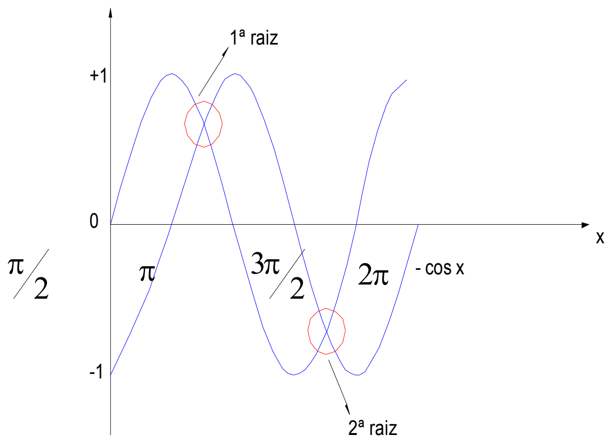
Partindo de $f(x)=0$, segue que:

$$sen(x) - [-cos(x)] = 0$$

e que

$$sen(x) = -cos(x)$$

Fazendo os gráficos de $sen(x)$ e $-cos(x)$ temos:



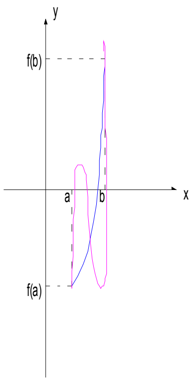
Pelo gráfico, vemos que a função $g(x)$ irá interceptar a função $h(x)$ entre $\pi/2$ e π e entre $3\pi/2$ e 2π. Portanto, podemos afirmar que existe uma raiz de $f(x)$ no intervalo $[\pi/2, \pi]$ e no intervalo $[3\pi/2, 2\pi]$.

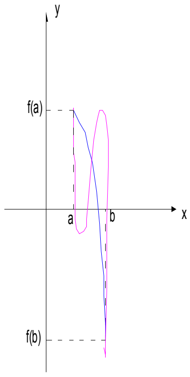
Nem sempre o esboço gráfico é a forma mais prática de se obter um intervalo que contém pelo menos uma raiz da função $f(x)$. Muitas vezes é preciso se utilizar um método algébrico. Para isso, vamos recorrer ao teorema de Bolzano.

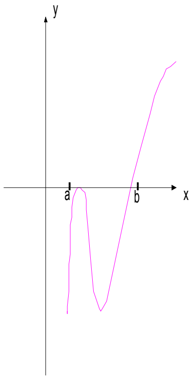
4.4.1 Teorema de Bolzano.

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$, tal que, $f(a).f(b)<0$. Então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[a,b]$.

Podemos verificar este teorema graficamente:







Exemplo: Seja a função *f(x)=x·ln(x)-3.2*. Podemos calcular o valor de *f(x)* para valores arbitrários de *x*, como mostrado na tabela abaixo:

x	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	*-3.20*	*-1.81*	*0.10*	*2.36*

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo [2,3].

4.5 Método da Dicotomia ou Bissecção.

O método da dicotomia ou bissecção é a forma mais intuitiva de se obter a raiz de uma função. Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo [*a,b*], e α uma raiz de *f*(*x*) isolada neste intervalo através de um dos métodos descritos no item anterior.

Inicialmente, subdividimos este intervalo em suas duas metades, ou seja:

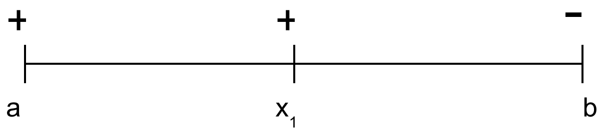
$$\left[a;\frac{a+b}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a+b}{2};b\right]$$

Verificamos se a raiz está contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial, usando o teorema de Bolzano. Ou seja, se a função *f(x)* mudar de sinal entre *a* e $\frac{a+b}{2}$ saberemos que a raiz está nessa primeira metade do intervalo [*a*,*b*]. Caso a função *f(x)* mude de sinal entre $\frac{a+b}{2}$ e *b*, a raiz deverá estar na segunda metade do intervalo original.

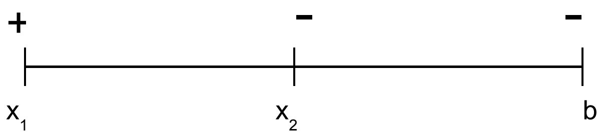
Em seguida repetimos o processo para aquela metade que contém a raiz de *f(x)*: dividimos o intervalo ao meio e verificamos em qual metade está a raiz. Podemos continuar repetindo esse processo indefinidamente.

A estimativa da raiz α em cada etapa será o ponto médio do intervalo em estudo onde sabemos que existe uma raiz. E, como todo processo numérico, é importante estimarmos o erro nesse resultado obtido. No caso do método da bissecção, o erro na estimativa será dado pela metade do comprimento do intervalo em estudo.

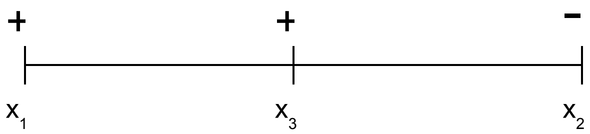
A seguir, uma ilustração desse processo, onde os sinais acima do eixo horizontal representam o sinal da função:



$$x_1 = \left(\frac{a + b}{2} \right) \pm \frac{|b - a|}{2}$$



$$x_2 = \left(\frac{x_1 + b}{2} \right) \pm \frac{|b - x_1|}{2}$$



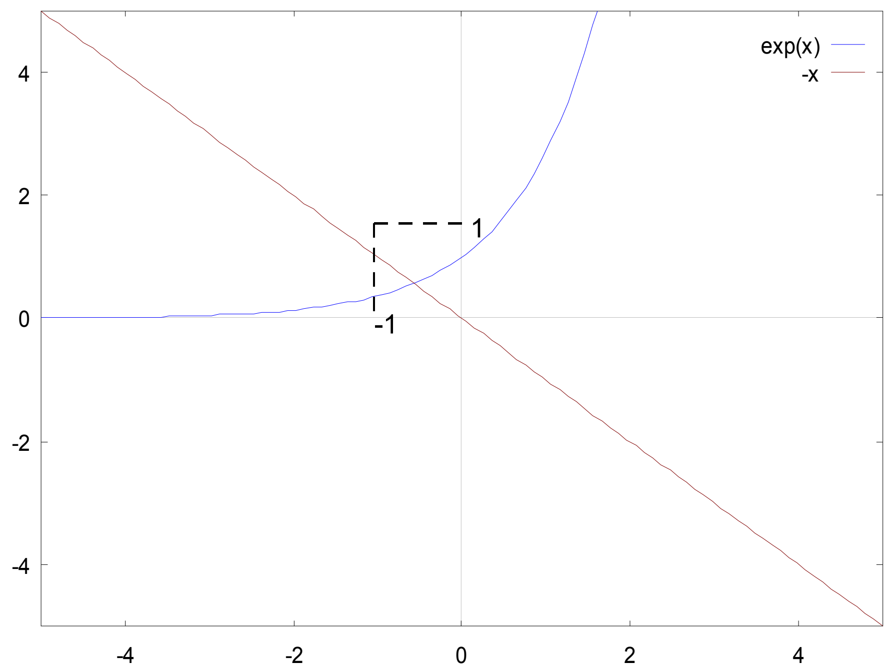
$$x_3 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \pm \frac{|x_2 - x_1|}{2}$$

Exemplo: Encontre uma estimativa para a raiz de:

$$f(x) = e^x + x$$

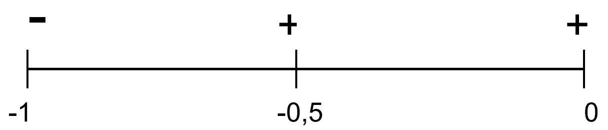
com um erro menor ou igual a 0,050.

Os gráficos de e^x e de $-x$ são:



Através da interseção mostrada no grafico, podemos concluir que a raiz de *f(x)* ∈ [-1,0].

Utilizando o método da dicotomia, temos:

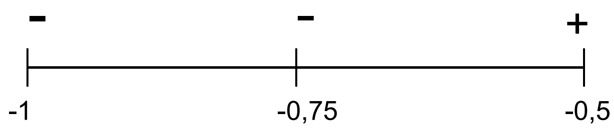


$f(-1) = -0{,}63$

$f(0) = 1$

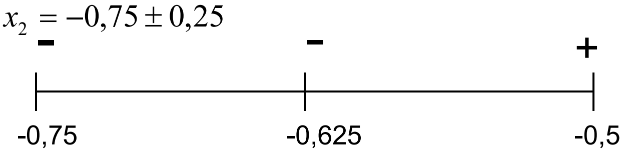
$x_1 = -0{,}5 \pm 0{,}5$

$f(-0{,}5) = 0{,}11$



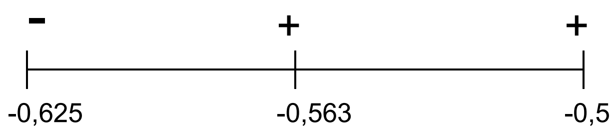
$f(-0{,}75) = -0{,}28$

$x_2 = -0{,}75 \pm 0{,}25$



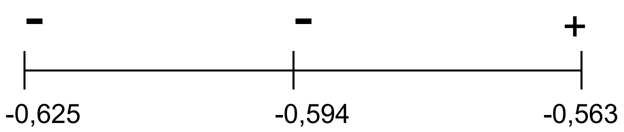
$f(-0{,}625) = -0{,}09$

$x_3 = -0{,}625 \pm 0{,}125$



$f(-0{,}563) = 0{,}01$

$x_4 = -0{,}563 \pm 0{,}063$



$$f(-0{,}594) = -0{,}04$$

$$x_5 = -0{,}594 \pm 0{,}032$$

Portanto, a raiz da função $f(x)=e^x+x$ é igual a –0,594 ± 0,032.

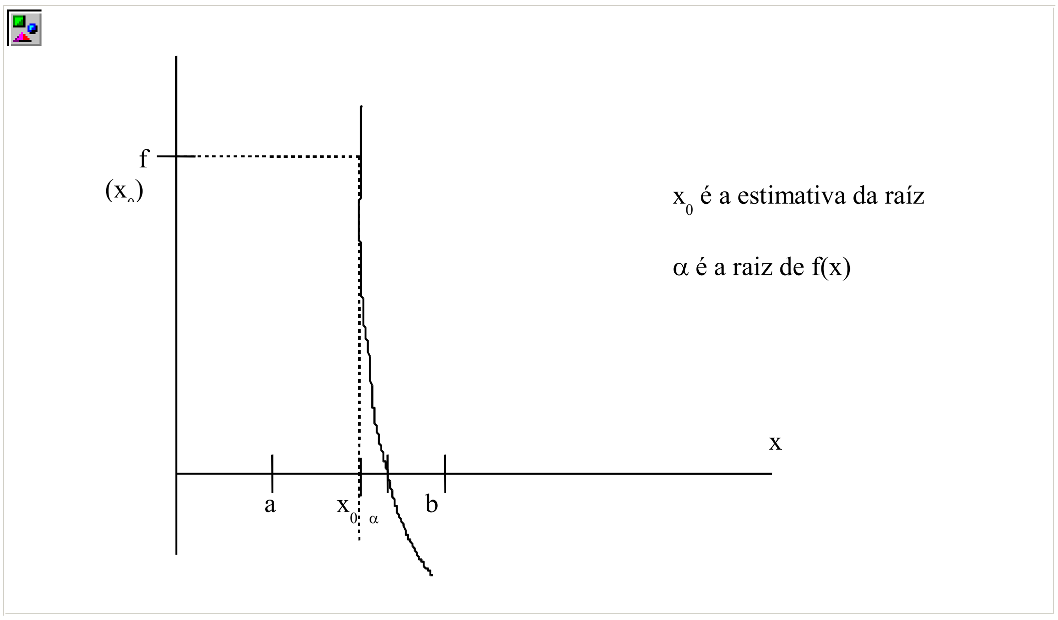
4.6 Critérios de Parada em um Processo Iterativo

Foi usado, até o momento, o seguinte critério de parada:

$$\left|\frac{b_k - a_k}{2}\right| \leq \text{erro estipulado} \tag{4.5}$$

onde $[a_k, b_k]$ é o intervalo que contêm a raiz da função após k iterações.

No entanto, se tivermos uma função do seguinte tipo:



Podemos estar satisfazendo (1) e, entretanto, $f(x_0)$ pode ser muito maior que zero. Assim, em certos casos pode-se usar a seguinte condição:

$$|f(x_0)| \leq \text{erro estipulado} \tag{4.6}$$

Tanto o critério (4.5), quanto o critério (4.6), podem levar a um número muito grande de iterações. Uma maneira de se contornar este problema é tomar como um critério de parada adicional, um certo número de iterações máximo.

4.6.1 Estimativa do número de iterações no método da bisseção.

Como, no método da bisseção, em cada passo, dividimos o intervalo por 2, temos:

$$|b_k - a_k| = \left|\frac{b_o - a_o}{2^k}\right| \tag{4.7}$$

onde *k* é o número de iterações e $[a_o,b_o]$ é o intervalo inicial que isola a raiz da função.

Dado o seguinte critério de parada:

$$\left|\frac{b_k - a_k}{2}\right| \leq \varepsilon \tag{4.8}$$

onde ε é o erro estipulado, temos que:

$$2\varepsilon \geq |b_k - a_k| \tag{4.9}$$

De (4.9) em (4.7):

$$2\varepsilon \geq \left|\frac{b_o - a_o}{2^k}\right| \tag{4.10}$$

Re-arranjando os termos em (4.10):

$$2^{k+1} \geq \frac{|b_o - a_o|}{\varepsilon} \tag{4.11}$$

Tomando o *log* de ambos os lados de (4.11):

$$\log\left(2^{k+1}\right) \geq \log\left(\frac{|b_o - a_o|}{\varepsilon}\right) \tag{4.12}$$

e usando as propriedades do *log* segue que:

$$k \geq \frac{\log(|b_o - a_o|) - \log \varepsilon}{\log(2)} - 1 \tag{4.13}$$

A expressão (4.13) dá o número de iterações necessárias para que o critério de parada, definido em (4.8), seja satisfeito.