INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

8ª Edição

FREDERICK S. HILLIER
Stanford University

GERALD J. LIEBERMAN
Ex-Professor Titular da Stanford University

Tradução
ARIOVALDO GRIESI

Revisão Técnica
JOÃO CHANG JUNIOR
Doutor em Administração — FEA/USP
Professor Titular do Programa de Mestrado da UNIP
Professor Titular da FAAP

McGraw Hill

Bangcoc Bogotá Beijing Caracas Cidade do México
Cingapura Lisboa Londres Madri Milão Montreal Nova Delhi
Santiago São Paulo Seul Sydney Taipé Toronto

CAPÍTULO 18

Teoria dos Estoques

"Sinto muito, mas não temos esse produto no momento." Quantas vezes você ouviu esta frase durante suas jornadas de compras? Em muitos desses casos, o que você encontrou foram lojas que não estão sabendo fazer um bom controle de seus *estoques* (estoques de mercadorias sendo mantidas para venda ou uso futuros). Eles não estão fazendo pedidos para reabastecer seus estoques de forma suficientemente rápida para impedir falta de produtos. Essas lojas poderiam se beneficiar dos tipos de técnicas de controle de estoques científico que são descritas neste capítulo.

Não são somente lojas de varejo que devem controlar estoques. De fato, os estoques são uma constante no mundo dos negócios. Manter estoques é necessário para qualquer empresa que lide com produtos físicos, inclusive fabricantes, atacadistas e varejistas. Por exemplo, os fabricantes precisam de estoques de materiais necessários para fabricar seus produtos. Eles também precisam de estoques de produtos acabados aguardando embarque. De forma similar, os atacadistas, bem como os varejistas, precisam manter estoques de mercadorias para estar disponíveis para compra por parte de seus clientes.

O valor total de todo estoque — incluindo produtos acabados, produtos semi-acabados e matérias-primas — nos Estados Unidos soma tranqüilamente mais de um *trilhão* de dólares. Isso equivale, grosseiramente, a US$ 5.000 para cada homem, mulher e criança do país.

Os custos anuais associados ao armazenamento de estoque também são muito grandes, talvez equivalentes a um quarto do valor dos estoques. Portanto, os custos incorridos para o armazenamento de estoques nos Estados Unidos giram na casa das centenas de bilhões de dólares anuais. Reduzir custos de armazenagem evitando grandes estoques desnecessários pode aumentar a competitividade de qualquer empresa.

Algumas empresas japonesas foram pioneiras na introdução do *sistema de estoques just-in-time* — um sistema que enfatiza planejamento e programação de modo que os materiais necessários cheguem "exatamente a tempo" (*just-in-time*) para seu uso. Enormes quantias têm sido então economizadas reduzindo-se os níveis de estoques para o estritamente necessário.

Muitas empresas em outras partes do mundo também têm mudado a maneira pela qual elas gerenciam seus estoques. A aplicação de técnicas de pesquisa operacional nessa área (algumas vezes denominada *controle de estoques científico*) está disponibilizando uma poderosa ferramenta para ganho de competitividade.

Como as empresas usam a pesquisa operacional para otimizar suas **políticas de estoques** para quando e em que nível reabastecer seus estoques? Elas usam **controle de estoques científico** compreendendo as seguintes etapas:

1. Formular um *modelo matemático* descrevendo o comportamento do sistema de estoque.
2. Buscar uma política de estoques *ótima* em relação a esse modelo.

3. Usar um *sistema de processamento de informações* computadorizado para manter um registro dos níveis de estoques atuais.
4. Utilizar esse registro de níveis de estoque atuais, aplicar a política de estoques ótima para sinalizar quando e em que níveis reabastecer os estoques.

Os modelos matemáticos de estoques usados com essa abordagem podem ser divididos em duas grandes categorias — modelos determinísticos e modelos estocásticos — de acordo com a *previsibilidade de demanda* envolvida. A **demanda** por um produto em estoque é o número de unidades que precisarão ser retiradas do estoque para algum uso (por exemplo, vendas) durante um período específico. Se a demanda em períodos futuros puder ser prevista com precisão razoável, faz sentido usar uma política de estoques que suponha que todas as previsões sempre serão totalmente precisas. Esse é o caso da *demanda conhecida* em que seria usado um modelo de estoques *determinístico*. Entretanto, quando a demanda não puder ser prevista muito bem, torna-se necessário usar um modelo de estoques *estocástico*, no qual a demanda em qualquer período é uma variável aleatória, em vez de uma constante conhecida.

Existem várias considerações básicas envolvidas na determinação da política de estoques que deve ser refletida no modelo de estoques matemático. Estas são ilustradas nos exemplos apresentados na primeira seção e depois descritas em termos gerais na Seção 18.2. A Seção 18.3 desenvolve e analisa modelos de estoques determinísticos para situações nas quais o nível de estoques está sob constante revisão. A Seção 18.4 faz o mesmo para situações em que o planejamento está sendo feito para uma série de períodos em vez de forma contínua. A Seção 18.5 estende certos modelos determinísticos para coordenar os estoques em vários pontos ao longo da cadeia de abastecimento da empresa. As duas seções seguintes apresentam modelos estocásticos, primeiramente, sob contínua revisão e, depois, para um único período. Um suplemento no CD-ROM para este capítulo introduz modelos estocásticos de revisão periódica para períodos múltiplos. O capítulo conclui com uma discussão de como o controle de estoques científico está sendo usado na prática para lidar com sistemas de estoques muito grandes, conforme ilustrado pelos estudos de caso da IBM e Hewlett-Packard.

18.1 EXEMPLOS

Apresentamos dois exemplos em contextos bem distintos (um fabricante e um atacadista) para os quais é necessário desenvolver-se uma política de estoques.

EXEMPLO 1 Fabricando Alto-falantes para Aparelhos de TV

Uma empresa fabricante de televisores produz seus próprios alto-falantes, que são usados na produção de seus aparelhos de TV. Os televisores são montados em uma linha de produção contínua a uma taxa de 8.000 unidades mensais, sendo necessário um alto-faltante por aparelho. Os alto-falantes são produzidos em lotes, porque eles não garantem a configuração de uma linha de produção contínua e quantidades relativamente grandes podem ser produzidas em curto espaço de tempo. Portanto, os alto-falantes são colocados em estoque até que sejam necessários para montagem nos televisores na linha de produção. A empresa está interessada em determinar quando produzir um lote de alto-falantes e quantos alto-falantes produzir em cada lote. Devem ser levados em conta diversos custos:

1. Cada vez que um lote é produzido, incorre-se em um **custo de implantação** de US$ 12.000. Esse custo inclui o custo de "ferramental", custos administrativos, manutenção de registros e assim por diante. Note que a existência desse custo pede a produção de alto-falantes em grandes lotes.
2. O **custo unitário de produção** de um único alto-falante (excluindo o custo de implantação) é de US$ 10, independentemente do tamanho do lote produzido. (Em geral,

entretanto, o custo unitário de produção não precisa ser constante e pode diminuir com o tamanho do lote.)

3. A produção de alto-falantes em grandes lotes leva a um grande estoque. O **custo de manutenção de estoque** estimado de manter um alto-falante em estoque é de US$ 0,30 por mês. Esse custo inclui o de capital imobilizado em estoques. Já que o dinheiro investido em estoques não pode ser usado em outras formas produtivas, esse custo de capital consiste no retorno perdido (conhecido como *custo de oportunidade*), pois se deve renunciar a empregos alternativos do dinheiro. Outros componentes do custo de manutenção de estoque incluem o custo de aluguel do espaço para armazenagem, o custo de seguro contra perda de estoques causada por incêndio, furto/roubo ou vandalismo, impostos sobre o valor dos estoques e o custo de pessoal que supervisiona e protege os estoques.
4. A política da empresa proíbe deliberadamente planejar contra escassez de qualquer um desses componentes. Entretanto, pode ocorrer ocasionalmente uma falta de alto-falantes e foi estimado que cada alto-falante que não se encontra disponível quando necessário custa à empresa US$ 1,10 por mês. Esse **custo de escassez** inclui o custo extra de instalação dos alto-falantes após o televisor ser completamente montado, os juros perdidos em razão do atraso no recebimento de receitas de vendas, o custo extra de contabilização e assim por diante.

Desenvolveremos a política de estoques para esse exemplo com a ajuda do primeiro modelo de estoques apresentado na Seção 18.3.

EXEMPLO 2 Distribuição de Bicicletas no Atacado

Um distribuidor de bicicletas no atacado está tendo problemas de falta de modelo popular (uma bicicleta pequena de uma velocidade para meninas) e está, no momento, revendo sua política de estoques para esse modelo. O distribuidor compra mensalmente esse modelo de bicicleta do fabricante e então abastece diversas lojas de bicicleta na região oeste dos Estados Unidos atendendo a pedidos de compra. Qual será a demanda total das lojas de bicicleta é um dado bastante incerto. Portanto, a questão é: quantas bicicletas devem ser encomendadas do fabricante para determinado mês, dada a indicação de nível de estoque naquele mês?

O distribuidor analisou seus custos e determinou que os seguintes pontos são importantes:

1. O **custo de pedido**, isto é, o custo de fazer um pedido de compra mais o custo das bicicletas, que estão sendo compradas, possui dois componentes: o custo administrativo envolvido na colocação de um pedido é estimado em US$ 200 e o custo real de cada bicicleta é de US$ 35 para esse atacadista.
2. O *custo de manutenção de estoque* — isto é, o custo de manter o produto em estoque — é de US$ 1 por bicicleta que sobra no final do mês. Esse custo representa os custos de capital imobilizado, espaço em depósito, seguro, impostos e assim por diante.
3. O *custo de escassez* é o de não ter uma bicicleta em mãos quando necessário. Pode-se facilmente fazer uma nova encomenda desse modelo em particular para o fabricante e, normalmente, as lojas aceitam um atraso na entrega. Além disso, embora sejam permitidas faltas de produtos, o distribuidor acredita que ele acaba tendo uma perda caso isso aconteça, perda esta estimada em US$ 15 por bicicleta por mês com a falta do produto. Esse custo estimado leva em conta a possível perda de vendas no futuro em decorrência da perda de credibilidade com o cliente. Outros componentes desse custo incluem a perda de juros sobre receitas de vendas atrasadas e custos administrativos adicionais associados a essas faltas de produto. Se algumas lojas fossem cancelar pedidos em razão dos atrasos, as perdas de receitas dessas vendas perdidas precisariam ser incluídas no custo de escassez. Felizmente, em geral tais cancelamentos não ocorrem para esse modelo.

Retornaremos novamente à variante desse exemplo na Seção 18.7.

Esses exemplos ilustram que há duas possibilidades para a forma pela qual uma empresa *reabastece seus estoques*, dependendo da situação. Uma possibilidade seria a própria empresa *produzir* as unidades de que precisa (como o fabricante de TVs produzindo alto-falantes). A outra seria a empresa *encomendar* as unidades necessárias de um fornecedor (assim como o distribuidor de bicicletas encomenda bicicletas do fabricante). Os modelos de estoques não precisam fazer a distinção entre essas duas maneiras de reabastecer estoques e, portanto, usaremos termos como *produzir* e *encomendar* de maneira intercambiável.

Ambos os exemplos lidam com um produto específico (alto-falantes para certo tipo de televisor ou para determinado modelo de bicicleta). Na maioria dos modelos de estoques, considera-se apenas um produto por vez. Exceto na Seção 18.9, todos os modelos de estoques apresentados neste capítulo supõem um único produto.

Os dois exemplos indicam que existe uma relação de conflito entre os custos envolvidos. A próxima seção discute os componentes de custo básicos dos modelos de estoques para determinar a relação ótima entre esses custos conflitantes.

18.2 COMPONENTES DOS MODELOS DE ESTOQUES

Como as políticas de estoques afetam a lucratividade, a escolha entre elas depende de suas lucratividades relativas. Conforme visto nos Exemplos 1 e 2, alguns dos custos que determinam essa lucratividade são: (1) custos de encomenda, (2) custos de manutenção de estoque e (3) custos de escassez. Outros fatores relevantes incluem (4) receitas, (5) custos recuperados e (6) taxas de desconto. Esses seis fatores são descritos, um a um, a seguir.

O **custo para encomendar** uma quantidade z (seja *comprando* ou *produzindo essa quantidade*) pode ser representado por uma função $c(z)$. A forma mais simples dessa função é aquela diretamente proporcional à quantidade encomendada, isto é, $c \cdot z$, em que c representa o preço unitário pago. Outra hipótese é a que $c(z)$ é composto de duas partes: um termo é diretamente proporcional à quantidade encomendada e um termo corresponde a uma constante K para z positivo e é 0 para $z = 0$. Para esse caso,

$$c(z) = \text{custo para encomendar } z \text{ unidades } 20$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ K + cz & \text{se } z > 0, \end{cases}$$

em que K = custo de implantação e c = custo unitário.

A constante K inclui o custo administrativo de encomenda ou, ao produzir, os custos envolvidos na preparação para iniciar a produção de um lote de peças.

Existem outras hipóteses que podem ser feitas sobre o custo de encomenda, porém este capítulo se restringe aos casos que acabamos de descrever.

No Exemplo 1, os alto-falantes são produzidos e o custo de implantação para a produção de um lote de peças é de US$ 12.000. Além disso, cada alto-falante custa US$ 10 e, portanto, o custo de produção ao encomendar a produção de um lote de z alto-falantes é dado por

$$c(z) = 12.000 + 10z, \qquad \text{para } z > 0.$$

No Exemplo 2, o distribuidor encomenda bicicletas do fabricante e o custo de *encomenda* é dado por

$$c(z) = 200 + 35z, \qquad \text{para } z > 0.$$

O **custo de manutenção de estoque** (algumas vezes chamado *custo de armazenamento*) representa todos os custos associados à armazenagem dos estoques até que eles sejam vendidos ou utilizados. Estão inclusos o custo de capital imobilizado, espaço, seguro, proteção e impostos atribuídos à armazenagem. O custo de manutenção de estoque pode ser calculado continuamente ou então período a período. Nesse último caso, o custo pode ser uma função da quantidade máxima mantida durante um período, a quantidade média mantida ou a quantidade em termos de estoque no final do período. O último ponto de vista é aquele normalmente adotado neste capítulo.

No exemplo da bicicleta, o custo de manutenção de estoque é de US$ 1 por bicicleta que sobra no final do mês. No exemplo dos alto-falantes para TV, o custo de manutenção de estoque é calculado continuamente como US$ 0,30 por alto-falante em estoque por mês e, portanto, o custo de manutenção de estoque médio por mês é igual a US$ 0,30 vezes o número médio de alto-falantes em estoque.

O **custo de escassez** (algumas vezes denominado *custo de demanda insatisfeita*) é incorrido quando a quantidade da *commodity* necessária (demanda) excede o estoque disponível. Esse custo depende de qual dos dois casos a seguir se aplica.

Em um caso, conhecido como ***backlogging***, o excesso de demanda não é perdido, mas sim mantido até que ele possa ser atendido quando a próxima entrega normal reabastece os estoques. Para uma firma que incorra em falta temporária de produtos para fornecimento a seus clientes (como aquela do exemplo da bicicleta), o custo de escassez pode então ser interpretado como a perda de credibilidade com o cliente e a posterior relutância de fazer novos negócios com a empresa, o custo de receita atrasada e os custos administrativos extras. Para um fabricante que incorra em falta temporária de materiais necessários para produção (como a falta de alto-falantes para montagem em televisores), o custo de escassez se torna o custo associado ao atraso na finalização do processo produtivo.

No segundo caso, chamado **sem *backlogging***, se ocorrer qualquer excesso de demanda em relação aos estoques disponíveis, a empresa não poderá esperar pela próxima entrega normal para atender a esse excesso de demanda. Assim, (1) excesso de demanda será atendido por uma entrega prioritária ou então (2) não será atendido porque os pedidos serão cancelados. Para a situação 1, o custo de escassez pode ser interpretado como o custo de entrega prioritária. Para a situação 2, o custo de escassez é a perda de receita atual por não atender à demanda mais o custo de perda de futuros negócios em virtude da perda de credibilidade com o cliente.

As **receitas** poderão ou não ser incluídas no modelo. Se tanto o preço quanto a demanda pelo produto forem estabelecidas pelo mercado e, portanto, estarem fora do controle da empresa, a receita proveniente de vendas (supondo-se que a demanda seja atendida) é independente da política de estoques da firma e podem ser desprezadas. Entretanto, se as receitas forem desprezadas no modelo, a *perda em receitas* deve ser então incluída no custo de escassez toda vez que a empresa não puder atendê-las e as vendas são perdidas. Além disso, mesmo no caso em que a demanda é colocada em reserva, o custo do atraso em receitas também deve ser incluído no custo de escassez. Com essas interpretações, as receitas não serão consideradas explicitamente no restante deste capítulo.

O **valor de custos recuperados** de um item é aquele que sobra quando não existe mais a intenção de se ter estoque adicional. O valor de custos recuperados representa o valor pelo qual a empresa está disposta a vender um item, talvez por meio de uma venda com desconto. O negativo do valor de custos recuperados é chamado **custo de recuperados**. Se houver um custo associado a essa venda de um item, o custo de recuperados pode ser positivo. Vamos supor, daqui em diante, que qualquer custo de recuperados seja incorporado no *custo de manutenção de estoque*.

Finalmente, uma **taxa de desconto** leva em consideração o valor monetário. Quando uma empresa imobiliza capital em estoque, fica impedida de usar esse dinheiro para outros fins. Por exemplo, poderia empregá-lo em investimentos seguros, digamos, títulos da dívida pública e ter um retorno sobre o investimento daqui a um ano de, digamos, 7%. Portanto, US$ 1 investido hoje valeria US$ 1,07 daqui a um ano ou, alternativamente, um lucro de US$ 1 daqui a um ano equivale a $\alpha =$ US$ 1/US$ 1,07 hoje. A quantidade α é conhecida como **fator de desconto**. Assim, ao totalizar o lucro total de uma política de estoques, o lucro ou custos daqui a um ano devem ser multiplicados por α; em dois anos por α^2 e assim por diante. Também podem ser usadas unidades de tempo diferentes de um ano. O lucro total calculado dessa forma é normalmente conhecido como *valor presente líquido*.

Em problemas com horizontes de tempo curtos, α pode ser suposto como igual a 1 (e, portanto, desprezado), pois o valor atual de US$ 1 entregue durante esse horizonte de tempo curto não muda muito. Entretanto, em problemas com horizontes de tempo longos, o fator de desconto deve ser incluído.

Ao usar técnicas quantitativas para buscar políticas de estoques ótimas, usamos o critério de minimizar o custo descontado total (esperado). Sob as hipóteses que o preço e a demanda pelo produto não se encontram sob controle da empresa e que as receitas perdidas ou atrasadas são incluídas no custo de penalidade por escassez, minimizar custos equivale a maximizar receitas líquidas. Outro critério útil é fazer que a política de estoques seja simples, isto é, que a regra para indicar *quando encomendar* e *quanto encomendar* seja compreensível e fácil de ser implementada. A maioria das políticas considerada neste capítulo possui essa propriedade.

Conforme mencionado no início do capítulo, os modelos de estoques são normalmente classificados como *determinísticos* ou então *estocásticos*, dependendo de se a demanda para um período for conhecida ou for uma variável aleatória com distribuição probabilística conhecida. A produção de lotes de alto-falantes no Exemplo 1 da Seção 18.1 ilustra a demanda determinística, pois os alto-falantes são usados na montagem de televisores a uma taxa fixa de 8.000 unidades por mês. As compras de bicicletas feitas pelas lojas do distribuidor no atacado no Exemplo 2 da Seção 18.1 ilustram demanda aleatória, porque a demanda mensal total varia mês a mês de acordo com alguma distribuição probabilística. Outro componente de um modelo de estoques é o **prazo de entrega**, que é a quantidade de tempo entre a colocação de um pedido para reabastecer estoques (seja via compra seja produção) e o recebimento das mercadorias no estoque. Se o prazo de entrega sempre for o mesmo (um prazo de entrega *determinado*), então o reabastecimento pode ser programado apenas quando desejado. A maioria dos modelos neste capítulo supõe que cada reabastecimento ocorra apenas quando desejado, seja porque a entrega é praticamente instantânea, seja porque ela é conhecida quando o reabastecimento será necessário e existe um prazo de entrega estabelecida.

Outra classificação se refere ao monitoramento do nível de estoques ser contínuo ou periódico. Na **revisão contínua**, um pedido é feito assim que o nível de estoques cair para o ponto prescrito para fazer novos pedidos. Na **revisão periódica**, o nível de estoques é verificado em intervalos discretos, por exemplo, no final de cada semana e as decisões de colocação de pedidos são feitas somente nesses momentos mesmo se o nível de estoques caia abaixo do ponto para fazer novos pedidos entre as datas de revisão precedente e atual. Na prática, uma política de revisão periódica pode ser usada para aproximar uma política de revisão contínua tornando o intervalo de tempo suficientemente pequeno.

18.3 MODELOS DETERMINÍSTICOS DE REVISÃO CONTÍNUA

A situação em relação a estoques mais comumente enfrentada pelos fabricantes, varejistas e atacadistas é aquela cujos níveis de estoques são consumidos ao longo do tempo e então reabastecidos pela chegada de um lote de novas unidades. Um modelo simples representando essa situação é o **modelo econômico de quantidade de pedidos** ou, de forma abreviada, o **modelo EOQ**. Algumas vezes ele também é conhecido como *modelo de tamanho de lote econômico*.

Unidades do produto considerado são supostamente retiradas continuamente do estoque a uma *taxa constante conhecida*, representada por d, isto é, a demanda é de d unidades por unidade de tempo. Parte-se também do pressuposto de que os estoques são reabastecidos quando preciso, encomendando (seja por meio de compra seja de produção) um lote de tamanho fixo (Q unidades), em que todas as Q unidades chegam simultaneamente no tempo desejado. Para o *modelo EOQ básico* a ser apresentado primeiramente, os únicos custos a serem considerados são

$K =$ custo de implantação para encomendar um lote,

$c =$ custo unitário para produzir ou comprar cada unidade,

$h =$ custo de manutenção de estoque por unidade de tempo mantida em estoque.

O objetivo é determinar quando e em que quantidade reabastecer estoques de modo a minimizar a soma desses custos por unidade de tempo.

Supomos uma *revisão contínua*, de modo que os estoques possam ser reabastecidos toda vez que seus níveis caírem para um número suficientemente baixo. Iremos supor primeiramente que não sejam permitidas falta de produto (porém, posteriormente, iremos flexibilizar essa hipótese). Com a taxa de demanda fixa, a falta de produto pode ser evitada reabastecendo estoques cada vez que o nível de estoques cair a zero e isso também minimizará o custo de manutenção de estoque. A Figura 18.1 representa o padrão resultante de níveis de estoque ao longo do tempo ao iniciarmos no momento 0 encomendando um lote de Q unidades de modo a aumentar o nível de estoque inicial de 0 para Q e então repetir esse processo cada vez que o nível de estoque cair novamente para 0.

O Exemplo 1 na Seção 18.1 (fabricação de alto-falantes para aparelhos de TV) se enquadra nesse modelo e será usado para ilustrar a discussão a seguir.

Modelo EOQ Básico

Em suma, além dos custos especificados anteriormente, o modelo EOQ básico parte das seguintes hipóteses.

Hipóteses (Modelo EOQ Básico).

1. Uma *taxa de demanda* constante conhecida de d unidades por unidade de tempo.
2. A quantidade encomendada (Q) para reabastecer estoques chega toda de uma só vez exatamente quando desejado, isto é, quando o nível de estoques cai a 0.
3. Não é permitida falta planejada de produto.

Em relação à hipótese 2, normalmente existe um atraso (intervalo) entre o momento em que é feito um pedido e o momento em que ele chega ao estoque. Conforme indicado na Seção 18.2, o intervalo de tempo entre a colocação de um pedido e seu recebimento é conhecido como *prazo de entrega*. O nível de estoques no qual é feito o pedido é chamado **ponto para fazer novo pedido**. Para satisfazer a hipótese 2, esse ponto para fazer novo pedido precisa ser configurado em

Ponto para fazer novo pedido $=$ (taxa de demanda) $\times$ (prazo de entrega).

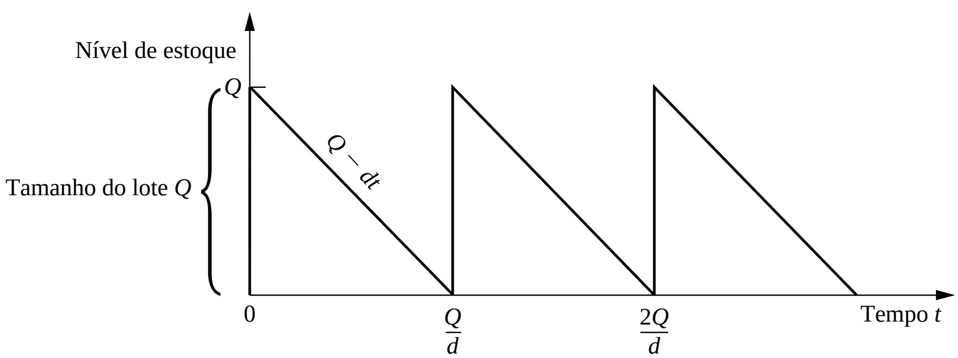
Assim, a hipótese 2 está supondo implicitamente um prazo de entrega *constante*.

O tempo entre reabastecimentos de estoque consecutivos (os segmentos de reta verticais na Figura 18.1) é conhecido como *ciclo*. Para o exemplo do alto-falante, um ciclo pode ser visto como o tempo entre a produção de lotes de peças consecutivos. Dessa forma, se forem produzidos 24.000 alto-falantes em cada lote e forem usados a uma taxa de 8.000 unidades por mês, então o comprimento do ciclo será de 24.000/8.000 $=$ 3 meses. Em geral, o comprimento de um ciclo é Q/d.

O custo total por unidade de tempo T é obtido dos seguintes componentes.

Custo de produção ou encomenda por ciclo $= K + cQ$.

■ FIGURA 18.1
Diagrama do nível de estoque em função do tempo para o modelo EOQ básico.



O nível de estoque médio durante um ciclo é $(Q + 0)/2 = Q/2$ unidades e o custo correspondente é de $hQ/2$ por unidade de tempo. Como o comprimento de um ciclo é Q/d,

$$\text{Custo de manutenção de estoque por ciclo} = \frac{hQ^2}{2d}.$$

Portanto,

$$\text{Custo total por ciclo} = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d},$$

logo, o custo total por unidade de tempo é

$$T = \frac{K + cQ + hQ^2/(2d)}{Q/d} = \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hQ}{2}.$$

O valor de Q, digamos Q^*, que minimiza T é encontrado configurando-se a primeira derivada em zero (e notando que a segunda derivada é positiva), resultando em

$$-\frac{dK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

de modo que

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}},$$

que é a já conhecida *fórmula EOQ*.[1] Algumas vezes também chamada *fórmula da raiz quadrada*. O *tempo de ciclo* correspondente, digamos t^*, é

$$t^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}.$$

É interessante observar que Q^* e t^* mudam intuitivamente de formas plausíveis quando é feita uma mudança em K, h ou d. À medida que o custo de implantação K sobe, tanto Q^* quanto t^* aumentam (um número menor de implantações). Quando o custo de manutenção de estoque unitário h aumenta, Q^* e t^* diminuem (níveis de estoque menores). Conforme a taxa de demanda d se eleva, Q^* aumenta (lotes maiores), porém t^* diminui (implantações mais freqüentes).

Essas fórmulas para Q^* e t^* serão aplicadas agora ao exemplo do alto-falante. Os valores de parâmetros apropriados da Seção 18.1 são

$$K = 12.000, \qquad h = 0{,}30, \qquad d = 8.000,$$

de modo que

$$Q^* = \sqrt{\frac{(2)(8.000)(12.000)}{0{,}30}} = 25.298$$

e

$$t^* = \frac{25.298}{8.000} = 3{,}2 \text{ meses}.$$

---

1 Um interessante relato histórico desse modelo e fórmula, inclusive uma reimpressão de um artigo de 1913 que iniciou todo esse processo, é dado por ERLENKOTTER, D. Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model. *Operations Research*, v. 38, p. 937-950, 1990.

Portanto, a solução ótima é implantar as instalações de produção para fabricar alto-falantes uma vez a cada 3,2 meses e fabricar 25.298 alto-falantes cada vez. A curva de custo total é bastante plana próxima a esse valor ótimo, de forma que qualquer produção de um lote de peças que pudesse ser mais conveniente, digamos, 24.000 alto-falantes a cada três meses, seria praticamente ótima.

A seção de Exemplos Trabalhados do CD-ROM inclui outro exemplo de aplicação do modelo EOQ básico quando análise de sensibilidade considerável também precisa ser realizada.

Modelo EOQ com Falta Planejada de Produto

Um dos pesadelos de qualquer gerente de estoque é a ocorrência de uma escassez de estoque (algumas vezes conhecida como *esgotamento de estoques*) — demanda que não pode ser atendida no momento em razão dos estoques se encontrarem esgotados. Isso provoca uma série de dores de cabeça, entre as quais lidar com clientes insatisfeitos e trabalho extra de contabilização para fazer arranjos para atender a essa demanda posteriormente (*backorders*) quando os estoques podem ser reabastecidos. Partindo do pressuposto de que não é permitido a falta planejada de produto, o modelo EOQ básico apresentado anteriormente satisfaz o desejo comum dos gerentes de evitar o máximo possível a falta de produto. Não obstante, ainda pode ocorrer a falta de produto não planejada caso a taxa de demanda e as entregas não cumpram o cronograma planejado.

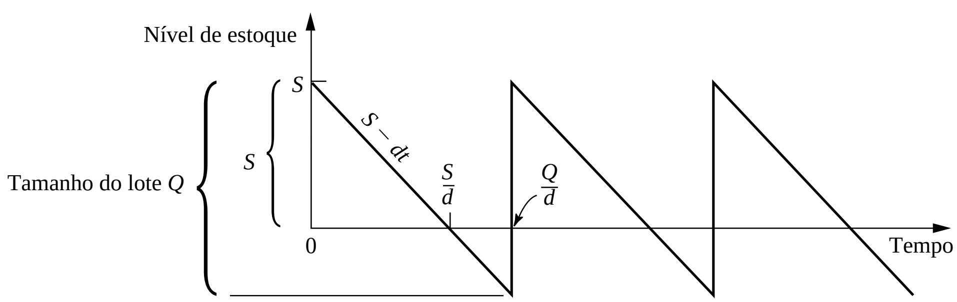
Entretanto, existem situações nas quais faz sentido termos a falta de produto limitada planejada do ponto de vista gerencial. A exigência mais importante é que os clientes geralmente são capazes de aceitar um atraso razoável no preenchimento de seus pedidos caso necessário. Nesse caso, os custos de incorrer na falta de produto descrito nas Seções 18.1 e 18.2 (inclusive perda de negócios futuros) não devem ser exorbitantes. Se o custo de manter estoques for relativamente alto quando comparado a esses custos de escassez, então diminuir o nível médio de estoque permitindo a falta de produto breve e ocasional pode ser uma sábia decisão comercial.

O **modelo EOQ com falta planejada de produto** resolve esse tipo de situação substituindo somente a terceira hipótese do modelo EOQ básico pela nova hipótese indicada a seguir.

> Agora é permitida a falta planejada de produto. Quando acontece a falta de produto, os clientes afetados vão esperar o produto estar novamente disponível. Seus pedidos colocados em reserva são preenchidos imediatamente quando a quantidade encomendada chega para reabastecer estoques.

Sob essas hipóteses, o padrão de níveis de estoques ao longo do tempo tem a aparência mostrada na Figura 18.2. O aspecto dente de serra é o mesmo daquele da Figura 18.1. Entretanto, agora os níveis de estoques estendem-se para valores negativos que refletem o número de unidades do produto que são colocados em reserva.

■ FIGURA 18.2
Diagrama do nível de estoque em função do tempo para o modelo EOQ com falta planejada de produto.



Façamos que

p = custo de escassez por unidade de produto faltante e por unidade de tempo com falta de produto,

S = nível de estoque logo após um lote de Q unidades ser acrescentado ao estoque,

$Q - S$ = falta de produto no estoque logo antes de um lote de Q unidades ser adicionado.

Agora, o custo total por unidade de tempo é obtido dos seguintes componentes.

Custo de produção ou encomenda por ciclo $= K + cQ$.

Durante cada ciclo, o nível de estoques é positivo por um período S/d. O nível médio de estoque *durante esse período* é de $(S + 0)/2 = S/2$ unidades e o custo correspondente é $hS/2$ por unidade de tempo. Portanto,

$$\text{Custo de manutenção de estoque por ciclo} = \frac{hS}{2}\frac{S}{d} = \frac{hS^2}{2d}.$$

De modo similar, ocorre falta de produto por um período $(Q - S)/d$. A quantidade média de falta de produto *durante esse período* é $(0 + Q - S)/2 = (Q - S)/2$ unidades e o custo correspondente é $p(Q - S)/2$ por unidade de tempo. Assim,

$$\text{Custo de escassez por ciclo} = \frac{p(Q-S)}{2}\frac{Q - S}{d} = \frac{p(Q-S)^2}{2d}.$$

Portanto,

$$\text{Custo total por ciclo} = K + cQ + \frac{hS^2}{2d} + \frac{p(Q-S)^2}{2d},$$

e o custo total *por unidade de tempo* é

$$T = \frac{K + cQ + hS^2/(2d) + p(Q-S)^2/(2d)}{Q/d}$$

$$= \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}.$$

Nesse modelo, há duas variáveis de decisão (S e Q) e, portanto, os valores ótimos (S^* e Q^*) são encontrados fazendo que as derivadas parciais $\partial T/\partial S$ e $\partial T/\partial Q$ sejam iguais a zero. Logo,

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -\frac{dK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2} = 0.$$

Resolver essas equações nos conduz a

$$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}, \qquad Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

O comprimento ótimo de um ciclo t^* é dado por

$$t^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}.$$

A escassez máxima é

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2dK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}.$$

Além disso, da Figura 18.2, a fração de tempo que não ocorre falta de produto é dada por

$$\frac{S^*/d}{Q^*/d} = \frac{p}{p+h},$$

que é independente de K.

Quando tanto p quanto h for muito maior que o outro, as quantidades dadas anteriormente se comportam de modo intuitivo. Particularmente, quando $p \to \infty$ com h constante (de modo que custos de escassez prevaleçam em relação aos custos de manutenção de estoque), $Q^* - S^* \to 0$ ao passo que Q^* e t^* convergem para seus valores para o modelo EOQ básico. Embora o modelo atual permita a falta de produto, $p \to \infty$ implica que ter esses períodos de falta não vale a pena.

No entanto, quando $h \to \infty$ com p constante (e, portanto, os custos de manutenção de estoque prevalecem em relação aos custos de escassez), $S^* \to 0$. Portanto, fazer que $h \to \infty$ torna antieconômico ter níveis de estoques positivos, de modo que cada novo lote de Q^* unidades não vai além de eliminar a escassez de estoque atual.

Se for permitida a falta de produto planejada no caso dos alto-falantes, o *custo de escassez* é estimado na Seção 18.1 como

$$P = 1{,}10.$$

Como anteriormente,

$$K = 12.000, \qquad h = 0{,}30, \qquad d = 8.000,$$

e, portanto, agora

$$S^* = \sqrt{\frac{(2)(8.000\ (12.000)}{0{,}30}}\sqrt{\frac{1{,}1}{1{,}1+0{,}3}} = 22.424,$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{(2)(8.000)(12.000)}{0{,}30}}\sqrt{\frac{1{,}1+0{,}3}{1{,}1}} = 28.540,$$

e

$$t^* = \frac{28.540}{8.000} = 3{,}6 \text{ meses.}$$

Conseqüentemente, as instalações de produção devem ser programadas a cada 3,6 meses para produzir 28.540 alto-falantes. A escassez máxima é de 6.116 alto-falantes. Note que Q^* e t^* não são muito diferentes do caso em que não se permite falta de produto. A razão para isso é que p é muito maior que h.

Modelo EOQ com Descontos por Quantidade

Ao especificar seus componentes de custo, os modelos precedentes partiram do pressuposto de que o custo unitário de um item é o mesmo independentemente da quantidade no lote. Na realidade, essa hipótese resultou nas soluções ótimas serem independentes desse custo unitário. O *modelo EOQ com descontos por quantidade* substitui essa hipótese pela seguinte hipótese nova.

> O custo unitário de um item agora depende da quantidade no lote. Particularmente, é dado um incentivo para se fazer um pedido maior substituindo o custo unitário de uma quantidade pequena por um custo unitário menor para cada item em um lote maior e, talvez, por custos unitários ainda menores para lotes maiores ainda.

Caso contrário, as hipóteses são as mesmas para o modelo EOQ básico.

Para ilustrar esse modelo, considere o exemplo dos alto-falantes para TVs introduzido na Seção 18.1. Suponhamos agora que o custo unitário para *cada* alto-falante seja de c_1 = US$ 11 se forem produzidos menos de 10.000 alto-falantes, c_2 = US$ 10 se a produção estiver entre 10.000 e 80.000 alto-falantes e c_3 = US$ 9,50 se a produção exceder 80.000 alto-falantes. Qual é a política ótima? A solução para esse problema específico revelará o método geral.

A partir dos resultados para o modelo EOQ básico, o custo total por unidade de tempo T_j se o custo unitário for c_j será dado por

$$T_j = \frac{dK}{Q} + dc_j + \frac{hQ}{2}, \qquad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Essa expressão supõe que h seja independente do custo unitário dos itens, mas um pequeno refinamento comum seria fazer h proporcional ao custo unitário para refletir o fato que o custo de capital imobilizado em estoque varia dessa forma. Uma representação gráfica de T_j *versus* Q é mostrada na Figura 18.3 para cada j, no qual a parte cheia de cada curva se estende além do intervalo viável de valores de Q para essa categoria de descontos.

Para cada curva, o valor de Q que minimiza T_j é encontrado exatamente da mesma forma que para o modelo EOQ básico. Para K = 12.000, h = 0,30 e d = 8.000, esse valor é

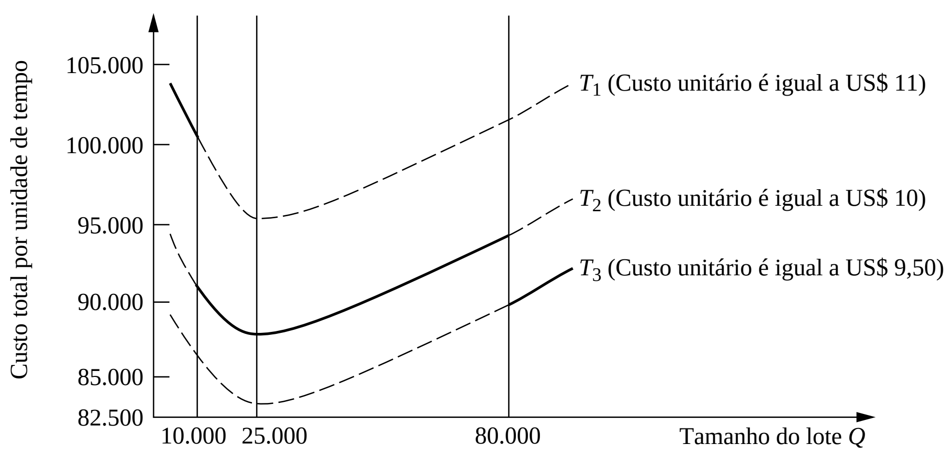
$$\sqrt{\frac{(2)(8.000)(12.000)}{0{,}30}} = 25.298.$$

Se h não fosse independente do custo unitário dos itens, então o valor que minimiza Q seria ligeiramente diferente para as diversas curvas. Esse valor que minimiza Q é um valor viável para a função de custo T_2. Para qualquer Q fixo, $T_2 < T_1$, de modo que T_1 pode ser eliminado de quaisquer outras considerações. Entretanto, T_3 não pode ser descartado imediatamente. Seu valor viável mínimo (que ocorre em Q = 80.000) deve ser comparado a T_2 calculado em 25.298 (que corresponde a US$ 87.589). Como T_3 para 80.000 equivale a US$ 89.200, é melhor produzir em quantidades de 25.298, de modo que essa quantidade seja o valor ótimo para esse conjunto de descontos por quantidade.

Se o desconto por quantidade nos levar a um custo unitário igual a US$ 9 (em vez de US$ 9,50) quando a produção excede 80.000, então T_3 em 80.000 seria igual a 85.200 e o volume ótimo de produção passaria a ser 80.000.

Embora essa análise seja referente a um problema específico, a mesma abordagem se aplica a qualquer problema similar. Eis uma síntese do procedimento geral.

■ FIGURA 18.3
Custo total por unidade de tempo para o exemplo do alto-falante com descontos por quantidade.



1. Para cada custo unitário c_j disponível, use a fórmula EOQ para o modelo EOQ para calcular seu volume ótimo de pedidos Q^*_j.
2. Para cada c_j em que Q^*_j se encontra dentro do intervalo permissível de volume encomendado para c_j, calcule o custo total correspondente por unidade de tempo T_j.
3. Para cada c_j em que Q^*_j não se encontra dentro desse intervalo possível, determine o volume de pedidos Q_j que se encontra no ponto extremo desse intervalo possível que se encontre mais próximo a Q^*_j. Calcule o custo total por unidade de tempo T_j para Q_j e c_j.
4. Compare T_j obtidos para todos c_j e escolha T_j mínimo. Em seguida, escolha o volume de pedidos Q_j obtido nas etapas 2 ou 3 que forneça esse T_j mínimo.

Uma análise similar pode ser usada para outros tipos de descontos por quantidade, tais como descontos incrementais por quantidade na qual um custo c_0 é incorrido para as primeiras q_0 unidades, c_1 para as q_1 unidades seguintes e assim por diante.

Alguns Gabaritos em Excel Úteis

Para sua conveniência, incluímos, no CD-ROM, cinco gabaritos em Excel para os modelos EOQ no arquivo Excel deste capítulo. Dois desses gabaritos são para o modelo EOQ básico. Em ambos os casos, introduzimos dados básicos (d, K e h), bem como o prazo de entrega para as entregas e o número de dias de trabalho por ano da empresa. O gabarito calcula então os gastos anuais totais da empresa para custos de implantação e de custos de manutenção de estoque, bem como a soma desses dois custos (o *custo total variável*). Ele também calcula o *ponto para fazer novos pedidos* — o nível de estoques no qual o pedido precisa ser colocado para reabastecer estoques de modo que o reabastecimento chegará quando o nível de estoques cair para 0. Um gabarito (a *versão Solver*) permite que você introduza uma quantidade de pedidos qualquer e depois visualize quais seriam os custos anuais e o ponto para fazer novo pedido. Essa versão permite que você use o Excel Solver para encontrar a quantidade ótima de pedidos. O segundo gabarito (a *versão analítica*) usa a fórmula EOQ para obter a quantidade ótima de pedidos.

Também é fornecido o par correspondente de gabaritos para o modelo EOQ com falta de produto planejada. Após introduzir os dados (inclusive o custo de escassez unitário p), cada um desses gabaritos vai obter os diversos custos anuais (inclusive o custo de escassez anual). Com a versão Solver, você também pode introduzir valores experimentais da quantidade de pedidos Q e da escassez máxima $Q - S$ ou então encontrar valores ótimos, ao passo que a versão analítica usa as fórmulas para Q^* e $Q^* - S^*$ para obter os valores ótimos. O nível de estoque máximo correspondente S^* também é incluído nos resultados.

O gabarito final é uma versão analítica para o modelo EOQ com descontos por quantidade. Esse gabarito inclui o refinamento de que o custo de manutenção de estoque unitário h é proporcional ao custo unitário c, logo

$$h = Ic,$$

em que o fator de proporcionalidade I é chamado *taxa de custo de manutenção de estoque.* Portanto, os dados introduzidos incluem I juntamente com d e K. Você também precisa introduzir o número de categorias de desconto (em que a categoria de menor volume sem nenhum desconto também é uma delas), bem como o preço unitário e intervalos de volumes de pedidos para cada uma das categorias. O gabarito encontra então a quantidade de pedidos viável que minimiza o custo anual total para cada categoria e também mostra os custos anuais individuais (inclusive o custo de compra anual) que resultariam. Usando essas informações, o gabarito identifica o volume ótimo geral de pedidos e o custo anual total resultante.

Todos esses gabaritos podem ser úteis para calcular rapidamente uma grande quantidade de informações após a introdução de dados básicos para o problema. Entretanto, talvez um emprego mais importante seja o de realizar análise de sensibilidade desses dados. Você poderá ver imediatamente como os resultados mudariam para qualquer alteração específica nos dados introduzindo os novos valores de dados na planilha. Fazer isso repetidamente para uma série de mudanças nos dados é uma maneira conveniente de realizar análise de sensibilidade.

Observações sobre Modelos EOQ

1. Se for suposto que o custo unitário de um item seja constante ao longo do tempo independentemente do tamanho do lote (como acontece com os dois primeiros modelos EOQ), o custo unitário não aparece na solução ótima para o tamanho do lote. Esse resultado ocorre porque independentemente de qual política de estoques seja usada, é necessário o mesmo número de unidades por unidade de tempo e, portanto, esse custo por unidade de tempo é fixo.
2. A análise dos modelos EOQ parte do pressuposto de que o tamanho do lote Q seja constante de ciclo em ciclo. O tamanho de lote *ótimo* resultante Q^*, na verdade, minimiza o custo total por unidade de tempo para qualquer ciclo e, assim, a análise mostra que esse tamanho de lote constante deveria ser usado de ciclo em ciclo mesmo se não for suposto um tamanho de lote constante.
3. O nível de estoque ótimo no qual os estoques deveriam ser reabastecidos jamais podem ser maiores que zero segundo esses modelos. Esperar que o nível de estoques chegue a zero (ou menos de zero quando for permitida a falta de produto planejada) reduz os custos de manutenção de estoque, bem como a freqüência de incorrer no custo de implantação K. Entretanto, se as hipóteses de *uma taxa de demanda constante conhecida* e *o volume de pedidos for chegar exatamente quando desejado* (por causa de um prazo de entrega constante) não forem completamente satisfeitas, pode ser prudente planejar a existência de algum "estoque de segurança" quando os estoques estiverem programados para ser reabastecidos. Isso é feito aumentando-se o ponto para fazer novos pedidos acima daquele implícito pelo modelo.
4. As hipóteses básicas dos modelos EOQ são bastante exigentes. Elas raramente são satisfeitas completamente na prática. Por exemplo, mesmo quando a taxa de demanda constante for planejada (como acontece com a linha de produção no exemplo dos alto-falantes para TVs na Seção 18.1), interrupções e variações na taxa de demanda ainda são prováveis de ocorrer. Também é muito difícil satisfazer a hipótese que a quantidade de pedidos feitos para reabastecer estoques chegue exatamente quando desejado. Embora o cronograma possa solicitar um prazo de entrega constante, muitas vezes ocorrerão variações nos prazos de entrega reais. Felizmente, verificou-se que os modelos EOQ são robustos no sentido que eles geralmente ainda fornecem resultados aproximadamente ótimos mesmo quando suas hipóteses são apenas aproximações grosseiras da realidade. Esta é uma razão-chave pela qual esses modelos são tão usados na prática. No entanto, naqueles casos em que as hipóteses são violadas significativamente, é importante realizar alguma análise preliminar para avaliar a adequação de um modelo EOQ antes de ele ser usado. Essa análise preliminar deveria se concentrar em calcular o custo total por unidade de tempo fornecido pelo modelo para diversos volumes de pedidos e então avaliar como esse custo mudaria sob hipóteses mais realistas.

Diferentes Tipos de Demanda por um Produto

O Exemplo 2 (distribuição de bicicletas no atacado) introduzido na Seção 18.1 se concentrou no controle de estoques para um modelo de bicicleta. A demanda por esse produto é gerada pelos clientes do atacadista (diversos varejistas) que compram essas bicicletas para reabastecer seus estoques de acordo com suas próprias programações. O atacadista não tem nenhum controle sobre essa demanda. Como esse modelo é vendido separadamente dos demais modelos, sua demanda não depende nem mesmo da demanda por qualquer um dos demais produtos da empresa. Tal demanda é conhecida como **demanda independente**.

A situação é diversa para o exemplo dos alto-falantes introduzido na Seção 18.1. Nesse caso, o produto considerado — alto-falantes para TVs — é apenas um componente sendo montado no produto final da empresa — televisores. Conseqüentemente, a demanda pelos alto-falantes depende da demanda por televisores. O padrão dessa demanda por alto-falantes é determinado internamente pelo cronograma de produção que a empresa estabelece para os televisores ajustando a taxa de produção para a linha de produção que fabrica os aparelhos. Tal demanda é conhecida como **demanda dependente**.

A empresa fabricante de televisores produz um número considerável de produtos — várias peças e subconjuntos — que se tornam componentes dos televisores. Assim como os alto-falantes, esses diversos produtos também são **produtos de demanda dependente**.

Em virtude das dependências e inter-relações envolvidas, gerenciar os estoques de produtos de demanda dependentes pode ser consideravelmente mais complicado que para produtos de demanda independentes. Uma técnica popular para auxiliar nessa tarefa é a do **planejamento de necessidades de materiais**, abreviatura (em inglês) **MRP**. O MRP é um sistema baseado em computador para planejamento, programação e controle da produção de todos os componentes de um produto final. O sistema começa "explodindo" o produto, subdividindo-o em todos seus subconjuntos e depois em todos os seus componentes individuais. É desenvolvida então uma programação de produção, usando a demanda e o prazo de entrega para cada componente para determinar a demanda e o prazo de entrega para o componente subseqüente no processo. Além de uma *programação-mestre de produção* para o produto final, uma *lista de materiais* fornece informações detalhadas sobre todos seus componentes. Registros de condições do estoque fornecem os níveis de estoques atuais, número de unidades no pedido etc. para todos os componentes. Quando for preciso encomendar mais de uma unidade de um componente, o sistema MRP gera automaticamente um pedido de compra para o fornecedor ou então uma ordem de produção para o departamento interno que fabrica o componente.[2]

O Papel do Controle de Estoques *Just-In-Time* (JIT)

Quando o modelo EOQ básico foi usado para calcular o tamanho ótimo do lote de produção para o exemplo dos alto-falantes, obteve-se uma quantidade muito grande (25.298 alto-falantes). Isso permite implantações relativamente infreqüentes para iniciar a produção de lotes de peças (somente uma vez a cada 3,2 meses). Porém, isso também provoca níveis de estoques muito grandes (12.649 alto-falantes), que leva a um grande custo de manutenção de estoque total por ano de mais de US$ 45.000.

A razão básica para esse grande custo é o alto custo de implantação de $K =$ US$ 12.000 para a produção de cada lote de peças. O custo de implantação é tão considerável porque as instalações de produção precisam ser configuradas novamente a partir do zero cada uma das vezes. Conseqüentemente, mesmo com menos de quatro lotes de peças por ano, o custo de implantação anual está acima de US$ 45.000, exatamente como os custos de manutenção de estoque anuais.

Em vez de continuar a tolerar no futuro um custo de implantação de US$ 12.000 cada uma das vezes, outra opção para a empresa seria procurar maneiras de reduzir esse custo de implantação. Uma possibilidade seria desenvolver métodos para mudar rapidamente o emprego das máquinas de uma finalidade para outra. Outra seria dedicar um grupo de instalações de produção para a produção de alto-falantes de modo que elas permaneceriam configuradas entre a produção de um lote de peças em preparação para o seguinte sempre que necessário.

Suponhamos que o custo de implantação pudesse ser drasticamente reduzido, de US$ 12.000 para $K =$ US$ 120. Isso reduziria o tamanho ótimo de lote de produção de 25.298 alto-falantes para apenas $Q^* = 2.530$ alto-falantes e, portanto, a produção de um novo lote de peças durando pouco tempo seria iniciada mais de três vezes por mês. Isso também reduziria o custo de implantação anual, como também o custo de manutenção de estoque anual de mais de US$ 45.000, para apenas um pouco mais de US$ 4.500 cada. Com uma produção de lotes de peças tão freqüente (porém, barata), os alto-falantes seriam produzidos praticamente *just-in-time* para sua montagem nos televisores.

---

[2] Uma série de artigos nas páginas 32-44 da edição de setembro de 1996 da *IIE Solutions* fornece mais informações sobre o MRP.

Just-in-time, na verdade, é uma filosofia bem desenvolvida para controle de estoques. Um sistema de estoques ***just-in-time*** **(JIT)** coloca grande ênfase na redução de níveis de estoques para o estritamente necessário e, portanto, fornecendo os itens exatamente no momento em que são precisos. Essa filosofia foi inicialmente desenvolvida no Japão, na Toyota Company no final dos anos de 1950, e recebeu parte do crédito pelos extraordinários ganhos na produtividade japonesa durante grande parte do século XX. A filosofia também se tornou popular em outras partes do mundo, inclusive nos Estados Unidos, em anos mais recentes.[3]

Embora a filosofia *just-in-time* seja mal-interpretada como incompatível com o emprego de um modelo EOQ (já que esse último fornece uma quantidade de pedidos maior quando o custo de implantação for grande), na realidade, eles são complementares. Um sistema de estoques JIT se concentra em descobrir maneiras de reduzir muito os custos de implantação de modo que o volume ótimo de pedidos será pequeno. Um sistema destes também procura formas de reduzir o tempo de espera para a entrega de um pedido, já que isso reduz a incerteza em relação ao número de unidades que serão precisas quando ocorre a entrega. Outra ênfase está na melhoria da manutenção preventiva de modo que as instalações de produção necessárias se encontrarão prontas para produzir as unidades quando necessário. Outra ênfase seria na melhoria do processo de produção para garantir boa qualidade. Fornecer precisamente o número de unidades exatamente a tempo não descarta a possibilidade de termos unidades defeituosas.

Em termos mais genéricos, o foco da filosofia *just-in-time* é *evitar desperdício* seja lá onde ele possa vir a ocorrer no processo produtivo. Uma forma de desperdício é estoque desnecessário. Outras são grandes custos de implantação desnecessários, prazos de entrega longos, instalações de produção que não se encontram em funcionamento quando preciso e itens defeituosos. Minimizar essas formas de desperdício é um componente fundamental do controle de estoques de qualidade superior.[4]

18.4 MODELO DETERMINÍSTICO DE REVISÃO PERIÓDICA

A seção anterior explorou o modelo EOQ básico e algumas de suas variações. Os resultados foram dependentes da hipótese de uma taxa de demanda constante. Quando essa hipótese é relaxada, isto é, quando se permite que os volumes que precisam ser retirados do estoque possam variar de um período a outro, a *fórmula EOQ* não garante mais uma solução de custo mínimo.

Considere o seguinte modelo de revisão periódica. Deve-se planejar para os n períodos seguintes em relação a quanto produzir (se efetivamente necessário) ou encomendar para reabastecer estoques no início de cada um dos períodos. A ordem para reabastecer estoques pode envolver a *compra* das unidades necessárias ou sua *produção*, porém o último caso é bem mais comum com aplicações desse modelo e, portanto, usaremos basicamente a terminologia *produzir* as unidades. As demandas para os respectivos períodos são *conhecidas* (porém *não* as mesmas em cada período) e são representadas por

$$r_i = \text{demanda no período } i, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Essas demandas têm de ser atendidas a tempo. Inicialmente não há nenhum estoque disponível porém ainda há tempo para uma entrega no início do período 1.

Os custos inclusos nesse modelo são similares àqueles para o modelo EOQ básico:

---

[3] Para mais informações sobre aplicações do JIT nos Estados Unidos, ver WHITE, R. E. et al. JIT Manufacturing: A Survey of Implementations in Small and Large U.S. Manufacturing. *Management Science,* v. 45, p. 1-15, 1999.

[4] Para outras informações sobre JIT, recomendamos LIEBERMAN, M. B.; DEMEESTER, L. Inventory Reduction and Productivity Growth: Linkages in the Japanese Automotive Industry. *Management Science*, v. 45, p. 466-485, 1999, bem como as páginas 1.246-1.257 do volume 43 e páginas 1.664-1.678 do volume 45 desse mesmo periódico. Um exame crítico das vantagens, limitações e contradições do JIT pode ser encontrado em ZANGWILL, W. T. The Limits of Japanese Production Theory. *Interfaces*, v. 22, n. 5, p. 14-25, set./out. 1992.

$K =$ custo de implantação para produzir ou comprar um número qualquer de unidades para reabastecer estoques no início do período,

$c =$ custo unitário para produzir ou comprar cada unidade,

$h =$ custo de manutenção de estoque para cada unidade que sobra em estoque no final do período.

Note que esse custo de manutenção de estoque h é calculado somente em estoque que sobra no final de um período. Também existem custos de manutenção de estoque para unidades que se encontram em estoque para uma parte do período antes de ser retiradas para atender à demanda. Entretanto, esses são custos *fixos* que são independentes da política de estoques e, portanto, não são relevantes para esta análise. Somente os custos *variáveis*, que são afetados pela política de estoques que for escolhida, por exemplo, os custos de manutenção de estoque extras que são incorridos por transferir estoques de um período para o seguinte, são relevantes na seleção da política de estoques.

Pelo mesmo motivo, o custo unitário c é um custo fixo irrelevante, ao longo de todos os períodos de tempo, todas as políticas de estoques produzem o mesmo número de unidades ao mesmo custo. Assim, c será eliminado da análise daqui em diante.

O objetivo é minimizar o custo total ao longo de n períodos. Isso é feito ignorando-se os custos fixos e minimizando o custo variável total ao longo de n períodos, conforme ilustrado pelo exemplo a seguir.

Exemplo

Um fabricante de aviões especializou-se na produção de aviões de pequeno porte. Ele acaba de receber uma encomenda de uma grande empresa de dez jatinhos executivos personalizados para uso do alto escalão da empresa. O pedido estabelece o seguinte: três dos aviões devem ser entregues (e pagos) durante os meses de inverno vindouros (período 1), dois mais deverão ser entregues na primavera (período 2), outros três durante o verão (período 3) e os dois últimos durante o outono (período 4).

Preparar as instalações de produção para atender às especificações do cliente para essas aeronaves requer um custo de implantação de US$ 2 milhões. O fabricante tem capacidade para produzir todas as dez aeronaves dentro de alguns meses, quando o inverno ainda não terá terminado. Entretanto, isso implicaria manter sete aeronaves em estoque, a um custo de US$ 200.000 por avião por período, até alcançar suas datas de entrega programadas. Para reduzir ou eliminar esses substanciais custos de manutenção de estoque, pode valer a pena produzir um número menor dessas aeronaves agora e depois repetir a implantação (incorrendo novamente no custo de US$ 2 milhões) em algum ou todos os períodos subseqüentes para produzir quantidades menores adicionais. A gerência gostaria de determinar a programação de produção menos onerosa para atender a esse pedido.

Portanto, usando a notação do modelo, as demandas para esse avião em particular durante os próximos quatro períodos (estações) são

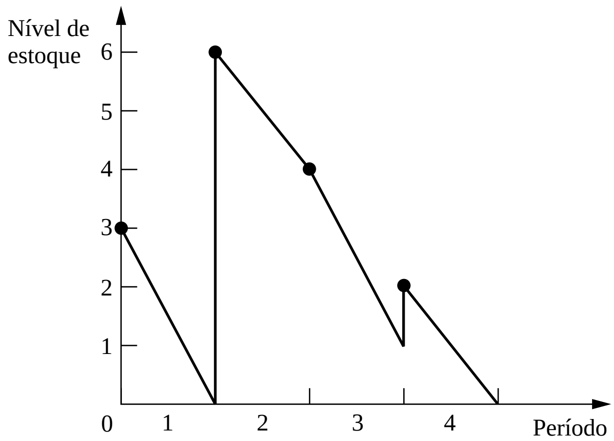
$$r_1 = 3, \qquad r_2 = 2, \qquad r_3 = 3, \qquad r_4 = 2.$$

Adotando como unidade de referência milhões de dólares, os custos relevantes são

$$K = 2, \qquad h = 0{,}2.$$

O problema é determinar quantos aviões produzir (se efetivamente algum) durante o início de cada um dos quatro períodos de modo a minimizar o custo variável total.

O alto custo de implantação K fornece alto incentivo a não produzir aviões todos os períodos e preferencialmente apenas uma única vez. Entretanto, o significativo custo de manutenção de estoque h torna indesejável manter um grande estoque produzindo toda a demanda para os quatro períodos (dez aeronaves) logo de início. Talvez a melhor abordagem seja uma estratégia intermediária na qual os aviões seriam produzidos em mais de uma oportunidade, mas menos que quatro vezes. Por exemplo, uma solução viável (porém, não ótima) é representada na Figura 18.4, que mostra a evolução do nível de estoques ao longo do próximo ano resultante da produção de três aviões no início do primeiro período, seis



■ FIGURA 18.4
Os níveis de estoque resultantes de um modelo de programação de produção para o exemplo das aeronaves.

aviões no início do segundo período e um avião no início do quarto período. Os pontos indicam os níveis de estoques após qualquer produção no início dos quatro períodos.

Como poderíamos encontrar a programação ótima? Para esse modelo em geral, a produção (ou compra) é automática no período 1, no entanto, deve ser decidido se devemos produzir em cada um dos demais $n - 1$ períodos. Portanto, uma abordagem para solucionar esse modelo é enumerar, para cada uma das 2^{n-1} combinações de decisões de produção, as possíveis quantidades que podem ser produzidas em cada período no qual deve ocorrer a produção. Essa abordagem é bastante inconveniente, mesmo para n de tamanho moderado e, assim, é desejável um método mais eficiente. Um método destes é descrito a seguir em termos gerais e, depois, retornaremos para encontrar a programação de produção ótima para o exemplo. Embora o método geral possa ser usado quando se produz ou quanto se compra para reabastecer estoques, adotaremos agora apenas a terminologia de produzir para fins de consistência.

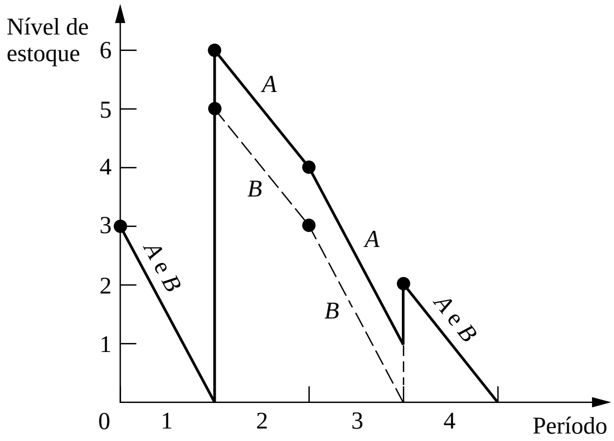
Algoritmo

O segredo para desenvolver um algoritmo eficiente para encontrar uma *política de estoques ótima* (ou, de forma equivalente, uma *programação de produção ótima*) para o modelo dado anteriormente é o seguinte *insight* sobre a natureza de uma política ótima.

> Uma política (programação de produção) *somente* é ótima quando o nível de estoques for *zero*.

Para ilustrar por que esse resultado é verdadeiro, consideremos a política mostrada na Figura 18.4 para o exemplo. Vamos chamá-la política *A*. A política *A* viola a caracterização anterior de uma política ótima, pois a produção ocorre no início do período 4 quando o nível de estoques é *maior que zero* (isto é, um avião). Entretanto, essa política pode ser facilmente ajustada para satisfazer a caracterização dada simplesmente produzindo um avião a menos no período 2 e um avião a mais no período 4. Essa política ajustada (vamos chamá-la *B*) é indicada pela reta tracejada na Figura 18.5 toda vez que *B* difere de *A* (a reta contínua). Observe agora que a política *B deve* ter um custo total menor que a política *A*. Os custos de implantação (e os custos de produção) para ambas as políticas são os mesmos. Entretanto, o custo de manutenção de estoque é menor para *B* que para *A*, porque *B* possui menos estoque que *A* nos períodos 2 e 3 (e o mesmo estoque nos demais períodos). Logo, *B* é melhor que *A* e, portanto, *A* não pode ser uma política ótima.

Essa caracterização de políticas ótimas pode ser usada para identificar políticas que não são ótimas. Além disso, como ela implica que as únicas opções para a quantidade produzida no início do *i*-ésimo período são 0, r_i, $r_i + r_{i+1}, \ldots$ ou $r_i + r_{i+1} + \cdots + r_n$, ela pode ser



■ FIGURA 18.5
Comparação entre duas políticas de estoques (programações de produção) para o exemplo das aeronaves.

explorada para obter um algoritmo eficiente que está relacionado com a abordagem de *programação dinâmica determinística* descrita na Seção 10.3.

Particularmente, define

C_i = custo variável total de uma política ótima para períodos i, $i + 1, \ldots, n$ quando o período i inicia com estoque zero (antes de começar a produzir), para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Usando a abordagem da programação dinâmica para ir resolvendo *voltando para trás*, período por período, esses valores C_i podem ser encontrados, encontrando-se primeiramente C_n, depois C_{n-1} e assim por diante. Dessa forma, após $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_{i+1}$ serem encontrados, então C_i pode ser encontrado da *relação recursiva*

$$C_i = \underset{j=i,\, i+1,\, \ldots,\, n}{\text{mínimo}} \{C_{j+1} + K + h[r_{i+1} + 2r_{i+2} + 3r_{i+3} + \cdots + (j - i)r_j]\},$$

em que j pode ser interpretado como um índice que representa o (final do) período quando o estoque chega a um nível zero pela primeira vez após a produção no início do período i. No intervalo de tempo do período i ao período j, o termo com coeficiente h representa o custo de manutenção de estoque total ao longo desse intervalo. Quando $j = n$, o termo $C_{n+1} = 0$. O *valor minimizador* de j indica que se o nível de estoques de fato cair para zero após entrar no período i, então a produção no período i deve atender toda a demanda do período i até esse período j.

O algoritmo para solução do modelo consiste basicamente em encontrar, um de cada vez, $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1$. Para $i = 1$, o valor minimizador de j indica então que a produção no período 1 deve atender à demanda ao longo do período j, de modo que a segunda produção será no período $j + 1$. Para $i = j + 1$, o novo valor minimizador de j identifica o intervalo de tempo abrangido pela segunda produção e assim por diante até chegar ao final. Ilustraremos essa abordagem com o exemplo.

A aplicação desse algoritmo é muito mais rápida que a abordagem da programação dinâmica completa.[5] Assim como na programação dinâmica, $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_2$ devem ser encontrados antes de se obter C_1. Entretanto, o número de cálculos é muito menor e o número de volumes de produção possíveis é reduzido em muito.

[5] Entretanto, a abordagem de programação dinâmica completa é útil para solucionar *generalizações* do modelo (por exemplo, custo de produção *não-linear* e funções de custo de manutenção de estoque) em que o algoritmo dado não é mais aplicável. (Ver Problemas 18.4-3 e 18.4-4 para exemplos nas quais a programação dinâmica poderia ser usada para lidar com generalizações do modelo.)

Aplicação do Algoritmo ao Exemplo

Voltando ao exemplo das aeronaves, consideremos primeiramente o caso de encontrar C_4, o custo de política ótima do início do período 4 ao final do horizonte de planejamento:

$$C_4 = C_5 + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Para encontrar C_3, temos de considerar dois casos, a saber, a primeira vez após o período 3 quando o estoque chega ao nível zero ocorre: (1) no final do terceiro período ou (2) no final do quarto período. Na relação recursiva para C_3, esses dois casos correspondem a (1) $j = 3$ e (2) $j = 4$. Represente os custos correspondentes (o lado direito da relação recursiva com esse j), respectivamente, por $C_3^{(3)}$ e $C_3^{(4)}$. A política associada a $C_3^{(3)}$ induz a produzir somente para o período 3 e depois seguir a política ótima para o período 4, ao passo que a política associada a $C_3^{(4)}$ induz a produzir nos períodos 3 e 4. O custo C_3 é então o mínimo entre $C_3^{(3)}$ e $C_3^{(4)}$. Esses casos são refletidos pelas políticas dadas na Figura 18.6.

$$C_3^{(3)} = C_4 + 2 = 2 + 2 = 4.$$
$$C_3^{(4)} = C_5 + 2 + 0{,}2(2) = 0 + 2 + 0{,}4 = 2{,}4.$$
$$C_3 \quad = \text{mín}\{4, 2{,}4\} = 2{,}4.$$

Portanto, se o nível de estoques cair a zero após entrar no período 3 (e, portanto, deveria ocorrer produção), a produção no período 3 deveria atender à demanda dos períodos 3 e 4.

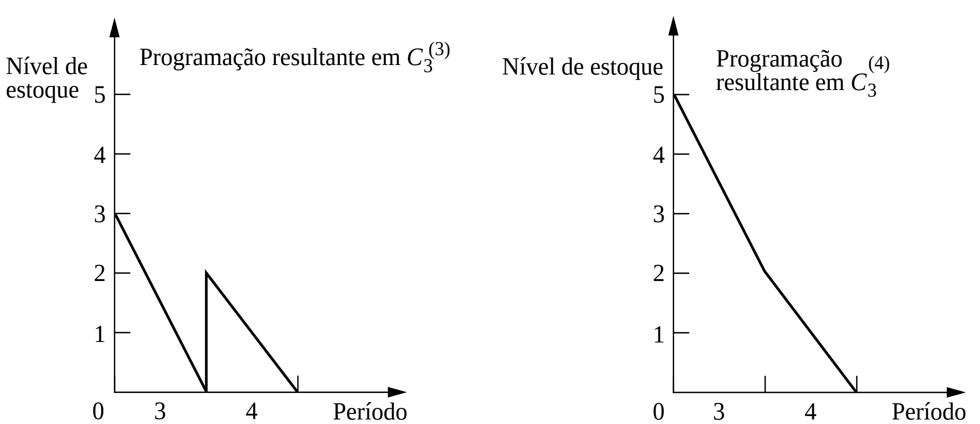
Para encontrar C_2, temos de considerar três casos, isto é, a primeira vez após o período 2 quando o estoque chega ao nível zero ocorre: (1) no final do segundo período, (2) no final do terceiro período ou (3) no final do quarto período. Na relação recursiva para C_2, esses casos correspondem a: (1) $j = 2$, (2) $j = 3$ e (3) $j = 4$, em que os custos correspondentes são, respectivamente, $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ e $C_2^{(4)}$. O custo C_2 é então o mínimo de $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ e $C_2^{(4)}$.

$$C_2^{(2)} = C_3 + 2 = 2{,}4 + 2 = 4{,}4.$$
$$C_2^{(3)} = C_4 + 2 + 0{,}2(3) = 2 + 2 + 0{,}6 = 4{,}6.$$
$$C_2^{(4)} = C_5 + 2 + 0{,}2[3 + 2(2)] = 0 + 2 + 1{,}4 = 3{,}4.$$
$$C_2 \quad = \text{mín}\{4{,}4, 4{,}6, 3{,}4\} = 3{,}4.$$

Conseqüentemente, se a produção ocorrer no período 2 (porque o nível de estoques cai a zero), essa produção deveria atender à demanda de todos os períodos restantes.

Finalmente, para encontrar C_1, devemos considerar quatro casos, isto é, a primeira vez após o período 1 quando o estoque chega a zero ocorre no final do: (1) primeiro período, (2) segundo período, (3) terceiro período ou (4) quarto período. Esses casos correspondem a $j = 1, 2, 3, 4$ e aos custos $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(4)}$, respectivamente. O custo C_1 é então o mínimo de $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ e $C_1^{(4)}$.

■ FIGURA 18.6
Programações de produção alternativas quando é necessário se produzir no início do período 3 para o exemplo das aeronaves.



$C_1^{(1)} = C_2 + 2 = 3{,}4 + 2 = 5{,}4.$
$C_1^{(2)} = C_3 + 2 + 0{,}2(2) = 2{,}4 + 2 + 0{,}4 = 4{,}8.$
$C_1^{(3)} = C_4 + 2 + 0{,}2[2 + 2(3)] = 2 + 2 + 1{,}6 = 5{,}6.$
$C_1^{(4)} = C_5 + 2 + 0{,}2[2 + 2(3) + 3(2)] = 0 + 2 + 2{,}8 = 4{,}8.$
$C_1 \quad = \text{mín}\{5{,}4,\ 4{,}8,\ 5{,}6,\ 4{,}8\} = 4{,}8.$

Note que $C_1^{(2)}$ e $C_1^{(4)}$ empatam como mínimo, resultando em C_1. Isso significa que as políticas correspondentes para $C_1^{(2)}$ e $C_1^{(4)}$ empatam como políticas ótimas. A política $C_1^{(4)}$ diz para produzir o suficiente no período 1 para atender à demanda para todos os quatro períodos. A política $C_1^{(2)}$ atende somente à demanda ao longo do período 2. Já que essa última política apresenta o nível de estoques caindo para zero no final do período 2, o resultado C_3 é usado a seguir, isto é, produzir o suficiente no período 3 para atender às demandas para os períodos 3 e 4. As programações de produção resultantes são sintetizadas a seguir.

Programações de Produção Ótimas

1. Produzir dez aeronaves no período 1.

Custo variável total = US$ 4,8 milhões.

2. Produzir cinco aeronaves no período 1 e cinco aeronaves no período 3.

Custo variável total = US$ 4,8 milhões.

Caso você queira ver um exemplo menor aplicando esse algoritmo, é possível encontrar um na seção de Exemplos Trabalhados do CD-ROM.

18.5 MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESTOQUES MULTINÍVEIS PARA GERENCIAMENTO DE CADEIAS DE ABASTECIMENTO

Nossa crescente economia global tem provocado uma drástica mudança no controle de estoques nos últimos anos. Agora, mais do que nunca, os estoques de muitos fabricantes estão espalhados pelo mundo. Mesmo os estoques de determinado produto podem estar dispersos globalmente.

Os estoques de um fabricante podem ser armazenados inicialmente no ponto ou pontos de fabricação (um *nível* do sistema de estoques), depois em depósitos regionais ou nacionais (um segundo nível), em seguida em centros de distribuição de campo (um terceiro nível) e assim por diante. Portanto, cada estágio no qual o estoque é mantido na progressão por meio de um sistema de estoques multiestágio é chamado um **nível** do sistema de estoques. Um sistema destes com vários níveis de estoque é conhecido como um **sistema de estoques multiníveis**. No caso de uma empresa totalmente integrada que fabrica seus produtos, bem como os vende no varejo, seus níveis se estenderão a suas lojas de varejo.

É necessária certa coordenação entre os estoques de qualquer produto em particular nos diferentes níveis. Já que o estoque em cada nível (exceto pelo último) é usado para reabastecer o estoque no nível seguinte, conforme a necessidade, a quantidade de estoques necessária no momento em um nível é afetada pela brevidade em que o reabastecimento será necessário nos diversos locais para o nível seguinte.

A análise de sistemas de estoques multiníveis é um grande desafio. Entretanto, tem sido realizada considerável pesquisa inovadora (com suas origens remontando a meados do século XX) para desenvolver modelos de estoques multiníveis tratáveis. Com a crescente proeminência dos sistemas de estoques multiníveis, isso, sem dúvida nenhuma, continuará a ser uma ativa área de pesquisa.

Outro conceito fundamental que surgiu na economia global é aquele do *gerenciamento de cadeias de abastecimento*. Esse conceito leva o gerenciamento de um sistema de estoques multiníveis um passo além, considerando também o que precisa acontecer para, primeiramente, introduzir um produto no sistema de estoques. Entretanto, assim como no controle de estoques, o principal propósito ainda é o de ganhar a batalha competitiva contra as demais empresas, tornando disponível o produto aos clientes o mais rápido possível.

A **cadeia de abastecimento** é uma rede de instalações que obtém matérias-primas, as transforma em bens intermediários e depois em produtos finais e, finalmente, entrega os produtos aos clientes por um sistema de distribuição que inclui um sistema de estoques (provavelmente multinível). Portanto, a cadeia de abastecimento envolve aquisição, manufatura e distribuição. Já que são necessários estoques em todos esses estágios, o controle de estoques eficiente é um elemento-chave no gerenciamento da cadeia de abastecimento. Para fazer pedidos de forma eficiente, é necessário compreender as ligações e inter-relações de todos os elementos-chave da cadeia de abastecimento. Dessa forma, o gerenciamento integrado da cadeia de abastecimento tornou-se um fator fundamental de sucesso para algumas das empresas líderes de hoje.

A Hewlett-Packard Corporation foi uma das pioneiras no uso de pesquisa operacional para ajudar a implementar o gerenciamento eficiente de cadeias de abastecimento por toda a corporação. A Seção 18.8 descreverá esse caso bem-sucedido.

Para auxiliar no gerenciamento de cadeias de abastecimento, hoje em dia muito provavelmente os modelos de estoques multiníveis incluirão níveis que incorporam a parte bem inicial da cadeia de abastecimento, bem como os níveis para distribuição do produto acabado. Assim, o primeiro nível deve ser o estoque de matérias-primas ou componentes que serão usados para fabricar o produto. Um segundo nível poderia ser o estoque de subconjuntos que são fabricados dessas matérias-primas ou componentes em preparação para posterior montagem dos subconjuntos no produto final. Isso poderia então levar aos níveis para a distribuição do produto acabado, partindo da armazenagem no ponto ou pontos de fabricação, depois para depósitos regionais ou nacionais, em seguida para centros de distribuição de campo e assim por diante.

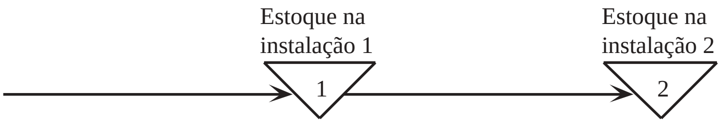
O objetivo usual para um modelo de estoques multiníveis é o de coordenar os estoques nos diversos níveis de modo a minimizar o custo total associado a todo o sistema de estoques multiníveis. Este é um objetivo natural para uma corporação totalmente integrada que opera todo esse sistema. Talvez também fosse um objetivo adequado quando certos níveis são gerenciados por fornecedores ou então por clientes da empresa. A razão é que um conceito-chave do gerenciamento de cadeias de abastecimento é que uma empresa deve-se esforçar ao máximo para estabelecer uma relação de parceria informal com seus fornecedores e clientes que permita a eles maximizarem de forma conjunta o lucro total de todos. Isso normalmente leva ao estabelecimento de contratos de fornecimento mutuamente benéficos que possibilitam reduzir o custo total de operação de um sistema de estoques multiníveis gerenciado em conjunto.

A análise de modelos de estoques multiníveis tende a ser consideravelmente mais complicada do que aquelas para modelos de estoques com uma única instalação considerado em qualquer outro ponto neste capítulo. Entretanto, apresentamos dois modelos de estoques multiníveis relativamente tratáveis a seguir que ilustram os conceitos relevantes.

Modelo para um Sistema Serial de Dois Níveis

O sistema de estoques multiníveis mais simples possível é aquele em que existem apenas dois níveis e uma única instalação em cada nível. A Figura 18.7 representa um sistema, no qual o estoque na instalação 1 é usado para reabastecer periodicamente o estoque na instalação 2. Por exemplo, a instalação 1 poderia ser uma fábrica produzindo certo produto com produção ocasional de lotes de peças e a instalação 2 poderia ser o centro de distribuição para esse produto. Alternativamente, a instalação 2 poderia ser uma fábrica produzindo o produto e depois a instalação 1 é outra instalação onde os próprios componentes necessários para fabricar esse produto são fabricados ou recebidos de fornecedores.

Já que os itens na instalação 1 e instalação 2 podem ser diferentes, iremos nos referir a eles, respectivamente, como item 1 e item 2. As unidades dos itens 1 e 2 são definidas de modo que exatamente uma unidade do item 1 será necessária para obter uma unidade do item 2. Por exemplo, se o item 1 for constituído coletivamente pelos componentes necessá-



■ FIGURA 18.7
Um sistema de estoques serial de dois níveis.

rios para fabricar o produto final (item 2), então um conjunto de componentes necessário para fabricar uma unidade do produto final é definido como uma unidade do item 1.

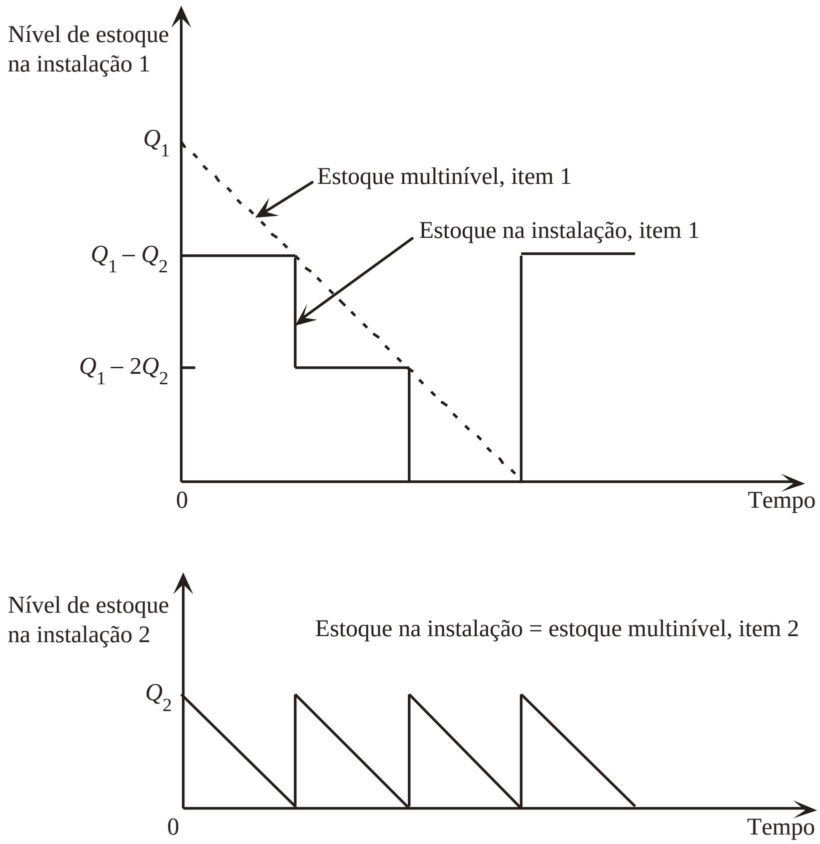
O modelo faz as seguintes hipóteses.

Hipóteses para o Modelo Serial de Dois Níveis

1. As hipóteses do *modelo EOQ básico* (ver Seção 18.3) são válidas para a instalação 2. Portanto, existe uma taxa de demanda constante conhecida de d unidades por unidade de tempo, um pedido de Q_2 unidades é feito a tempo para reabastecer estoques quando o nível de estoques cai a zero e não é permitida falta de produto planejada.
2. Os custos relevantes na instalação 2 são um *custo de implantação* de K_2 cada vez que é feito um pedido e um *custo de manutenção* de estoque de h_2 por unidade do item e por unidade de tempo.
3. A instalação 1 usa seu estoque para fornecer um lote de Q_2 unidades para a instalação 2 imediatamente após ser recebido um pedido.
4. É feito um pedido de Q_1 unidades a tempo para reabastecer estoques na instalação 1 antes que venha ocorrer uma falta do produto.
5. De maneira similar, para a instalação 2, os custos relevantes na instalação 1 são um *custo de implantação* de K_1 cada vez que for feito um pedido e um *custo de manutenção* de estoque de h_1 por unidade de item e por unidade de tempo.
6. As unidades aumentam em valor quando elas são recebidas e processadas na instalação 2 e, portanto, $h_1 < h_2$.
7. O objetivo é minimizar a *soma* dos custos variáveis por unidade de tempo nas duas instalações. Isso será representado por C.

A palavra "imediatamente" na hipótese 3 significa que existe, basicamente, um *tempo de espera zero* entre o momento em que a instalação 2 faz um pedido de Q_2 unidades e a instalação 1 preenche esse pedido. Na realidade, seria comum ter um tempo de espera significativo em decorrência do tempo necessário para a instalação 1 receber e processar o pedido e depois transportar o lote para a instalação 2. Entretanto, já que o tempo de espera é essencialmente determinado, isso equivale a supor tempos de espera zero para fins de modelagem, pois o pedido seria feito exatamente a tempo para que o lote chegue quando o nível de estoques cai a zero. Por exemplo, se o tempo de espera for de uma semana, o pedido seria feito uma semana antes de o nível de estoques cair a zero.

Embora um tempo de espera zero e um tempo de espera determinado sejam equivalentes para fins de modelagem, estamos supondo especificamente um tempo de espera zero, porque isso simplifica a conceitualização de como os níveis de estoques nas duas instalações variam simultaneamente ao longo do tempo. A Figura 18.8 representa essa conceitualização. Em virtude de as hipóteses do modelo EOQ básico serem válidas para a instalação 2, os níveis de estoques ali variam de acordo com o familiar padrão dente de serra mostrado pela primeira vez na Figura 18.1. Cada vez que a instalação 2 precisar reabastecer seus estoques, a instalação 1 embarca Q_2 unidades do item 1 para a instalação 2. O item 1 pode ser idêntico ao item 2 (como no caso de uma fábrica remetendo o produto final para um centro de distribuição). Caso contrário (como no caso de um fornecedor remetendo os componentes necessários para fabricar o produto final para uma fábrica), a instalação 2 usa imediatamente o embarque de Q_2 unidades do item 1 para fabricar Q_2 unidades do item 2 (o produto final). O estoque na instalação 2 vai sendo então esvaziado a uma taxa de demanda constante de d unidades por unidade de tempo até que ocorra o próximo reabastecimento, que acontece exatamente no momento em que o nível de estoques cai a 0.



■ FIGURA 18.8
Os níveis de estoques sincronizados nas duas instalações quando $Q_1 = 3Q_2$. O estoque da instalação é aquele que é fisicamente mantido na instalação, ao passo que o estoque multinível inclui tanto o estoque na instalação quanto o estoque do mesmo item que já se encontra na instalação seguinte (se efetivamente existir alguma).

O padrão dos níveis de estoques ao longo do tempo para a instalação 1 é ligeiramente mais complicado que para a instalação 2. Precisam ser retiradas Q_2 unidades do estoque da instalação 1 para abastecer a instalação 2 cada vez que a instalação 2 precisar acrescentar Q_2 unidades para reabastecer seus estoques. Isso implica reabastecer ocasionalmente o estoque da instalação 1, de modo que um pedido de Q_1 unidades é feito periodicamente. Usando o mesmo tipo de raciocínio empregado na seção anterior (inclusive nas Figuras 18.4 e 18.5), a natureza *determinística* de nosso modelo implica que a instalação 1 deve reabastecer seus estoques apenas no instante em que seu nível de estoque for zero e for tempo para fazer uma retirada do estoque de modo a abastecer a instalação 2. O raciocínio envolve verificar o que aconteceria caso a instalação 1 tivesse de reabastecer seus estoques em qualquer momento posterior ou anterior a este. Se o reabastecimento fosse em um momento qualquer posterior a este, a instalação 1 não seria capaz de abastecer a instalação 2 a tempo de modo a seguir a política de estoques ótima e, portanto, isso é inaceitável. Se o reabastecimento fosse em qualquer momento anterior a este, a instalação 1 incorreria no custo extra de manter esse estoque até que fosse o momento de abastecer a instalação 2 e, portanto, é melhor retardar o reabastecimento na instalação 1 até esse momento. Isso nos leva ao seguinte *insight*.

> Uma política ótima deveria ter $Q_1 = nQ_2$ em que n é um inteiro positivo fixo. Além disso, a instalação 1 deveria reabastecer seus estoques com um lote de Q_1 unidades *somente* quando seu nível de estoque fosse *zero* e fosse tempo de abastecer a instalação 2 com um lote de Q_2 unidades.

Este é o tipo de política representado na Figura 18.8, que ilustra o caso em que $n = 3$. Particularmente, cada vez que a instalação 1 receber um lote de Q_1 unidades, ela abastece simultaneamente a instalação 2 com um lote de Q_2 unidades, de modo que a quantidade de estoque restante disponível (chamada *estoque na instalação*) na instalação 1 se torne $(Q_1 - Q_2)$ unidades. Após abastecer posteriormente a instalação 2 com mais dois lotes de

Q_2 unidades, a Figura 18.8 mostra que o próximo ciclo começa com a instalação 1 recebendo outro lote de Q_1 unidades ao mesmo tempo que ela precisa abastecer a instalação 2 com mais outro lote de Q_2 unidades.

A reta tracejada na parte superior da Figura 18.8 mostra outra quantidade denominada *estoque multinível* para a instalação 1.

> O **estoque multinível** de determinado item em qualquer instalação em um sistema de estoques multiníveis é constituído pelo estoque do item que se encontra fisicamente disponível na instalação (conhecido como o *estoque na instalação*) *mais* o estoque do mesmo item que já se encontra mais à frente no fluxo do processo (e, talvez, já incorporado em um produto acabado) em níveis subseqüentes do sistema.

Já que o estoque do item 1 na instalação 1 é embarcado periodicamente para a instalação 2, onde é transformado imediatamente no item 2, o estoque multinível na instalação 1 na Figura 18.8 é a *soma* do estoque na instalação ali e o nível de estoques na instalação 2. No instante 0, o estoque multinível do item 1 na instalação 1 é Q_1, pois $(Q_1 - Q_2)$ unidades permanecem disponíveis e Q_2 unidades acabam de ser enviadas para a instalação 2 para reabastecer o estoque lá. À medida que o estoque na instalação 2 vai esvaziando de acordo com a taxa de demanda constante, o estoque multinível do item 1 na instalação 1 diminui nessa mesma taxa constante até a próxima remessa de Q_1 unidades ser recebida lá. Se o estoque multinível do item 1 na instalação 1 fosse colocado em um gráfico por um período mais longo do que aquele mostrado na Figura 18.8, você veria o mesmo padrão dente de serra dos níveis de estoques conforme indicado na Figura 18.1.

Em breve, você verá que o estoque multinível desempenha papel fundamental na análise de sistemas de estoques multiníveis. A razão é que o padrão dente de serra dos níveis de estoques para estoque multinível permite usar uma análise similar àquela do modelo EOQ básico.

Uma vez que o objetivo é minimizar a soma dos custos variáveis por unidade de tempo nas duas instalações, a abordagem mais fácil (e comumente usada) seria encontrar separadamente os valores de Q_2 e $Q_1 = nQ_2$ que minimizem, respectivamente, o custo variável total por unidade na instalação 2 e instalação 1. Infelizmente, essa abordagem menospreza (ou ignora) as conexões existentes entre os custos variáveis nas duas instalações. Como o tamanho do lote Q_2 para o item 2 afeta o padrão de níveis de estoques para o item 1 na instalação 1, otimizar Q_2 separadamente sem levar em consideração as conseqüências para o item 1 não nos leva a uma solução ótima global.

Para entender melhor esse ponto sutil, pode ser interessante começar a otimizar separadamente nas duas instalações. Faremos isso e depois demonstraremos que isso pode levar a erros bastante significativos.

A Armadilha de Otimizar as Duas Instalações Separadamente. Comecemos otimizando a própria instalação 2. Já que as hipóteses para a instalação 2 se encaixam precisamente no modelo EOQ básico, os resultados apresentados na Seção 18.3 para esse modelo podem ser usados diretamente. O custo variável total por unidade de tempo nessa instalação é

$$C_2 = \frac{dK_2}{Q_2} + \frac{h_2 Q_2}{2}.$$

Essa expressão para custo *variável* total difere daquela para o custo total dado na Seção 18.3 para o modelo EOQ básico eliminando o custo *fixo, dc,* em que *c* é o custo unitário de aquisição do item. A fórmula EOQ indica que a quantidade ótima a ser encomendada para essa instalação em si é

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2dK_2}{h_2}},$$

de modo que o valor resultante de C_2 com $Q_2 = Q_2^*$ é

$$C_2^* = \sqrt{2dK_2h_2}.$$

Consideremos agora a instalação 1 com um pedido com quantidade $Q_1 = nQ_2$. A Figura 18.8 indica que o nível médio de estoque da instalação é $(n - 1)Q_2/2$. Portanto, já que a instalação 1 precisa reabastecer seus estoques com Q_1 unidades a cada $Q_1/d = nQ_2/d$ unidades de tempo, o custo variável total por unidade de tempo na instalação 1 é

$$C_1 = \frac{dK_1}{nQ_2} + \frac{h_1(n - 1)Q_2}{2}.$$

Para encontrar a quantidade a ser encomendada, $Q_1 = nQ_2$, que minimiza C_1, dado $Q_2 = Q^*{}_2$, precisamos encontrar o valor de n que minimiza C_1. Ignorando-se a exigência de que n seja um inteiro, isso é feito calculando a derivada de C_1 em relação a n, fazendo que a derivada seja igual a zero (notando que a segunda derivada é positiva para n positivo) e encontrando n, o que resulta em

$$n^* = \frac{1}{Q_2^*}\sqrt{\frac{2dK_1}{h_1}} = \sqrt{\frac{K_1h_2}{K_2h_1}}.$$

Se n^* for um inteiro, então $Q_1 = n^*Q^*{}_2$ é a quantidade ótima de um pedido para a instalação 1, dado que $Q_2 = Q^*{}_2$. Se n^* não for um inteiro, então n^* precisa ser arredondado para um inteiro, seja para cima seja para baixo. A regra para fazer isso é a seguinte.

Procedimento para Arredondamento de *n**

Se $n^* < 1$, escolha $n = 1$.
Se $n^* > 1$, faça que $[n^*]$ seja o maior inteiro $\leq n^*$, de modo que $[n^*] \leq n^* < [n^*] + 1$ e então arredonde como se segue.

Se $\dfrac{n^*}{[n^*]} \leq \dfrac{[n^*] + 1}{n^*}$, escolha $n = [n^*]$.

Se $\dfrac{n^*}{[n^*]} > \dfrac{[n^*] + 1}{n^*}$, escolha $n = [n^*] + 1$.

A fórmula para n^* indica que seu valor depende tanto de K_1/K_2 quanto de h_2/h_1. Se ambas as quantidades forem consideravelmente maiores que 1, então n^* também será consideravelmente maior que 1. Lembre-se que a hipótese 6 do modelo é de que $h_1 < h_2$. Isso implica que h_2/h_1 excede 1, talvez de forma substancial. A razão para a hipótese 6 normalmente ser válida é que esse item 1 geralmente aumenta em valor quando é convertido no item 2 (o produto final) após o item 1 ser transferido para a instalação 2 (o local onde a demanda pode ser atendida para o produto final). Isso significa que o custo de capital imobilizado em cada unidade em estoque (normalmente o principal componente em custos de manutenção de estoque) também aumentará à medida que unidades forem transferidas da instalação 1 para a instalação 2. Similarmente, se a produção de um lote de peças precisar ser configurada para fabricar cada lote na instalação 1 (de modo que K_1 será grande), ao passo que somente um custo administrativo relativamente pequeno, K_2, seria necessário para a instalação 2 para fazer cada pedido, então a relação K_1/K_2 será consideravelmente maior que 1.

A inconsistência na análise anterior provém da primeira etapa ao escolher-se a quantidade a ser encomendada para a instalação 2. Em vez de considerar apenas os custos na instalação 2 ao fazer isso, os custos resultantes na instalação 1 também deveriam ter sido levados em conta. Passemos agora para a análise válida que considera simultaneamente ambas as instalações minimizando a soma dos custos nos dois locais.

Otimizando as Duas Instalações Simultaneamente. Adicionando-se os custos individuais das instalações obtidos antes, o custo variável total por unidade de tempo nas duas instalações é

$$C = C_1 + C_2 = \left(\frac{K_1}{n} + K_2\right)\frac{d}{Q_2} + [(n-1)h_1 + h_2]\frac{Q_2}{2}.$$

Os custos de manutenção de estoque à direita possuem uma interpretação interessante em temos de custos de manutenção de estoque para o *estoque multinível* nas duas instalações. Particularmente, façamos que

$e_1 = h_1 =$ nível custo de manutenção de estoque por unidade de item e por unidade de tempo para a instalação 1,

$e_2 = h_2 - h_1 =$ nível custo de manutenção de estoque por unidade de item e por unidade de tempo para a instalação 2.

Então, os custos de manutenção de estoque podem ser expressos como

$$\begin{aligned}[(n-1)h_1 + h_2]\,\frac{Q_2}{2} &= h_1\frac{nQ_2}{2} + (h_2 - h_1)\frac{Q_2}{2}\\ &= e_1\frac{Q_1}{2} + e_2\frac{Q_2}{2},\end{aligned}$$

em que $Q_1/2$ e $Q_2/2$ são os níveis médios de estoques do *estoque multinível* nas instalações 1 e 2, respectivamente. Ver Figura 18.8. A razão para $e_2 = h_2 - h_1$ e não $e_2 = h_2$ é que $e_1Q_1/2 = h_1Q_1/2$ já inclui o custo de manutenção de estoque para as unidades do item 1 que se encontram a seguir na instalação 2, de modo que $e_2 = h_2 - h_1$ precise refletir apenas o *valor agregado* convertendo as unidades do item 1 em unidades do item 2 na instalação 2. Esse conceito de usar custos de manutenção de estoque multinível baseado no valor agregado em cada instalação desempenhará papel ainda mais importante em nosso próximo modelo em que há mais de dois níveis.

Usando esses custos de manutenção de estoque multinível, temos

$$C = \left(\frac{K_1}{n} + K_2\right)\frac{d}{Q_2} + (ne_1 + e_2)\frac{Q_2}{2}.$$

Derivando em relação a Q_2, configurando a derivada igual a zero (enquanto se verifica que a segunda derivada é positiva para Q_2 positivo) e encontrando Q_2 resulta em

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2d\left(\frac{K_1}{n} + K_2\right)}{ne_1 + e_2}}$$

como quantidade ótima a ser encomendada (dado n) na instalação 2. Observe que isso é idêntico à fórmula EOQ para o modelo EOQ básico no qual o custo de implantação total é $K_1/n + K_2$ e o custo de manutenção de estoque unitário total é $ne_1 + e_2$.

Inserindo essa expressão para Q^*_2 em C e realizando algumas simplificações algébricas resulta em

$$C = \sqrt{2d\left(\frac{K_1}{n} + K_2\right)(ne_1 + e_2)}.$$

Para encontrar o valor ótimo da quantidade a ser encomendada na instalação 1, $Q_1 = nQ^*_2$, precisamos encontrar o valor de n que minimiza C. A abordagem usual para fazer isso seria derivar C em relação a n, configurar essa derivada igual a zero e encontrar n. Entretanto, como a expressão para C envolve extrair uma raiz quadrada, fazer isso diretamente não é muito conveniente. Uma forma mais conveniente seria livrar-se da raiz quadrada elevando C ao quadrado e minimizando C^2, já que o valor de n que minimiza C^2 também é o valor que minimiza C. Portanto, derivamos C^2 em relação a n, configuramos essa derivada igual a zero e resolvemos essa equação em termos de n. Visto que a segunda derivada é positiva para n positivo, isso resulta no valor minimizador de n como

$$n^* = \sqrt{\frac{K_1 e_2}{K_2 e_1}}.$$

Isso é idêntico à expressão para n^* obtida na subseção anterior, exceto que h_1 e h_2 foram substituídos aqui por e_1 e e_2, respectivamente. Quando n^* não for um inteiro, o procedimento para arredondar n^* para um inteiro também é o mesmo descrito na subseção anterior.

Obter n dessa maneira permite calcular Q_2^* com a expressão dada e então configurar $Q_1^* = nQ_2^*$.

Exemplo. Para ilustrar esses resultados, suponha que os parâmetros do modelo sejam

$$K_1 = \text{US\$ } 1.000, \qquad K_2 = \text{US\$ } 100, \qquad h_1 = \text{US\$ } 2, \qquad h_2 = \text{US\$ } 3, \qquad d = 600.$$

A Tabela 18.1 fornece os valores de Q_2^*, n^*, n (o valor arredondado de n^*), Q_1^* e C^* (o custo variável total resultante por unidade de tempo) ao resolver das duas formas descritas nesta seção. Portanto, a segunda coluna dá os resultados ao usar a abordagem imprecisa de otimizar as duas instalações separadamente, ao passo que a terceira coluna usa o método válido de otimizar as duas instalações simultaneamente.

Note que a otimização simultânea leva a resultados bem diferentes do que aqueles obtidos na otimização separada. A maior diferença é que a quantidade encomendada na instalação 2 é praticamente duas vezes maior. Além disso, o custo variável total C^* é aproximadamente 3% menor. Com valores de parâmetros diferentes, o erro da otimização separada pode algumas vezes levar a uma diferença porcentual consideravelmente maior no custo variável total. Logo, essa metodologia fornece uma aproximação bastante grosseira. Não há nenhuma razão para usá-la já que a otimização simultânea pode ser executada de forma relativamente simples.

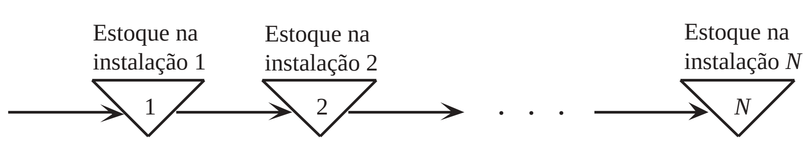
Modelo para um Sistema Serial Multinível

Agora, iremos estender a análise precedente a sistemas seriais com mais de dois níveis. A Figura 18.9 representa esse tipo de sistema, em que a instalação 1 tem seus estoques reabastecidos periodicamente, em seguida o estoque na instalação 1 é usado para reabastecer o estoque na instalação 2 periodicamente, depois a instalação 2 faz o mesmo em relação à instalação 3 e assim por diante até chegar à instalação final (instalação N).

■ TABELA 18.1 **Aplicação do modelo serial de dois níveis ao exemplo**

Quantidade	Otimização Separada das Instalações	Otimização Simultânea das Instalações
Q_2^*	200	379
n^*	$\sqrt{15}$	$\sqrt{5}$
n	4	2
Q_1^*	800	758
C^*	US$ 1.950	US$ 1.897

■ FIGURA 18.9
Um sistema de estoques serial multinível.



Algumas ou todas as instalações poderiam ser centros de processamento que processam os itens recebidos da instalação anterior e os transforma em algo mais próximo do produto acabado. Instalações também são usadas para armazenar itens até que eles estejam prontos para serem transferidos para o próximo centro de processamento ou para a próxima instalação de armazenagem que se encontre mais próxima dos clientes do produto final. A instalação N executa qualquer processamento final necessário e também armazena o produto final em um local onde ele possa atender imediatamente à demanda para aquele produto de forma contínua.

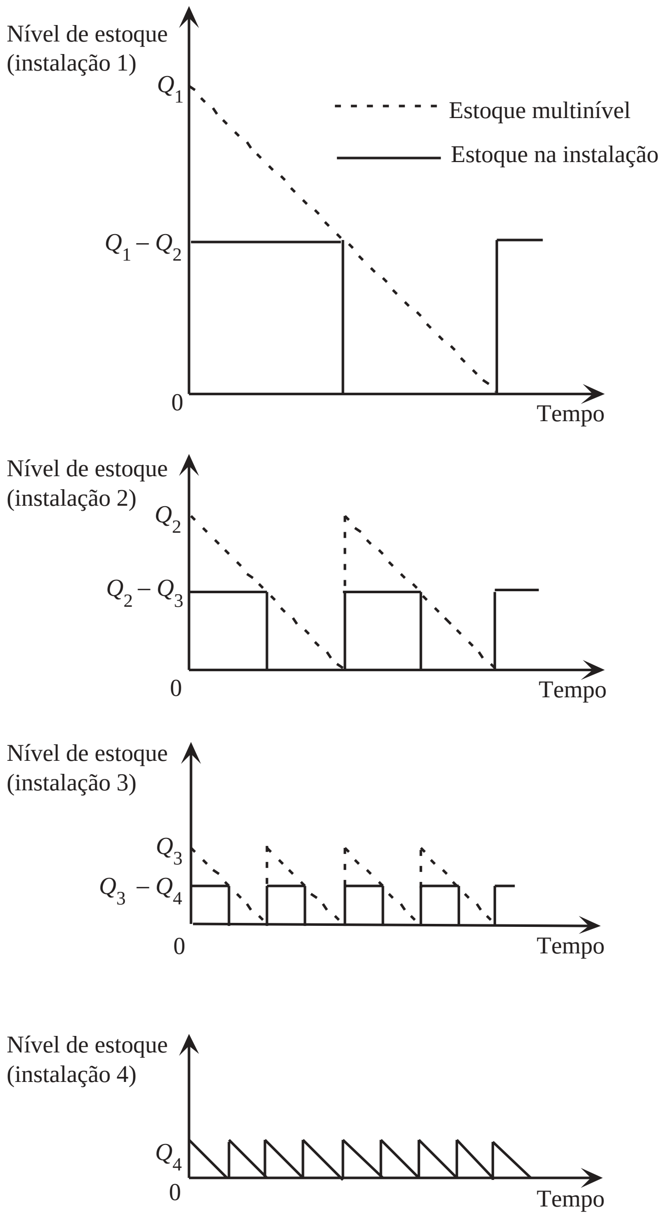
Uma vez que os itens podem ser diferentes nas diversas instalações à medida que são processados em algo mais próximo do produto acabado, iremos nos referir a eles como item 1 enquanto se encontrarem na instalação 1, item 2 enquanto estiverem na instalação 2 e assim por diante. As unidades dos diversos itens são definidas de modo que exatamente uma unidade do item de uma instalação seja necessária para obter uma unidade do próximo item na instalação seguinte.

Nosso modelo para um sistema de estoques serial multinível é uma generalização direta do anterior para um sistema de estoques serial de dois níveis, conforme indicado pelas seguintes hipóteses para o modelo.

Hipóteses para o Modelo Serial Multinível

1. As hipóteses do modelo EOQ básico (ver Seção 18.3) são válidas na instalação N. Assim, existe uma demanda constante conhecida de d unidades por unidade de tempo, uma quantidade encomendada de Q_N unidades é feita a tempo de reabastecer estoques quando o nível de estoques cai a zero e não são permitidas faltas de produto planejadas.
2. Uma quantidade encomendada de Q_1 unidades é feita a tempo de reabastecer estoques na instalação 1 antes que viesse a acontecer uma falta do produto.
3. Cada instalação, exceto a instalação N, usa seus estoques para reabastecer periodicamente o estoque da instalação seguinte. Portanto, a instalação $i(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ fornece imediatamente um lote de Q_{i+1} unidades para a instalação $(i + 1)$ cada vez que for recebido um pedido da instalação $(i + 1)$.
4. Os custos relevantes em cada instalação $i(i = 1, 2, \ldots, N)$ são um *custo de implantação* K_i cada vez que for feito um pedido e um *custo de manutenção* de estoque igual a h_i por unidade de item e por unidade de tempo.
5. As unidades aumentam de valor cada vez que forem recebidas e processadas na instalação seguinte, de modo que $h_1 < h_2 < \cdots < h_N$.
6. O objetivo é minimizar a *soma* dos custos variáveis por unidade de tempo nas N instalações. Isso será representado por C.

A palavra "imediatamente" na hipótese 3 significa que existe, essencialmente, um tempo de espera zero entre o momento em que uma instalação faz um pedido e a instalação precedente preenche esse pedido, embora um tempo de espera positivo que é fixado não cause nenhum problema. Com tempo de espera zero, a Figura 18.10 tem como base a Figura 18.8 para mostrar como os níveis de estoques variariam simultaneamente nas instalações quando há quatro instalações em vez de apenas duas. Nesse caso, $Q_i = 2Q_{i+1}$ para $i = 1, 2, 3$, de modo que cada uma das três primeiras instalações precise reabastecer seus estoques apenas uma vez para cada duas vezes que ele reabastecer os estoques da instalação seguinte. Conseqüentemente, quando se inicia um ciclo completo de reabastecimentos nas quatro instalações no instante 0, a Figura 18.10 mostra um pedido de Q_1 unidades chegando na instalação 1 quando o nível de estoques havia atingido zero. Metade desse pedido é usado imediatamente para reabastecer o estoque na instalação 2. A instalação 2 faz o mesmo em relação à instalação 3 e a instalação 3 faz o mesmo para a instalação 4. Assim, no instante 0, parte das unidades que acabaram de chegar na instalação 1 são transferidas na seqüência até atingirem a última instalação o mais rápido possível. A última instalação começa então a usar imediatamente seu estoque reabastecido do produto final para atender à demanda de d unidades por unidade de tempo para esse produto.



■ FIGURA 18.10
O nível de estoques sincronizado em quatro instalações ($N = 4$) quando $Q_i = 2Q_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$), onde as linhas cheias mostram os níveis de estoque da instalação e as linhas tracejadas fazem o mesmo para o estoque multinível.

Lembre-se de que o *estoque multinível na instalação* 1 é definido como o estoque que se encontra fisicamente disponível ali (o *estoque na instalação*) mais o estoque que já se encontra mais à frente (e talvez incorporado em um produto mais acabado) em níveis subseqüentes do sistema de estoques. Portanto, como indicado pelas linhas tracejadas na Figura 18.10, o estoque multinível na instalação 1 começa em Q_1 unidades no instante 0 e depois diminui a uma taxa de d unidades por unidade de tempo até que seja tempo de encomendar um novo lote de Q_1 unidades, após o qual o padrão dente de serra continua. O estoque multinível nas instalações 2 e 3 segue o mesmo padrão dente de serra, porém com ciclos mais curtos. O estoque multinível coincide com o estoque da instalação na instalação 4, de modo que o estoque multinível segue novamente um padrão dente de serra ali.

Esse padrão dente de serra no modelo EOQ básico na Seção 18.3 tornou a análise particularmente simples. Pela mesma razão, é conveniente se concentrar no estoque multinível em vez do estoque da instalação nas respectivas instalações ao analisar o modelo atual. Para tanto, precisamos usar os *custos de manutenção* de estoque *multiníveis*,

$$e_1 = h_1, \qquad e_2 = h_2 - h_1, \qquad e_3 = h_3 - h_2, \ldots, \qquad e_N = h_N - h_{N-1},$$

em que e_i é interpretado como o custo de manutenção de estoque por unidade do item e por unidade de tempo sobre o *valor agregado* convertendo o item $(i - 1)$ da instalação $(i - 1)$ no item i na instalação i.

A Figura 18.10 supõe que os ciclos de reabastecimento nas respectivas instalações sejam cuidadosamente sincronizados de modo que, por exemplo, um reabastecimento na instalação 1 ocorra ao mesmo tempo que parte dos reabastecimentos nas demais instalações. Isso faz sentido já que seria um desperdício reabastecer estoques em uma instalação antes de esse estoque ser necessário. Para evitar sobra de estoques no final de um ciclo de reabastecimento em uma instalação, também é lógico fazer um pedido suficiente apenas para abastecer a instalação seguinte um número inteiro de vezes.

> Uma política ótima seria ter $Q_i = n_i Q_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$, em que n_i é um inteiro positivo, para qualquer ciclo de reabastecimento. O valor de n_i pode ser diferente para diferentes ciclos de reabastecimento. Além disso, a instalação i $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ deve reabastecer seus estoques com um lote de Q_i unidades *somente* no momento em que seu nível de estoque for *zero* e for o momento de abastecer a instalação $(i + 1)$ com um lote de Q_{i+1} unidades.

Problema Adaptado Mais Fácil de Resolver. Infelizmente, é surpreendentemente difícil encontrar uma solução ótima para esse modelo quando $N > 2$. Por exemplo, uma solução ótima pode ter quantidades encomendadas que mudam de um ciclo de reabastecimento para o seguinte na mesma instalação. Portanto, duas aproximações simplificadoras são feitas normalmente para obter uma solução.

> **Simplificando a Aproximação 1:** Suponha que a quantidade encomendada em uma instalação tenha de ser a mesma em cada ciclo de reabastecimento. Assim, $Q_i = n_i Q_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$, em que n_i é um inteiro positivo *fixo*.

> **Simplificando a Aproximação 2:** $n_i = 2^{mi}$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$, em que m_i é um inteiro não-negativo, de modo que os únicos valores considerados para n_i são 1, 2, 4, 8, ...

De fato, essas aproximações simplificadoras revisam o problema original impondo algumas restrições novas que reduzem o tamanho da região de soluções viáveis que precisa ser considerada. Esse problema adaptado tem alguma estrutura adicional (inclusive a programação cíclica relativamente simples resultante da simplificação da aproximação 2) que torna consideravelmente mais fácil de ser resolvido que o problema original. Além disso, foi demonstrado que uma solução ótima para o problema adaptado sempre é praticamente ótima para o problema original, em razão do seguinte resultado-chave.

> **Propriedade da Aproximação (98%) de Roundy:** É *garantido* que o problema adaptado forneça pelo menos 98% de aproximação em relação ao problema original no seguinte sentido. A quantia pela qual o custo de uma solução ótima para o problema adaptado exceda o custo de uma solução ótima para o problema original *jamais* poderá ser maior que 2% (e normalmente será muito menor). Especificamente, se

C^* = custo variável total por unidade de tempo de uma solução ótima para o problema original,

$\overline{C}$ = custo variável total por unidade de tempo de uma solução ótima para o problema adaptado,

então

$$\overline{C} - C^* \leq 0{,}02\, C^*.$$

Isso normalmente é conhecido como a aproximação (98%) de *Roundy*, pois a formulação e a prova dessa propriedade fundamental (que também é válida para alguns tipos gerais de sistemas de estoque multiníveis) foram desenvolvidas pelo professor Robin Roundy da Cornell University.[6]

Uma implicação das duas aproximações simplificadoras é que as quantidades encomendadas para o problema adaptado têm de satisfazer as desigualdades fracas,

$$Q_1 \geq Q_2 \geq \ldots \geq Q_N.$$

O procedimento para resolver o problema adaptado tem duas fases, nas quais essas desigualdades desempenham papel fundamental na fase 1. Particularmente, considere a seguinte variante do problema original, bem como do problema adaptado.

> **Relaxamento do Problema:** Continue a supor que a quantidade encomendada em uma instalação tenha de ser a mesma em cada ciclo de reabastecimento. Entretanto, substitua a aproximação simplificadora 2 pela exigência menos restritiva de que $Q_1 \geq Q_2 \geq \cdots \geq Q_N$. Portanto, a única restrição em n_i na aproximação simplificadora 1 é que cada $n_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \ldots, N - 1$), sem nem mesmo exigir que n_i seja um inteiro. Quando n_i não for um inteiro, a falta de sincronização resultante entre as instalações é ignorada. Supõe-se então que cada instalação satisfaça o modelo EOQ básico com estoques sendo reabastecidos quando o nível de estoques atingir zero, independentemente do que as demais instalações fazem, de modo que as instalações possam ser otimizadas separadamente.

Embora esse relaxamento não seja uma representação realista do problema real, pois ela ignora a necessidade de coordenar reabastecimentos nas instalações (e, portanto, subestimando os verdadeiros custos de manutenção de estoque), ela fornece uma aproximação que é muito fácil de resolver.

A fase 1 do procedimento de resolução para solucionar o problema adaptado consiste na resolução do relaxamento do problema. A fase 2 modifica então essa solução reimpondo a aproximação simplificadora 2.

As desigualdades fracas, $Q_i \geq Q_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, N - 1$), permitem a possibilidade de que $Q_i = Q_{i+1}$. Isso corresponde a ter $m_i = 0$ na aproximação simplificadora 2. Conforme sugerido pela Figura 18.10, se $Q_i = Q_{i+1}$, toda vez que a instalação ($i + 1$) precisar reabastecer seus estoques com Q_{i+1} unidades, a instalação i precisará encomendar simultaneamente o mesmo número de unidades e então (após qualquer processamento necessário) transferir imediatamente o lote inteiro para a instalação ($i + 1$). Portanto, embora estas sejam, na realidade, instalações distintas, para fins de modelagem, podemos tratá-las como uma única instalação combinada que está fazendo um pedido de $Q_i = Q_{i+1}$ unidades com um custo de implantação igual a $K_i + K_{i+1}$ e um custo de manutenção de estoque multinível de $e_i + e_{i+1}$. Essa fusão de instalações (para fins de modelagem) é incorporada na fase 1 do procedimento de resolução.

Descrevemos e sintetizamos as duas fases do procedimento de resolução, uma de cada vez, logo a seguir.

Fase 1 do Procedimento de Resolução. Lembre-se de que a hipótese 6 para o modelo indica que o objetivo é minimizar C, o custo variável total por unidade de tempo para todas as instalações. Usando os custos de manutenção de estoque multiníveis, o custo variável total por unidade de tempo na instalação i fica

$$C_i = \frac{dK_i}{Q_i} + \frac{e_iQ_i}{2}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N,$$

de modo que

[6] ROUNDY, R. A 98%-Effective Lot-Sizing Rule for a Multi-Product, Multi-Stage Production/Inventory System. *Mathematics of Operations Research*, v. 11, p. 699-727, 1986.

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

Essa expressão para C_i parte do pressuposto que os estoques multiníveis sejam reabastecidos exatamente no momento em que seus níveis chegam a zero, o que é válido para os problemas original e adaptado, mas é apenas uma aproximação para o relaxamento do problema, pois a falta de coordenação entre as instalações em estabelecer quantidades a serem encomendadas apresenta uma tendência a reabastecimentos prematuros. Note que C_i é simplesmente o custo variável total por unidade de tempo para uma única instalação que satisfaz o modelo EOQ básico quando e_i for o custo de manutenção de estoque relevante por unidade de tempo na instalação. Portanto, solucionando-se primeiramente o problema com relaxamento, que requer apenas otimizar as instalações separadamente (ao usar custos de manutenção de estoque multiníveis em vez dos custos de manutenção de estoque da instalação), a fórmula EOQ seria simplesmente usada para obter a quantidade a ser encomendada em cada instalação. Isso acaba fornecendo uma primeira aproximação razoável dos volumes ótimos a serem encomendados ao otimizar simultaneamente as instalações para o problema adaptado. Assim, aplicar a fórmula EOQ dessa maneira é o passo fundamental na fase 1 do procedimento de resolução. A fase 2 aplica então a coordenação necessária entre as quantidades encomendadas por meio da aproximação simplificadora 2.

Ao aplicar a fórmula EOQ às respectivas instalações, surge uma situação especial quando $K_i/e_i < K_{i+1}/e_{i+1}$, visto que isso levaria a $Q_i^* < Q^*_{i+1}$, que é proibido pelo relaxamento do problema. Para satisfazer o relaxamento, que requer que $Q_i \geq Q_{i+1}$, o melhor que pode ser feito é fazer que $Q_i = Q_{i+1}$. Conforme descrito no final da subseção anterior, isso implica que as duas instalações deveriam ser mescladas para fins de modelagem.

Síntese da Fase 1 (Solucionar o Relaxamento)

1. Se $\frac{K_i}{e_i} < \frac{K_{i+1}}{e_{i+1}}$ para qualquer $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, trate as instalações i e $i + 1$ como uma única instalação combinada (para fins de modelagem) com um custo de implantação igual a $K_i + K_{i+1}$ e um custo de manutenção de estoque multinível de $e_i + e_{i+1}$ por unidade por unidade de tempo. Após a fusão, repita essa etapa conforme necessário para quaisquer outros pares de instalações consecutivas (o que incluiria uma instalação combinada). A seguir, renumere as instalações de acordo com N reinicializado como o novo número total de instalações.
2. Faça que

$$Q_i = \sqrt{\frac{2dK_i}{e_i}}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N.$$

3. Faça que

$$C_i = \frac{dK_i}{Q_i} + \frac{e_i Q_i}{2}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\underline{C} = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

Fase 2 do Procedimento de Resolução. A fase 2 agora é usada para coordenar as quantidades encomendadas para obter uma programação cíclica conveniente de reabastecimentos, como aquela ilustrada na Figura 18.10. Isso é feito principalmente arredondando as quantidades encomendadas obtidas na fase 1 para atender ao padrão prescrito pelas aproximações simplificadoras. Após determinar provisoriamente os valores de $n_i = 2^{m}_{i}$ de modo que $Q_i = n_i Q_{i+1}$ dessa maneira, o passo final é refinar o valor de Q_N para tentar obter uma solução ótima global para o problema adaptado.

Essa etapa final envolve expressar cada Q_i em termos de Q_N. Em particular, dado cada n_i tal que $Q_i = n_i Q_{i+1}$, façamos que p_i seja o produto,

$$p_i = n_i n_{i+1} \cdots n_{N-1}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

de modo que

$$Q_i = p_i Q_N, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

em que $p_N = 1$. Portanto, o custo variável total por unidade de tempo em todas as instalações é

$$C = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{dK_i}{p_i Q_N} + \frac{e_i p_i Q_N}{2} \right].$$

Já que C inclui apenas a única quantidade Q_N, essa expressão também pode ser interpretada como o custo variável total por unidade de tempo para uma *única* instalação de estoques que satisfaz o modelo EOQ básico com um custo de implantação e custo de manutenção de estoque unitário de

$$\text{Custo de implantação} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dK_i}{p_i}, \qquad \text{Custo de manutenção de estoque unitário} = \sum_{i=1}^{N} e_i p_i.$$

Logo, o valor de Q_N que minimiza C é dado pela fórmula EOQ como

$$Q_N^* = \sqrt{\frac{2d \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i}}{\sum_{i=1}^{N} e_i p_i}}$$

Como essa expressão requer conhecer n_i, a fase 2 começa usando o valor de Q_N calculado na fase 1 como uma aproximação de Q_N^*, e depois usa esse Q_N para determinar n_i (provisoriamente), antes de usar essa fórmula para calcular Q_N^*.

Síntese da Fase 2 (Solucionar o Problema Adaptado)

1. Configure Q_N^* para o valor de Q_N obtido na fase 1.

2. Para $i = N-1, N-2, \ldots, 1$, um de cada vez, faça o seguinte: usando o valor de Q_i obtido na fase 1, determine o valor inteiro não-negativo de m tal que

$$2^m Q_{i+1}^* \le Q_i < 2^{m+1} Q_{i+1}^*.$$

$$\text{Se } \frac{Q_i}{2^m Q_{i+1}^*} \le \frac{2^{m+1} Q_{i+1}^*}{Q_i}, \qquad \text{configure } n_i = 2^m \text{ e } Q_i^* = n_i Q_{i+1}^*.$$

$$\text{Se } \frac{Q_i}{2^m Q_{i+1}^*} > \frac{2^{m+1} Q_{i+1}^*}{Q_i}, \qquad \text{configure } n_i = 2^{m+1} \text{ e } Q_i^* = n_i Q_{i+1}^*.$$

3. Use os valores dos n_i obtidos no passo 2 e as fórmulas dadas para p_i e Q_N^* para calcular Q_N^*. Em seguida, use esse Q_N^* para repetir a etapa 2.[7] Se nenhum n_i mudar, use $(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_N^*)$ como solução para o problema adaptado e calcule o custo correspondente $\overline{C}$. Se qualquer um n_i realmente mudar, repita a etapa 2 (começando com o Q_N^* atual) e depois a etapa 3 mais uma vez. Use a solução resultante e calcule $\overline{C}$.

Esse procedimento fornece uma solução muito boa para o problema adaptado. Embora não haja garantia total de que a solução seja ótima, normalmente ela o é e, caso não seja, ela deve ser muito próxima desta. Já que o próprio problema adaptado é uma aproximação do problema original, obter uma solução destas para o problema adaptado é muito convenien-

[7] Uma possível complicação que impediria repetir a etapa 2 é se $Q_{N-1} < Q^*N$ com este novo valor de Q^*N. Caso isto ocorra, você pode simplesmente parar e usar o valor anterior de $(Q^*1, Q^*2, \ldots, Q^*N)$ como solução para o problema adaptado. Esta mesma medida também se aplica a uma tentativa posterior de se repetir a etapa 2.

te para todos os fins práticos. Teorias disponíveis garantem que essa solução vai fornecer uma boa aproximação de uma solução ótima para o problema original.

Lembre que a propriedade de aproximação (98%) de Roundy garante que o custo de uma solução ótima para o problema adaptado se encontra dentro de um limite de 2% de C^*, o custo da solução ótima desconhecida para o problema original. Na prática, essa diferença normalmente é bem menor que 2%. Se a solução obtida pelo procedimento dado anteriormente não for ótima para o problema adaptado, os resultados de Roundy ainda garantem que seu custo $\overline{C}$ se encontrará em um intervalo com variação de 6% em relação a C^*. Enfatizando, a diferença real na prática geralmente é bem menor que 6% e muitas vezes é consideravelmente menor que 2%.

Seria ótimo ser capaz de verificar quão próximo $\overline{C}$ se encontra em determinado problema embora C^* seja desconhecido. O relaxamento do problema fornece uma maneira fácil de se fazer isso. Como o problema com relaxamento não requer coordenar os reabastecimentos de estoques nas instalações, o custo calculado para sua solução ótima $\underline{C}$ é um limite inferior em C^*. Além disso, $\underline{C}$ em geral é *extremamente* próximo de C^*. Portanto, verificar quão próximo $\underline{C}$ se encontra em relação a $\underline{C}$ fornece uma estimativa conservadora de quão próximo $\overline{C}$ deve estar de C^*, conforme sintetizado a seguir.

Relações de Custo: $\underline{C} \leq C^* \leq \overline{C}$, de modo que $\overline{C} - C^* \leq \overline{C} - \underline{C}$, em que
$\underline{C}$ = custo de uma solução ótima para o *problema com relaxamento*,
C^* = custo de uma solução ótima (desconhecida) para o problema original,
$\overline{C}$ = custo da solução obtida para o problema adaptado.

Veremos no próximo exemplo bem mais típico que, como $\overline{C} = 1{,}0047\underline{C}$ para o exemplo, é sabido que $\overline{C}$ se encontra em um intervalo de 0,47% em relação a C^*.

Exemplo. Consideremos um sistema serial com quatro instalações com os custos de implantação e custos de manutenção de estoque unitários mostrados na Tabela 18.2.

A primeira etapa na aplicação do modelo é converter o custo de manutenção de estoque unitário h_i em cada instalação no custo de manutenção de estoque multinível unitário correspondente e_i que reflete o valor agregado em cada instalação. Portanto,

$$e_1 = h_1 = \text{US\$ } 0{,}50, \qquad e_2 = h_2 - h_1 = \text{US\$ } 0{,}05,$$
$$e_3 = h_3 - h_2 = \text{US\$ } 3, \qquad e_4 = h_4 - h_3 = \text{US\$ } 4.$$

Agora, podemos aplicar a etapa 1 da fase 1 do procedimento de resolução para comparar cada K_i/e_i com K_{i+1}/e_{i+1}.

$$\frac{K_1}{e_1} = 500, \qquad \frac{K_2}{e_2} = 120, \qquad \frac{K_3}{e_3} = 10, \qquad \frac{K_4}{e_4} = 27{,}5$$

Essas relações diminuem da esquerda para a direita com exceção de que

$$\frac{K_3}{e_3} = 10 < \frac{K_4}{e_4} = 27{,}5,$$

e, portanto, precisamos tratar as instalações 3 e 4 como uma única instalação combinada para fins de modelagem. Após combinar seus custos de implantação e seus custos de manutenção de estoque multiníveis, agora temos os dados ajustados indicados na Tabela 18.3.

TABELA 18.2 **Dados para o exemplo de um sistema de estoques com quatro níveis**

Instalação *i*	K_i	h_i	d = 4.000
1	US$ 250	US$ 0,50	
2	US$ 6	US$ 0,55	
3	US$ 30	US$ 3,55	
4	US$ 110	US$ 7,55	

TABELA 18.3 **Dados ajustados para o exemplo com quatro níveis após mesclar as instalações 3 e 4 para fins de modelagem**

Instalação i	K_i	e_i	d = 4.000
1	US$ 250	US$ 0,50	
2	US$ 6	US$ 0,05	
3(+ 4)	US$ 140	US$ 7	

TABELA 18.4 **Resultados da aplicação do procedimento de resolução ao exemplo com quatro níveis**

	Solução do Problema com Relaxamento		Solução Inicial do Problema Adaptado		Solução Final do Problema Adaptado	
Instalação i	Q_i	C_i	Q_i^*	C_i	Q_i^*	C_i
1	2.000	US$ 1.000	1.600	US$ 1.025	1.700	US$ 1.013
2	980	US$ 49	800	US$ 50	850	US$ 49
3(+ 4)	400	US$ 2.800	400	US$ 2.800	425	US$ 2.805
	C =	US$ 3.849	C =	US$ 3.875	C =	US$ 3.867

Usando os dados ajustados, a Tabela 18.4 mostra os resultados da aplicação do restante do procedimento de resolução a esse exemplo.

A segunda e terceira colunas apresentam os cálculos simples das etapas 2 e 3 da fase 1. Para a etapa 1 da fase 2, $Q_3 = 400$ na segunda coluna é transportado para $Q_3^* = 400$ na quarta coluna. Para a etapa 2, encontramos que

$$2^1 Q_3^* < Q_2 < 2^2 Q_3^*$$

já que

$$2(400) = 800 < 980 < 4(400) = 1.600.$$

Como

$$\frac{Q_2}{2^1 Q_3^*} = \frac{980}{800} < \frac{1600}{980} = \frac{2^2 Q_3^*}{Q_2},$$

fazemos que $n_2 = 2^1 = 2$ e $Q_2^* = n_2 Q_3^* = 800$. De forma similar, fazemos que $n_1 = 2^1 = 2$ e $Q_1^* = n_1 Q_2^* = 1.600$, uma vez que

$$2(800) = 1.600 < 2.000 < 4(800) = 3.200 \text{ e } \frac{2{,}000}{1{,}600} < \frac{3{,}200}{2{,}000}.$$

Após calcular os C_i correspondentes, as quarta e quinta colunas da tabela sintetizam esses resultados da aplicação somente das etapas 1 e 2 da fase 2.

As últimas duas colunas da tabela resumem os resultados da finalização do procedimento de resolução aplicando a etapa 3 da fase 2. Já que $p_1 = n_1 n_2 = 4$ e $p_2 = n_2 = 2$, a fórmula para Q_N^* resulta em $Q_3^* = 425$ como valor de Q_3 que é parte da solução ótima global para o problema adaptado. Repetindo a etapa 2 com esse novo $Q^*{}_3$ resulta novamente em $n_2 = 2$ e $n_1 = 2$, de modo que $Q_2^* = n_2 Q_3^* = 850$ e $Q_1^* = n_1 Q_2^* = 1.700$. Como n_2 e n_1 não mudam da primeira vez por meio da etapa 2, de fato agora temos a solução desejada para o problema adaptado e, portanto, os C_i são calculados de acordo. Essa solução é, de fato, ótima para o problema adaptado.

Tenha em mente que as instalações originais 3 e 4 foram combinadas somente para fins de modelagem. Elas supostamente continuarão a ser instalações fisicamente separadas. Portanto, a conclusão na sexta coluna da tabela que $Q_3^* = 425$, na verdade, significa que *ambas* as instalações 3 e 4 terão uma quantidade encomendada igual a 425. Assim que a instalação 3 receber e processar cada um de tais pedidos, ela transferirá imediatamente o lote inteiro para a instalação 4.

A parte inferior da terceira, quinta e sétima colunas da tabela mostra o custo variável total por unidade de tempo para as soluções correspondentes. O custo C na quinta coluna se encontra 0,68% acima de $\underline{C}$ na terceira coluna, ao passo que $\overline{C}$ na sétima coluna se encontra apenas 0,47% acima de $\underline{C}$. Visto que $\underline{C}$ é um limite inferior de C^*, o custo da solução ótima (desconhecida) para o problema original, isso significa que parar após a etapa 2 da fase 2 forneceu uma solução que se encontra em um intervalo de 0,68% em relação a C^*, ao passo que o refinamento de prosseguir para a etapa 3 da fase 2 melhorou essa solução colocando-a em um intervalo de 0,47% em relação a C^*.

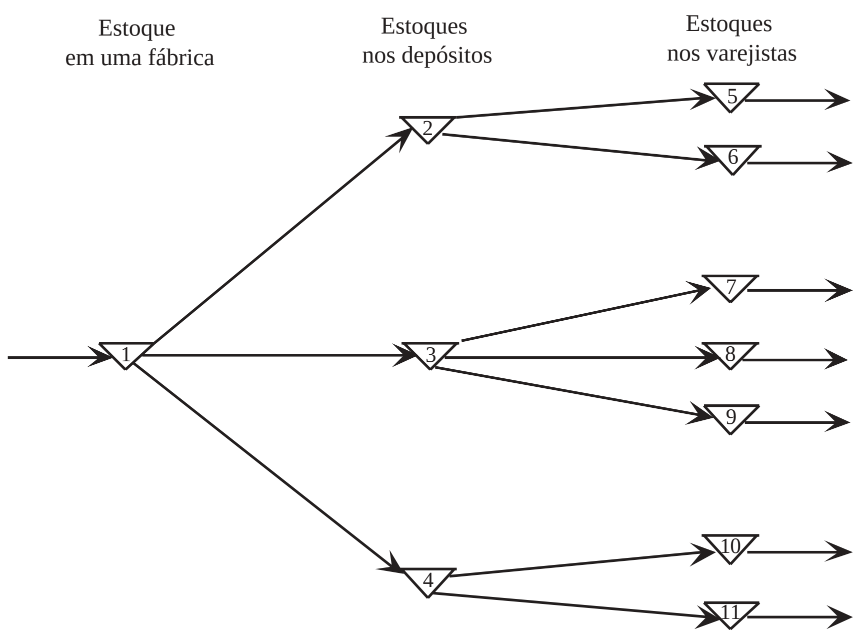
Extensões Desses Modelos

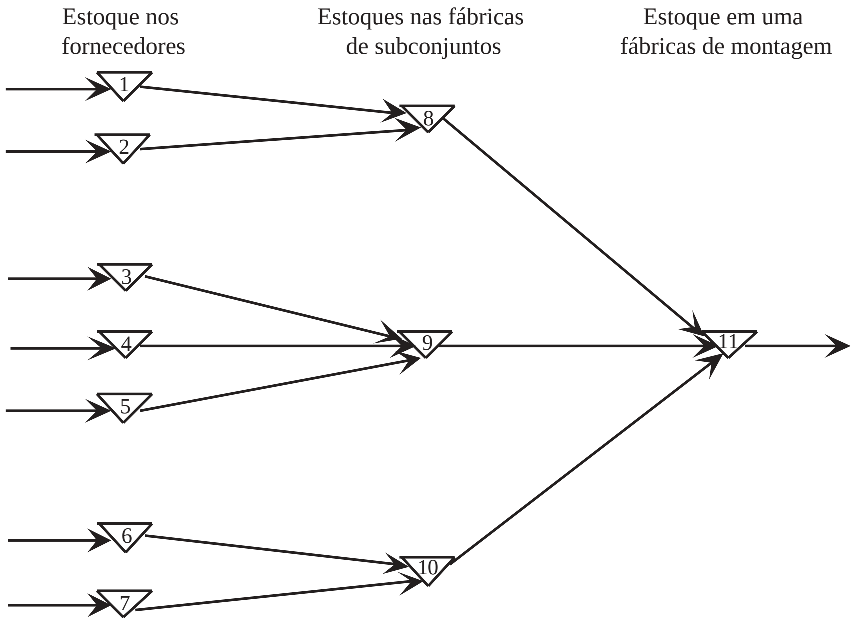
Os dois modelos apresentados anteriormente nesta seção são para sistemas de estoques seriais. Conforme representado anteriormente na Figura 18.9, isso restringe cada instalação (após a primeira) a ter somente um único *antecessor imediato* que reabastece seus estoques. Pelo mesmo motivo, cada instalação (antes da última) reabastece os estoques apenas de um único *sucessor imediato.*

Muitos sistemas de estoques multiníveis reais são muito mais complexos do que isso. Uma instalação poderia ter *vários sucessores imediatos*, como no caso de uma fábrica abastecer vários depósitos ou quando um depósito abastece diversos varejistas. Um sistema de estoques deste é chamado **sistema de distribuição**. A Figura 18.11 mostra um sistema de estoques de distribuição típico para determinado produto. Nesse caso, esse produto (entre outros) é fabricado em uma única fábrica, que configura rapidamente a produção de um lote de peças cada vez que for necessário reabastecer seus estoques com esse produto. Esses estoques são usados para abastecer vários depósitos em diferentes regiões, reabastecendo seus estoques desse produto quando preciso. Cada um desses depósitos, por sua vez, abastece diversos varejistas dentro de sua região, reabastecendo seus estoques desse produto quando necessário. Se cada varejista tiver uma taxa de demanda constante conhecida (grosso modo) para o produto, pode ser formulada uma extensão do modelo serial multinível para esse sistema de estoques de distribuição. Não prosseguiremos mais a fundo nessa questão.

Outra generalização comum de um sistema de estoques serial multinível surge quando algumas instalações possuem *vários antecessores imediatos*, como o caso nesta seção em que uma fábrica industrial de subconjuntos recebe seus componentes de vários forne-

■ FIGURA 18.11
Um sistema de distribuição de estoques típico.





■ FIGURA 18.12
Um sistema de montagem de estoques típico.

cedores ou quando uma fábrica recebe seus subconjuntos de várias fábricas de subconjuntos. Um sistema de estoques destes é chamado **sistema de montagem**. A Figura 18.12 mostra um sistema de estoques de montagem típico. Nesse caso, um determinado produto é montado em uma fábrica de montagem, esvaziando os estoques de subconjuntos mantidos ali para montar o produto. Cada um desses estoques de um subconjunto é reabastecido quando necessário por uma fábrica que produz esse subconjunto, consumindo estoques de componentes mantidos ali para fabricar o subconjunto. Um por vez, cada um desses estoques de um componente é reabastecido quando necessário por um fornecedor que fabrica periodicamente esse componente para reabastecer seu próprio estoque. Sob as hipóteses apropriadas podemos formular outra extensão do modelo serial multinível para esse sistema de estoques de montagem.

Alguns sistemas de estoques multinível também incluem instalações com vários sucessores imediatos, bem como instalações com vários antecessores imediatos. Certas instalações podem até mesmo cair em ambas as categorias. Um dos maiores desafios do gerenciamento de cadeias de abastecimento provém do fato de termos que lidar com esses tipos mistos de sistemas de estoques multinível. Particularmente quando organizações distintas (por exemplo, fornecedores, um fabricante e varejistas) controlam diferentes partes de um sistema de estoques multinível, seja ele um sistema misto, um sistema de distribuição ou um sistema de montagem. Nesse caso, um princípio fundamental do sucesso no gerenciamento de cadeias de abastecimento é que as organizações devem trabalhar em conjunto, inclusive pelo desenvolvimento de contratos de fornecimento mutuamente benéficos, para otimizar a operação como um todo do sistema de estoques multinível.

Embora a análise de sistemas de distribuição e sistemas de montagem apresente certos fatores complicadores adicionais, a abordagem aqui apresentada para o modelo serial multinível inclusive a propriedade de aproximação (98%) de Roundy também pode ser estendida a esses tipos de sistemas de estoques multinível. São fornecidos detalhes a esse respeito na Referência Selecionada 6. Ver também a Referência Selecionada 2 para mais informações sobre esses tipos de sistemas de estoques, bem como para mais detalhes sobre os modelos para sistemas seriais.

Outra forma de estender nosso modelo serial multinível é permitir que a demanda para o produto na instalação *N* ocorra *aleatoriamente* em vez de a uma taxa de demanda constante conhecida. A Referência Selecionada 10 apresenta uma maneira prática de formular e resolver essa extensão do modelo.

18.6 UM MODELO ESTOCÁSTICO DE REVISÃO CONTÍNUA

Agora, passaremos aos modelos de estoques *estocásticos*, que são desenvolvidos para analisar sistemas de estoques nos quais há uma incerteza considerável sobre demandas futuras. Nesta seção, consideraremos um sistema de estoques de *revisão contínua*. Portanto, o nível de estoques está sendo monitorado continuamente de modo que um novo pedido pode ser feito assim que o nível de estoques caia ao ponto de fazer novo pedido.

O método tradicional de implementação de um sistema de estoques de *revisão contínua* era usar um **sistema de dois recipientes**. Todas as unidades para determinado produto seriam mantidas em dois recipientes. A capacidade de um recipiente seria igual àquela do ponto de fazer novo pedido. Em primeiro lugar, as unidades seriam retiradas do outro recipiente. Portanto, o esvaziamento desse segundo recipiente dispararia a colocação de um novo pedido. Durante o tempo de espera até esse pedido ser recebido, seriam retiradas unidades do primeiro recipiente.

Mais recentemente, os sistemas de dois recipientes foram em grande parte substituídos por **sistemas de estoques computadorizados**. Cada acréscimo feito ao estoque e cada venda provocando uma retirada são registrados eletronicamente, de modo que o nível de estoque atual sempre se encontre no computador. Por exemplo, os modernos dispositivos de escaneamento nos caixas de lojas de varejo podem discriminar item por item tanto suas compras quanto as vendas de produtos estáveis para fins de ajuste dos níveis de estoques atuais. Dessa forma, o computador vai disparar um novo pedido assim que o nível de estoques tiver caído para o ponto de fazer um novo pedido. Existem vários pacotes de software excelentes para implementação de um sistema destes.

Em virtude do amplo uso de computadores no controle de estoques moderno, os sistemas de estoques de revisão contínua se tornaram preponderantes para produtos que são suficientemente importantes para garantir uma política de estoques formal.

Um sistema de estoques de revisão contínua para determinado produto normalmente se baseará em dois números críticos:

$R =$ ponto para fazer novo pedido.
$Q =$ quantidade encomendada.

Para um fabricante gerenciando o estoque de produtos acabados, o pedido será para a *produção de um lote de peças* de *tamanho Q*. Para um atacadista ou varejista (ou um fabricante reabastecendo seu estoque de matérias-primas provenientes de um fornecedor), o pedido será um *pedido de compra* de Q unidades do produto.

Uma política de estoques que se baseia nesses dois números críticos é uma política simples.

Política de estoques: Toda vez que o nível de estoques do produto cair para R unidades, faça um pedido de Q unidades adicionais para reabastecer o estoque.

Uma política destas é normalmente chamada *política de encomenda de determinada quantidade no ponto de fazer novo pedido*, ou simplesmente, em inglês e de forma abreviada, **política (R, Q)**. [Conseqüentemente, o modelo global poderia ser denominado modelo (R, Q). Algumas vezes também são usadas outras variações desses nomes, como política (Q, R), modelo (Q, R) etc.]

Após sintetizar as hipóteses do modelo, descreveremos como R e Q podem ser determinados.

Hipóteses do Modelo

1. Cada aplicação envolve um único produto.
2. O nível de estoques encontra-se sob *revisão contínua* e, assim, seu valor atual é sempre conhecido.
3. Deve ser usada uma política (R, Q) e, portanto, as únicas decisões a serem tomadas são escolher R e Q.

4. Existe um *tempo de espera* entre o momento em que o pedido é feito e aquele em que a quantidade encomendada é recebida. Esse tempo de espera pode ser determinado como também variável.
5. A *demanda* por retirada de unidades do estoque para vendê-los (ou para qualquer outra finalidade) durante esse tempo de espera é incerta. Entretanto, a distribuição probabilística da demanda é conhecida (ou pelo menos estimada).
6. Caso ocorra uma falta de estoque antes de o pedido ser recebido, o excesso de demanda é *colocado em reserva*, de modo que os pedidos que não forem atendidos agora (*backorders*) serão atendidos tão logo o pedido novo chegue.
7. Cada vez que for feito um pedido ocorre um *custo de implantação* fixo (representado por K).
8. Exceto pelo custo de implantação, o custo do pedido é proporcional à quantidade Q encomendada.
9. Incorre-se em certo custo de manutenção de estoque (representado por h) para cada unidade em estoque por unidade de tempo.
10. Quando ocorre uma falta de estoque, existe certo custo de escassez (representado por p) para cada unidade colocada em reserva por unidade de tempo até esse pedido pendente ser atendido.

Esse modelo está estreitamente ligado ao *modelo EOQ com falta de produto planejada* apresentado na Seção 18.3. De fato, todas essas hipóteses também são consistentes com aquele modelo, com uma única exceção fundamental, a hipótese 5. Em vez de termos demanda incerta, aquele modelo supõe uma *demanda conhecida* a uma taxa fixa.

Em razão da estreita relação entre esses dois modelos, seus resultados devem ser bastante similares. A principal diferença é que, por causa da demanda incerta do modelo atual, é preciso acrescentar um estoque de segurança ao estabelecer o ponto para fazer novo pedido de modo a fornecer certa proteção contra demanda bem acima da média durante o prazo de entrega. Caso contrário, as relações entre os diversos fatores de custo são basicamente as mesmas, de forma que os volumes a serem encomendados dos dois modelos devam ser similares.

Escolhendo a Quantidade a ser Encomendada (Q)

A forma mais direta de se escolher Q para o presente modelo é simplesmente usar a fórmula dada na Seção 18.3 para o modelo EOQ com falta de produto planejada. Essa fórmula é

$$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

em que d agora é a demanda *média* por unidade de tempo, e na qual K, h e p são definidos, respectivamente, nas hipóteses 7, 9 e 10.

Esse Q será apenas uma aproximação da quantidade ótima a ser encomendada para o modelo atual. Entretanto, não existe fórmula disponível para o valor exato da quantidade ótima a ser encomendada, portanto não é necessária nenhuma aproximação. Felizmente, a aproximação dada anteriormente é bastante adequada.[8]

Escolhendo o Ponto para Fazer Novo Pedido (R)

Um método comum para escolher o ponto para fazer novo pedido (R) é baseá-lo no nível de atendimento aos clientes desejado pela gerência. Dessa forma, o ponto de partida é obter uma decisão gerencial sobre o nível de atendimento. O Problema 18.6-3 analisa os fatores envolvidos nessa decisão gerencial.

[8] Para mais informações sobre a qualidade dessa aproximação, ver AXSÄTER, S. Using the Deterministic EOQ Formula in Stochastic Inventory Control. *Management Science*, v. 42, p. 830-834, 1996. Ver também ZHENG, Y.-S. On Properties of Stochastic Systems. *Management Science*, v. 38, p. 87-103, 1992.

O nível de atendimento pode ser definido em uma série de maneiras diferentes neste contexto, conforme descrito a seguir.

Medidas Alternativas de Nível de Atendimento

1. A probabilidade de que não ocorra um esgotamento do estoque entre o momento em que é feito um pedido e a quantidade encomendada for recebida.
2. O número médio de esgotamentos de estoque por ano.
3. A porcentagem média de demanda anual que pode ser satisfeita imediatamente (sem esgotamento de estoque).
4. O atraso médio em atender pedidos postergados em razão de um esgotamento de estoque.
5. O atraso médio global em atender pedidos (em que o atraso sem ocorrência de esgotamento de estoque é 0).

As medidas 1 e 2 estão intimamente relacionadas. Suponha, por exemplo, que a quantidade encomendada Q tenha sido estabelecida em 10% da demanda anual, de modo que seja feito uma média de dez pedidos por ano. Se a probabilidade para *ocorrência* de esgotamento de estoque durante o prazo de entrega for de 0,2 até que seja recebido um pedido, então o número médio de esgotamentos de estoques por ano seria de $10(0{,}2) = 2$.

As medidas 2 e 3 também estão relacionadas entre si. Suponha, por exemplo, que ocorra uma média de dois esgotamentos de estoque por ano e a duração média de um esgotamento de estoque seja de nove dias. Já que $2(9) = 18$ dias de esgotamento de estoque por ano são, essencialmente, 5% do ano, a porcentagem média de demanda anual que pode ser satisfeita imediatamente seria de 95%.

Além disso, as medidas 3, 4 e 5 estão relacionadas entre si. Suponha, por exemplo, que a porcentagem média de demanda anual que pode ser satisfeita imediatamente seja de 95% e o atraso médio no atendimento de pedidos em espera em virtude da ocorrência de um esgotamento de estoque seja de cinco dias. Visto que somente 5% dos clientes incorrem nesse atraso, o atraso médio global em atender pedidos seria então $0{,}05(5) = 0{,}25$ dia por pedido.

É preciso tomar uma decisão gerencial sobre o valor desejado de pelo menos uma dessas medidas de nível de atendimento. Após selecionar uma dessas medidas para dar atenção especial, é interessante verificar as implicações de vários valores alternativos dessa medida sobre algumas das demais medidas antes de escolher a melhor alternativa.

Provavelmente, a medida 1 é a mais conveniente a ser usada como medida principal e, assim, nos concentraremos agora nesse caso. Representaremos o nível de atendimento desejado segundo essa medida por L, portanto

$L =$ a probabilidade desejada pela gerência de que não venha ocorrer um esgotamento de estoque entre o momento em que for encomendada certa quantidade e esta for recebida.

Usar a medida 1 envolve trabalhar com a distribuição probabilística estimada da seguinte variável aleatória.

$D =$ demanda durante o prazo de entrega para atender um pedido.

Por exemplo, com uma distribuição uniforme, a fórmula para escolher o ponto para fazer novo pedido R é simples.

Se a distribuição probabilística de D for uma *distribuição uniforme* ao longo do intervalo de a até b, faça que

$$R = a + L(b - a),$$

pois, então,

$$P(D \leq R) = L.$$

Já que a média dessa distribuição é

$$E(D) = \frac{a + b}{2},$$

a quantidade de **estoque de segurança** (o nível de estoque esperado *logo* antes de uma quantidade encomendada ser recebida) fornecida pelo ponto para fazer novo pedido R é

$$\text{Estoque de segurança} = R - E(D) = a + L(b - a) - \frac{a + b}{2}$$

$$= \left(L - \frac{1}{2}\right)(b - a).$$

Quando a distribuição de demanda for algo diverso de uma distribuição uniforme, o procedimento para escolha de R é similar.

Procedimento Geral para Escolha de *R* Segundo a Medida 1 para Nível de Atendimento

1. Escolha L.
2. Encontre R tal que

$$P(D \le R) = L.$$

Suponha, por exemplo, que D seja uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, conforme mostrado na Figura 18.13. Dado o valor de L, a tabela para a distribuição normal fornecida no Apêndice 5 poderá então ser usada para determinar o valor de R. Em particular, é preciso encontrar apenas o valor de K_{1-L} nessa tabela e depois agregá-lo à fórmula a seguir para encontrar R.

$$R = \mu + K_{1-L}\sigma.$$

A quantidade de estoque de segurança resultante é

$$\text{Estoque de segurança} = R - \mu = K_{1-L}\sigma.$$

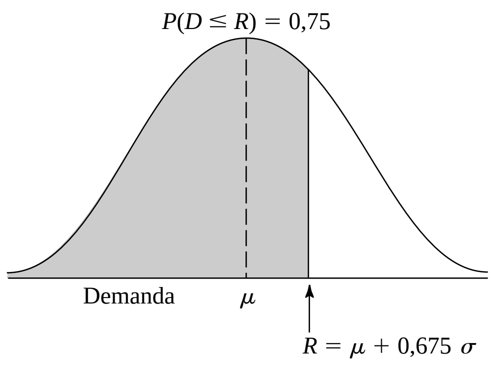
Para fins ilustrativos, se $L = 0{,}75$, então $K_{1-L} = 0{,}675$, de modo que

$$R = \mu + 0{,}675\sigma,$$

conforme mostrado na Figura 18.13. Isto nos leva a

$$\text{Estoque de segurança} = 0{,}675\sigma.$$

O *Courseware* de PO também inclui um gabarito em Excel que vai calcular tanto a quantidade encomendada Q quanto o ponto para fazer novo pedido R. Basta fornecer a demanda média por unidade de tempo (d), os custos (K, h e p) e o nível de atendimento baseado na medida 1. Também devemos indicar se a distribuição probabilística da demanda durante o prazo de entrega é uma distribuição uniforme ou uma distribuição normal. Para uma distribuição uniforme, especificamos o intervalo ao longo do qual a distribuição se estende através do fornecimento das extremidades inferior e superior desse intervalo. Para uma distribuição normal, devemos fornecer, em vez disso, a média μ e o desvio-padrão σ



■ FIGURA 18.13
Cálculo do ponto para fazer novo pedido R para o modelo estocástico de revisão contínua quando $L = 0{,}75$ e a distribuição probabilística da demanda ao longo do prazo de entrega para uma distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ.

da distribuição. Após fornecer todas essas informações, o gabarito calcula imediatamente Q e R e exibe esses resultados do lado direito.

Exemplo

Considere novamente o Exemplo 1 (fabricação de alto-falantes para aparelhos de TV) apresentado na Seção 18.1. Lembre-se de que o custo de implantação para produzir os alto-falantes é $K =$ US\$ 12.000, o custo unitário de manutenção de estoque é $h =$ US\$ 0,30 por alto-falante por mês e o custo de escassez unitário $p =$ US\$ 1,10 por alto-falante por mês.

Originalmente, havia uma taxa de demanda fixa de 8.000 alto-falantes por mês a ser montada em televisores produzidos em uma linha de produção a essa taxa fixa. Entretanto, as vendas de televisores têm sido bastante variáveis e, portanto, o nível de estoques de aparelhos finalizados flutuou muito. Para reduzir os custos de manutenção de estoque para aparelhos finalizados, a gerência decidiu ajustar diariamente a taxa de produção para os aparelhos para adequar melhor a produção às encomendas feitas.

Conseqüentemente, a demanda por alto-falantes agora é bastante variável. Há um *prazo de entrega* de um mês entre encomendar a produção de um lote de peças para produzir os alto-falantes e ter alto-falantes prontos para a montagem nos televisores. A demanda por alto-falantes durante esse prazo de entrega é uma variável aleatória D com distribuição normal com média de 8.000 e um desvio-padrão de 2.000. Para minimizar o risco de afetar a linha de produção para a fabricação de televisores, a gerência decidiu que o estoque de segurança por alto-falantes deveria ser suficientemente grande para evitar um esgotamento de estoque durante esse prazo de entrega em 95% das vezes.

Para aplicar o modelo, a quantidade encomendada para cada produção de um lote de peças de alto-falantes deveria ser

$$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\,\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2(8.000)(12.000)}{0\quad 0}}\,\sqrt{\frac{1{,}1+0{,}3}{1{,}1}} = 28.540.$$

Essa é a mesma quantidade encomendada que foi encontrada pelo modelo EOQ com falta de produto planejada na Seção 18.3 para a versão anterior desse exemplo em que havia uma taxa de demanda *constante* (em vez de uma média) de 8.000 alto-falantes por mês e era permitida a falta de produto planejada. Entretanto, a diferença fundamental em relação a antes é que o estoque de segurança agora precisa ser fornecido para compensar a demanda variável. A gerência optou por um nível de atendimento $L = 0{,}95$, de modo que a tabela usual no Apêndice 5 forneça $K_{1-L} = 1{,}645$. Portanto, o ponto para fazer novo pedido deveria ser

$$R = \mu + K_{1-L}\sigma = 8.000 + 1{,}645(2.000) = 11.290.$$

A quantidade de estoque de segurança resultante é

$$\text{Estoque de segurança} = R - \mu = 3.290.$$

A seção de Exemplos Trabalhados do CD-ROM fornece outro exemplo da aplicação desse modelo quando existem duas opções de remessa com distribuições diferentes para o prazo de entrega e a opção menos onerosa precisar ser identificada.

18.7 UM MODELO ESTOCÁSTICO DE PERÍODO SIMPLES PARA PRODUTOS PERECÍVEIS

Ao escolher um modelo de estoques a ser usado para determinado produto, deve ser feita uma distinção entre dois tipos de produtos. Um deles é chamado **produto estável**, que permanecerá indefinidamente em uma condição para venda de modo que não haja nenhum prazo para venda de seu estoque. Esse é o tipo de produto considerado nas seções anteriores (bem como na próxima seção). Contrastando com esse primeiro tipo, temos aquele dos **produtos perecíveis**, que pode ser mantido em estoque por um período muito limitado antes de perder sua validade e, conseqüentemente, a possibilidade de ser vendido. Esse é o tipo de produto para o qual o modelo de período simples (e suas variações) apresentado nesta seção é desenvolvido. Particularmente, o período simples no modelo é o período extremamente limitado antes de o produto não poder ser mais vendido.

Um exemplo de produto perecível é um jornal diário à venda em uma banca de jornal. Determinado jornal diário pode ser mantido em estoque por apenas um dia antes de se tornar desatualizado e precisar ser reposto pelo jornal do dia seguinte. Quando a demanda pelo jornal for uma variável aleatória (conforme pressuposto nesta seção), o dono da banca precisa optar por uma quantidade diária a ser encomendada que ofereça uma relação apropriada entre o custo potencial de pedidos superdimensionados (a despesa desperdiçada de encomendar mais jornais do que podem ser vendidos) e o custo potencial de pedidos subdimensionados (o lucro perdido por encomendar menos jornais do que podem ser vendidos). O modelo desta seção permite encontrar a quantidade diária a ser encomendada que maximizaria o lucro esperado.

Como o problema genérico em análise se ajusta também a esse exemplo, o problema tem sido tradicionalmente denominado **problema do jornaleiro**.[9] Entretanto, foi sempre reconhecido que o modelo sendo usado pode ser aplicado a outros produtos perecíveis da mesma forma que para os jornais. De fato, a maioria das aplicações tem sido para produtos perecíveis sem ser jornais, entre os quais os produtos perecíveis listados a seguir.

Alguns Tipos de Produtos Perecíveis

À medida que você for lendo a lista seguinte dos diversos tipos de produtos perecíveis, imagine como o controle de estoques de tais produtos seria análogo a uma negociação em uma banca de jornais diários, uma vez que esses produtos também não podem ser vendidos após um período simples. As diferenças estão na duração desse período que poderia ser de uma semana, um mês ou até mesmo vários meses em vez de apenas um dia.

1. Periódicos, como jornais e revistas.
2. Flores à venda por um florista.
3. A preparação de comida fresca em um restaurante.
4. Produtos alimentícios, incluindo frutas frescas e vegetais, a serem vendidos em um armazém.
5. Árvores de natal.
6. Vestuário sazonal, como casacos para o inverno, onde qualquer mercadoria que sobre no final de uma estação deve ser vendida a preços com grandes descontos para liberar espaço para a próxima estação.
7. Cartões de felicitações sazonais (casamento, aniversário, Ano-Novo, Natal, ...)
8. Produtos da moda que em pouco tempo ficam fora da moda.
9. Carros novos no final do ano de um modelo.
10. Qualquer produto que em breve se tornará obsoleto.
11. Peças de reposição vitais que devem ser fabricadas durante a última produção de um lote de peças de determinado modelo de um produto (por exemplo, um avião) para uso conforme a necessidade durante o longo período de vida desse modelo.
12. Reservas feitas por uma companhia aérea para dado vôo. Reservas em excesso do número de assentos disponíveis (*overbooking*) podem ser vistas como o estoque de um produto perecível (eles não podem ser vendidos após o vôo ter acontecido), em que a demanda então é o número de passageiros que não se apresentaram. Com essa interpretação, o custo de pedidos subdimensionados (pouco *overbooking*) seria o lucro perdido causado pelos assentos vazios e o custo de pedidos superdimensionados (nível de *overbooking* demasiadamente alto) seria o custo de indenização de clientes que não puderam voar em razão da falta de assentos disponíveis no vôo.

[9] Outro nome (tradicional) é o *problema do vendedor ambulante de jornais.* Outros nomes incluem o *modelo probabilístico de período simples* e o *modelo estocástico de período simples.*

Esse último tipo é particularmente interessante, pois as principais companhias aéreas (e diversas outras empresas envolvidas com transporte de passageiros) agora estão usando intensivamente o modelo apresentado nesta seção para analisar o nível de *overbooking* a ser implementado. Por exemplo, um artigo da edição de janeiro-fevereiro de 1992 da *Interfaces* descreve como a *American Airlines* está lidando com o *overbooking* dessa maneira. Além disso, o artigo descreve como a empresa também está usando a pesquisa operacional para resolver algumas questões relacionadas (por exemplo, a estrutura de tarifas). Essas aplicações de PO em particular (comumente chamadas *gestão de receitas*) foram responsáveis por um aumento de cerca de US$ 500 milhões nas receitas anuais da American Airlines. O impacto total nos lucros anuais no ramo de transportes de passageiros giraria na casa dos bilhões de dólares. Ver Referência Selecionada 13 para um livro recente que é totalmente dedicado à teoria e prática da gestão de rendimentos.

Ao controlar o estoque desses diversos tipos de produtos perecíveis, ocasionalmente é necessário lidar com algumas considerações que estão além daquelas que serão discutidas nesta seção. Têm sido feitas muitas pesquisas para estender o modelo de modo a englobar essas considerações e tem sido obtido um progresso considerável neste sentido. A Referência Selecionada 5 fornece uma revisão de literatura disponível para essa pesquisa.[10]

Exemplo

Retorne ao Exemplo 2 na Seção 18.1, que envolve a distribuição no atacado de determinado modelo de bicicleta (uma bicicleta pequena de uma velocidade para meninas). Foi desenvolvido um novo modelo e o fabricante acaba de informar ao distribuidor que o presente modelo não será mais fabricado. Para ajudar a vender o estoque do antigo modelo, o fabricante está oferecendo ao distribuidor a oportunidade de uma compra final em condições muito favoráveis, isto é, um *custo unitário* de apenas US$ 20 por bicicleta. Com esse acordo especial, o distribuidor também incorreria *no custo de implantação* para fazer esse pedido.

O distribuidor acredita que essa oferta oferece uma oportunidade ideal para fazer uma última rodada de vendas a seus clientes (lojas de bicicleta) para o Natal que se aproxima por um preço reduzido de apenas US$ 45 por bicicleta, perfazendo assim um lucro de US$ 25 por bicicleta. Isso exigiria uma venda única somente porque esse modelo será em breve substituído por um modelo novo que tornará o atual obsoleto. Dessa forma, quaisquer bicicletas não vendidas durante essa venda se tornarão praticamente inúteis. Entretanto, o distribuidor acredita que será capaz de se livrar de quaisquer bicicletas restantes após o Natal, vendendo-as pelo preço nominal de US$ 10 cada (o *valor de custos recuperados*), recuperando, com isso, metade do custo de aquisição. Considerando-se essa perda, caso ele encomende mais do que é capaz de vender, bem como o lucro perdido, caso ele encomende menos do que pode ser vendido, o distribuidor precisa decidir que quantidade a ser encomendada deve ser submetida ao fabricante.

O custo administrativo incorrido para fazer esse tipo especial de encomenda para a época natalina é relativamente pequeno e, portanto, esse custo será ignorado até quase o final desta seção.

Outra despesa relevante é o custo de manter bicicletas não vendidas em estoque até que elas possam ser vendidas após o Natal. Combinando o custo de capital imobilizado em estoque e outros custos de armazenamento, esse custo de estoque é estimado em US$ 1 por bicicleta que sobra em estoque após o Natal. Assim, considerando-se também o valor de custos recuperados de US$ 10, o custo de manutenção de estoque *unitário* é $-$US$ 9 por bicicleta que sobra no estoque no final.

---

[10] Entre pesquisas mais recentes podemos citar: DING, X. et al. The Censored Newsvendor and the Optimal Acquisition of Information. *Operational Research*, v. 50, p. 517-527, 2002. Ver também as páginas 404-420 do volume 46 (2001) da *Management Science*, páginas 1.101-1.112 e 1.488-1.497 do volume 47 (2001) da *Management Science* e páginas 183-194 do volume 47 (1999) da *Operational Research*, bem como as páginas 131-142 do volume 35 (2003) da *IIE Transactions*. Para uma discussão dos prós e contras dos diferentes métodos do problema do jornaleiro, ver PFEIFER, P. E. et al. Teaching Our Students to Be Newsvendors. *Interfaces*, v. 31, n. 6, p. 112-122, nov./dez. 2001.

Resta discutirmos a respeito de outros dois componentes de custo, o custo de escassez e a receita. Se a demanda exceder a oferta, aqueles clientes que não conseguirem comprar uma bicicleta poderão guardar certo rancor, resultando, portanto, em um "custo" ao distribuidor. Esse custo é a quantificação por item da perda de credibilidade com o cliente vezes a demanda insatisfeita toda vez que ocorrer uma falta de produto. O distribuidor considera desprezível esse custo.

Se adotarmos o critério de maximização do lucro, temos de incluir as receitas no modelo. De fato, o lucro total é igual à receita total menos os custos incorridos (custos referentes ao pedido, manutenção de estoque e de custo de escassez). Partindo do pressuposto de que *não haja nenhum estoque inicial*, esse lucro para o distribuidor é

Lucro = US\$ 45 $\times$ número de itens vendidos pelo distribuidor
− US\$ 20 $\times$ número de itens comprados pelo distribuidor
+ US\$ 9 $\times$ número de itens não vendidos e, portanto, colocados à disposição para valor de custos recuperados.

Façamos que

S = número de itens comprados pelo distribuidor
= nível de estoque (inventário) após receber essa compra (já que inicialmente não existe nenhum estoque)

e

D = demanda por parte das lojas de bicicleta (uma variável aleatória),

de modo que

$$\text{mín}\{D, S\} = \text{número de itens vendidos},$$
$$\text{máx}\{0, S - D\} = \text{número de itens não vendidos}.$$

Então

$$\text{Lucro} = 45\ \text{mín}\{D, S\} - 20y + 9\ \text{máx}\{0, S - D\}.$$

O primeiro termo também pode ser escrito na forma

$$45\ \text{mín}\{D, S\} = 45D - 45\ \text{máx}\{0, D - S\}.$$

O termo 45 máx$\{0, D - S\}$ representa a *receita perdida proveniente de demanda insatisfeita*. Essa receita perdida mais qualquer custo causado pela perda de credibilidade com o cliente em razão da demanda insatisfeita (desprezível por pressuposição, nesse exemplo), será interpretado como o custo de escassez durante toda esta seção.

Note agora que $45D$ é independente da política de estoques (o valor de y escolhido) e, portanto, pode ser eliminado da função objetivo, que leva a

$$\text{Lucro relevante} = -45\ \text{máx}\{0, D - S\} - 20S + 9\ \text{máx}\{0, S - D\}$$

a serem maximizados. Todos os termos à direita são, respectivamente, o *negativo* de *custos*, em que esses custos são o custo de escassez, o *custo para fazer o pedido* e o *custo de manutenção* de estoque (que possui um valor negativo, nesse caso). Em vez de *maximizar* o *negativo* do *custo total*, usaremos o equivalente da *minimização*

$$\text{Custo total} = 45\ \text{máx}\{0, D - S\} + 20S - 9\ \text{máx}\{0, S - D\}.$$

Mais precisamente, já que o custo total é uma variável aleatória (pois D é uma variável aleatória), o objetivo adotado para o modelo é *minimizar o custo total esperado*.

Na discussão sobre a interpretação do custo de escassez, partimos do pressuposto de que a demanda insatisfeita era perdida (sem *backlogging*). Se a demanda insatisfeita não puder ser atendida por uma entrega prioritária, aplica-se raciocínio similar. O componente da receita líquida seria o preço de venda de uma bicicleta (US\$ 45) vezes a demanda *menos* o custo unitário da entrega prioritária vezes a demanda insatisfeita toda vez que ocorrer falta do produto. Se nosso distribuidor no atacado pudesse ser forçado a atender à demanda insatisfeita com a compra de bicicletas do fabricante por US$ 35 cada mais frete de, digamos, US$ 2 para cada bicicleta, então o custo de escassez apropriado seria de US$ 37 por bicicleta. Se existir qualquer custo associado à perda de credibilidade com o cliente, este também seria acrescentado a essa quantia.

O distribuidor não sabe qual será a demanda por essas bicicletas, isto é, a demanda D é uma variável aleatória. Entretanto, uma política de estoques ótima pode ser obtida caso as informações sobre a distribuição probabilística de D se encontrem disponíveis. Façamos que

$$P_D(d) = P\{D = d\}.$$

Partiremos do pressuposto de que $P_D(d)$ seja conhecido para todos os valores de $d = 0, 1, 2, \ldots$.

Agora, nos encontramos em uma posição para sintetizar o modelo em termos genéricos.

Hipóteses do Modelo

1. Cada aplicação envolve um único produto perecível.
2. Cada aplicação envolve um único período, pois o produto não pode ser vendido posteriormente.
3. Entretanto, será possível dispor de quaisquer unidades remanescentes do produto no final do período, quem sabe, até mesmo recebendo um *valor de custos recuperados* para as unidades.
4. Poderá haver algum estoque inicial em mãos invadindo esse período, conforme representado por

$$I = \text{estoque inicial.}$$

5. A única decisão a ser feita é em relação ao número de unidades a serem encomendadas (via compra ou fabricação) de modo que elas possam ser colocadas no estoque no início do período. Portanto,

$$\begin{aligned} Q &= \text{quantidade a ser encomendada,} \\ S &= \text{nível de estoque (inventário) após recebimento dessa encomenda} \\ &= I + Q. \end{aligned}$$

Dado I, será conveniente usar S como *variável de decisão* do modelo, que então determinará automaticamente $Q = S - I$.

6. A *demanda* para retirada de unidades do estoque para venda (ou para qualquer outro fim) durante o período é uma variável aleatória D. Entretanto, a distribuição probabilística de D é conhecida (ou, pelo menos estimada).
7. Após eliminar a receita caso a demanda seja satisfeita (já que isto é independente da decisão y), o objetivo se torna minimizar o custo total esperado, no qual os componentes de custo são

$K =$ custo de implantação para compra ou produção do lote completo de unidades,

$c =$ custo unitário para compra ou produção de cada unidade,

$h =$ custo de manutenção de estoque por unidade que sobre no final do período (inclui custo de armazenamento menos o valor de custos recuperados),

$p =$ custo de escassez por unidade de demanda insatisfeita (inclui receita perdida e custo pela perda de credibilidade com o cliente).

Análise do Modelo Sem Estoque Inicial ($\boldsymbol{I} = 0$) e Nenhum Custo de Implantação ($\boldsymbol{K} = 0$)

Antes de analisarmos o modelo em sua total generalidade, seria esclarecedor começarmos a considerar o caso mais simples em que $I = 0$ (nenhum estoque inicial) e $K = 0$ (nenhum custo de implantação).

A decisão sobre o valor de S, a quantidade de estoque a ser encomendada, depende muito da distribuição probabilística da demanda D. Pode ser que seja desejável mais que a demanda esperada, porém provavelmente menos que a máxima demanda possível. É preciso encontrar um equilíbrio entre (1) o risco de ficar com falta de produto e, portanto, incorrer em custos de escassez e (2) o risco de ter excesso e, assim, incorrer em desperdícios com custos de encomenda e de armazenagem de unidades em excesso. Isso é feito minimizando-se o valor esperado (em termos estatísticos) da soma desses custos.

A quantidade vendida é dada por

$$\text{mín}\{D, S\} = \begin{cases} D & \text{se } D < S \\ S & \text{se } D \geq S. \end{cases}$$

Portanto, o custo incorrido caso a demanda seja D e S seja estocado, será dado por

$$C(D, S) = cS + p \text{ máx}\{0, D - S\} + h \text{ máx}\{0, S - D\}.$$

Como a demanda é uma variável aleatória [com distribuição probabilística $P_D(d)$], esse custo também é uma variável aleatória. O custo esperado é então dado por $C(S)$, em que

$$\begin{aligned} C(S) = E[C(D, S)] &= \sum_{d=0}^{\infty} (cS + p \text{ máx}\{0, d - S\} + h \text{ máx}\{0, S - d\})P_D(d) \\ &= cS + \sum_{d=S}^{\infty} p(d - S)P_D(d) + \sum_{d=0}^{S-1} h(S - d)P_D(d). \end{aligned}$$

A função $C(S)$ depende da distribuição probabilística de D. Freqüentemente, uma representação dessa distribuição probabilística é difícil de ser encontrada, particularmente quando a demanda varia segundo um grande número de valores possíveis. Conseqüentemente, essa *variável aleatória discreta* normalmente é aproximada por uma *variável aleatória contínua.* Além disso, quando a demanda varia segundo um grande número de possibilidades, essa aproximação geralmente conduzirá a um valor aproximadamente exato da quantidade ótima de estoque a ser armazenada. Além disso, quando se usa demanda discreta, as expressões resultantes podem se tornar ligeiramente mais difíceis de serem resolvidas analiticamente. Portanto, a menos que declarado em contrário, partiremos do pressuposto de que a *demanda* seja *contínua* no restante deste capítulo.

Para essa variável aleatória contínua D, façamos que

$$f(x) = \text{função densidade probabilística de } D$$

e

$$F(d) = \text{função distribuição cumulativa (CDF, em inglês) de } D,$$

de modo que

$$F(d) = \int_0^d f(x)\, dx.$$

Ao escolher um nível de estoque S, a CDF $F(d)$ se torna a probabilidade de que *não* venha a ocorrer falta de produto antes de o período terminar. Como na seção anterior, essa probabilidade é conhecida como **nível de atendimento** sendo fornecido pela quantidade encomendada. O custo esperado correspondente $C(S)$ é expresso como

$$\begin{aligned} C(S) = E[C(D, S)] &= \int_0^{\infty} C(x, S)f(x)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} (cS + p \text{ máx}\{0, x - S\} + h \text{ máx}\{0, S - x\})f(x)\, dx \\ &= cS + \int_S^{\infty} p(x - S)f(x)\, dx + \int_0^S h(S - x)f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Torna-se então necessário achar o valor de S, digamos S^*, que minimiza $C(S)$. Encontrar uma fórmula para S^* requer uma dedução relativamente sofisticada e prolongada, portanto, nesse caso, daremos apenas a resposta. Entretanto, essa dedução é fornecida no CD-ROM como suplemento deste capítulo para o leitor mais curioso e propenso a cálculos matemáticos. Esse suplemento também estende brevemente o modelo para o caso em que os custos de manutenção de estoque e custos de escassez são *não-lineares* em vez de funções lineares.

Esse suplemento demonstra que a função $C(S)$ possui aproximadamente a forma mostrada na Figura 18.14, pois ela é uma função *convexa* (isto é, uma segunda derivada é *não-negativa* em qualquer ponto). Na realidade, ela é uma função *estritamente convexa* (isto é, uma segunda derivada é *estritamente positiva* em qualquer ponto) se $f(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. Além disso, a primeira derivada se torna positiva para S suficientemente grande e, portanto, $C(S)$ deve possuir um mínimo global. Esse mínimo global é mostrado na Figura 18.14 como S^* e, dessa forma, $S = S^*$ é o nível de estoque ótimo a ser obtido quando a quantidade encomendada ($Q = S^*$) for recebida no início do período.

Em particular, o suplemento mostra que o nível de estoque ótimo S^* é tal que o valor satisfaça

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + h}.$$

Portanto, $F(S^*)$ é o *nível de atendimento ótimo* e o nível de estoque correspondente S^* pode ser obtido seja resolvendo-se essa equação algebricamente, seja colocando-se a CDF em um gráfico e então identificando S^* graficamente. Para interpretar o lado direito dessa equação, o numerador pode ser visto como

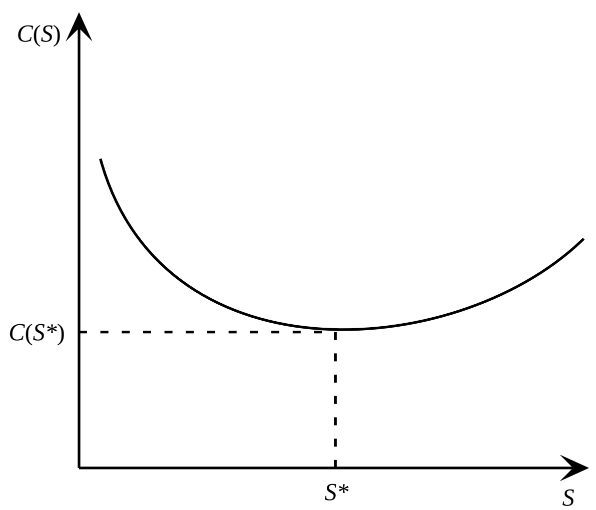
$p - c$ = custo unitário de pedido subdimensionado
= diminuição no lucro resultante da falha por não encomendar uma unidade que poderia ter sido vendida durante o período.

De maneira similar,

$c + h$ = custo unitário do pedido superdimensionado
= diminuição no lucro resultante por encomendar uma unidade que não poderia ser vendida durante o período.

Portanto, representando o custo unitário de pedido subdimensionado e de pedido superdimensionado por, respectivamente, C_{sub} e C_{super}, esta equação está especificando que

$$\text{Nível de atendimento ótimo} = \frac{C_{\text{super}}}{C_{\text{super}} + C_{\text{sub}}}.$$



■ FIGURA 18.14
Gráfico de $C(S)$, o custo esperado para o modelo estocástico de período simples para produtos peresíveis em função de S (o nível de estoques quando a quantiddae encomendada $Q = S - I$ para recebida no início do período), dado que o estoque inicial seja $I = 0$ e o custo de implantação seja $K = 0$.

Quando a demanda tiver uma distribuição uniforme ou então exponencial, temos um procedimento automático disponível no Tutorial IOR para calcular S^*.

Se for suposto que D é uma variável aleatória discreta com a CDF

$$F(d) = \sum_{n=0}^{d} P_D(n),$$

obtém-se um resultado similar. Em particular, o nível de estoque ótimo S^* é o menor inteiro tal que

$$F(S^*) \geq \frac{p - c}{p + h}.$$

A seção de Exemplos Trabalhados do CD-ROM fornece um exemplo envolvendo o *overbooking* de uma companhia aérea em que D é uma variável aleatória discreta. O exemplo a seguir trata D como uma variável aleatória contínua.

Aplicação ao Exemplo

Retornando ao exemplo da bicicleta descrito no início desta seção, partimos do pressuposto de que a demanda tenha uma distribuição exponencial com média igual a 10.000, de modo que sua função densidade probabilística seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10.000} e^{-x/10.000} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a CDF é

$$F(d) = \int_0^d \frac{1}{10.000} e^{-x/10.000}\, dx = 1 - e^{-d/10.000}.$$

Com base nos dados,

$$c = 20, \qquad p = 45, \qquad h = -9.$$

Por conseguinte, S^* (o nível de estoque ótimo a ser obtido no princípio para começar a atender à demanda) é o valor que satisfaz

$$1 - e^{-S^*/10.000} = \frac{45 - 20}{45 - 9} = 0{,}69444.$$

Usando-se o logaritmo natural (representado por ln), essa equação pode ser resolvida como se segue:

$$\begin{aligned} e^{-S^*/10,000} &= 0{,}30556, \\ \ln e^{-S^*/10,000} &= \ln 0{,}30556, \\ \frac{-S^*}{10,000} &= -1{,}1856, \\ S^* &= 11{,}856. \end{aligned}$$

Portanto, o distribuidor deveria estocar 11.856 bicicletas na época natalina. Observe que esse número é ligeiramente maior que a demanda esperada de 10.000.

Sempre que a demanda tiver uma distribuição exponencial com um valor esperado de λ, então S^* pode ser obtido da relação

$$S^* = -\lambda \ln \frac{c + h}{p + h}.$$

Análise do Modelo com Estoque Inicial ($I > 0$), Mas Nenhum Custo de Implantação ($k = 0$)

Considere agora o caso no qual $I > 0$ e, portanto, já existem I unidades em estoque entrando no período, porém anterior ao recebimento da quantidade encomendada, $Q = S - I$. Por exemplo, esse caso surgiria para o exemplo da bicicleta caso o distribuidor começasse com 500 bicicletas antes de fazer um pedido, logo, $I = 500$. Continuaremos a supor que $K = 0$ (nenhum custo de implantação).

Façamos que

$\overline{C}(S)$ = custo esperado para o modelo para qualquer valor de I e K (inclusive a hipótese atual que $K = 0$), dado que S seja o nível de estoques obtido quando a quantidade encomendada for recebida no início do período,

portanto o objetivo é escolher $S \geq I$ de modo a

$$\underset{S \geq I}{\text{Minimizar}} \quad \overline{C}(S).$$

Será interessante comparar $\overline{C}(S)$ com a função de custo usada na subseção anterior (e representada graficamente na Figura 18.14),

$C(S)$ = custo esperado para o modelo, dado S, quando $I = 0$ e $K = 0$.

Com $K = 0$,

$$\overline{C}(S) = c(S - I) + \int_S^{\infty} p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx.$$

Dessa forma, $\overline{C}(S)$ é idêntico a $C(S)$, exceto pelo primeiro termo, em que $C(S)$ tem cS em vez de $c(S - I)$. Logo,

$$\overline{C}(S) = C(S) - cI.$$

Visto que I é uma constante, isso significa que $\overline{C}(S)$ alcança seu mínimo no mesmo valor de S^* como para $C(S)$, conforme ilustrado na Figura 18.14. Entretanto, já que S deve se restrito a $S \geq I$, se $I > S^*$, a Figura 18.14 indica que $\overline{C}(S)$ seria minimizado ao longo de $S \geq I$ fazendo $S = I$ (isto é, não fazer um pedido). Isso leva à seguinte política de estoques.

Política de Estoques Ótima com $I > 0$ e $K = 0$

Se $I < S^*$, faça um pedido de $S^* - I$ para que o nível de estoques chegue a S^*.
Se $I \geq S^*$, não faça o pedido,

em que S^* satisfaz novamente

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + h}.$$

Portanto, no exemplo da bicicleta, se houver 500 bicicletas disponíveis, a política ótima é elevar o nível de estoques para 11.856 bicicletas (o que implica a encomenda de 11.356 bicicletas adicionais). No entanto, se houvesse 12.000 bicicletas já disponíveis, a política ótima seria não fazer um novo pedido.

Análise do Modelo com um Custo de Implantação ($K > 0$)

Considere agora a versão remanescente do modelo em que $K > 0$ e, portanto, é incorrido um custo de implantação igual a K para aquisição ou produção de todo o lote de unidades que está sendo encomendado. Para o exemplo da bicicleta, se fosse incorrido um custo administrativo de US$ 800 para o pedido especial por bicicletas para o Natal, então $K = 800$. Agora, permitimos qualquer valor de estoque inicial, portanto $I \geq 0$.

Com $K > 0$, o custo esperado $\overline{C}(S)$, dado o valor da variável de decisão S, é

$$\overline{C}(S) = K + c(S - I) + \int_S^{\infty} p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx \qquad \text{se for feito um pedido;}$$

$$\overline{C}(S) = \int_S^{\infty} p(x - S)f(x)dx + \int_0^S h(S - x)f(x)dx \qquad \text{se não for feito um pedido.}$$

Assim, em comparação com a função de custo esperado $C(S)$ que é indicada na Figura 18.14 (que parte do pressuposto de que $I = 0$ e $K = 0$),

$$\overline{C}(S) = K + C(S) - cI \qquad \text{se for feito um pedido;}$$
$$\overline{C}(I) = C(I) - cI \qquad \text{se não for feito um pedido.}$$

Como I é uma constante, o termo cI em ambas as expressões pode ser ignorado para fins de minimização $\overline{C}(S)$ no intervalo $S \geq I$. Conseqüentemente, a representação gráfica de $C(S)$ na Figura 18.14 pode ser usada para determinar se devemos fazer um pedido ou não e, em caso positivo, que valor de S deveria ser selecionado.

Isso é o que é feito na Figura 18.15, em que s^* é o valor de S tal que

$$C(s^*) = K + C(S^*).$$

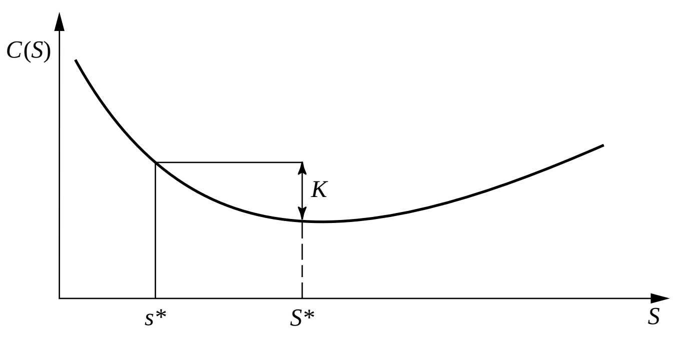
Portanto,

se $I < s^*$,	então $C(S^*) < K + C(I)$,	portanto deveríamos fazer um pedido com $S = S^*$;
se $I \geq s^*$,	então $C(S) \leq K + C(I)$ para qualquer $S \geq I$,	portanto não deveríamos fazer um pedido.

Em outras palavras, se o estoque inicial I for menor que s^*, então gastar o custo de implantação K vale a pena, pois elevar o nível de estoques para S^* (encomendando $S - I$) reduzirá o custo remanescente esperado de um valor maior que K quando comparado com o caso de não fazer pedido algum. Entretanto, se $I > s^*$, então se torna impossível recuperar o custo de implantação K encomendando qualquer quantidade. Se $I = s^*$, incorrer no custo de implantação K para encomendar $S^* - s^*$ reduzirá o custo remanescente esperado dessa mesma quantia e, portanto, não há razão alguma para se incomodar em fazer o pedido. Isso leva à seguinte política de estoques.

Política de Estoques Ótima com $I \geq 0$ e $K > 0$

Se $I < s^*$, encomendar $S^* - I$ para elevar o nível de estoques para S^*.
Se $I^* \geq s^*$, não fazer o pedido.
(Ver as fórmulas dentro dos retângulos com fundo escuro para S^* e s^* dadas anteriormente.)



■ FIGURA 18.15
O gráfico de $C(S)$, o custo esperado (dado S) para o modelo estocástico de período simples, quando $I = 0$ and $K = 0$, está sendo usado aqui para determinar os pontos críticos, s^* e S^*, da política de estoques ótima para a versão do modelo em que $I \geq 0$ e $K > 0$.

Quando a demanda tiver uma distribuição uniforme ou exponencial, existe um procedimento automático disponível no Tutorial IOR para calcular s^* e S^*.

Esse tipo de política é conhecido como uma **política (s, S)**. Ela tem sido usada intensivamente pelo setor.

Uma política (s, S) também é muitas vezes usada quando se aplica modelos estocásticos de revisão periódica a *produtos estáveis* e, portanto, períodos múltiplos precisam ser considerados. Nesse caso, encontrar a política de estoques ótima é ligeiramente mais complicado já que os valores de s e S podem precisar ser diferentes para períodos diversos. Um segundo suplemento para este capítulo que se encontra no CD-ROM fornece os detalhes.

Retornando ao modelo atual de um único período, iremos ilustrar o cálculo da política de estoques ótima para o exemplo da bicicleta quando $K > 0$.

Aplicação ao Exemplo

Suponha que o custo administrativo de se fazer um pedido especial para as bicicletas para o Natal vindouro seja estimado em US$ 800. Portanto, os parâmetros do modelo agora são

$$K = 800, \qquad c = 20, \qquad p = 45, \qquad h = -9.$$

Conforme indicado anteriormente, parte-se do pressuposto de que a demanda por bicicletas tenha uma distribuição exponencial com média de 10.000.

Descobrimos anteriormente para esse exemplo que

$$S^* = 11.856.$$

Para encontrar s^*, precisamos resolver a equação,

$$C(s^*) = K + C(S^*),$$

para s^*. Incorporando duas vezes na expressão para $C(S)$ dada na parte inicial desta seção, com $S = s^*$ no lado esquerdo da equação e $S = S^* = 11.856$ no lado direito, a equação fica

$$\begin{aligned}
&20s^* + 45\int_{s^*}^{\infty}(x - s^*)\frac{1}{10.000}e^{-x/10.000}dx - 9\int_{0}^{s^*}(s^* - x)\frac{1}{10.000}e^{-x/10.000}dx \\
&= 800 + 20(11.856) + 45\int_{11.856}^{\infty}(x - 11.856)\frac{1}{10.000}e^{-x/10.000}dx \\
&\quad - 9\int_{0}^{11,856}(11.856 - x)\frac{1}{10.000}e^{-x/10.000}dx.
\end{aligned}$$

Após extensivos cálculos para estipular o número do lado direito e para reduzir o lado direito para uma expressão mais simples em termos de s^*, essa equação finalmente nos conduz à solução numérica,

$$s^* = 10.674.$$

Portanto, a política ótima requer que se eleve o nível de estoques para $S^* = 11.856$ bicicletas, caso a quantidade disponível seja menor que $s^* = 10.674$. Caso contrário, não é feito nenhum pedido.

Solução Aproximada para a Política Ótima Quando a Demanda Tem Distribuição Exponencial

Nesse exemplo que acabamos de ilustrar, é necessário um cálculo extensivo para se encontrar s^* mesmo quando a demanda tem uma distribuição relativamente simples como o caso da distribuição exponencial. Assim, dado essa distribuição de demanda, agora desenvolveremos uma boa aproximação para a política de estoques ótima que seja fácil de ser calculada.

Conforme descrito na Seção 17.4, para uma distribuição exponencial com uma média de $1/\alpha$, as funções densidade probabilística $f(x)$ e CDF $F(x)$ são

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad \text{para } x \geq 0,$$
$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \qquad \text{para } x \geq 0.$$

Conseqüentemente, já que

$$F(S^*) = \frac{p - c}{p + h},$$

temos

$$1 - e^{-\alpha S^*} = \frac{p - c}{p + h}, \qquad \text{ou} \qquad e^{-\alpha S^*} = \frac{(p + h) - (p - c)}{p + h} = \frac{h + c}{h + p},$$

portanto

$$\boxed{S^* = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{h + p}{h + c}}$$

é a solução exata para S^*.

Para começar a desenvolver uma aproximação para s^*, começamos com a equação exata,

$$C(s^*) = K + C(S^*).$$

Uma vez que

$$C(S) = cS + h \int_0^S (S - x)\alpha e^{-\alpha x}\, dx + p \int_S^\infty (x - S)\alpha e^{-\alpha x}\, dx$$
$$= (c + h)S + \frac{1}{\alpha}(h + p)e^{-\alpha S} - \frac{h}{\alpha}.$$

Essa equação fica

$$(c + h)s^* + \frac{1}{\alpha}(h + p)e^{-\alpha s^*} - \frac{h}{\alpha} = K + (c + h)S^* + \frac{1}{\alpha}(h + p)e^{-\alpha S^*} - \frac{h}{\alpha},$$

ou (usando o resultado dado anteriormente para S^*)

$$(c + h)s^* + \frac{1}{\alpha}(h + p)e^{-\alpha s^*} = K + (c + h)S^* + \frac{1}{\alpha}(c + h).$$

Embora essa última equação não possua uma solução fechada para s^*, ela pode ser resolvida numericamente. Uma solução analítica aproximada também pode ser obtida como se segue. Fazendo que

$$\Delta = S^* - s^*,$$

e notando que

$$e^{-\alpha S^*} = \frac{h + c}{h + p},$$

a última equação resulta em

$$\frac{1}{\alpha}(h + p)\,\frac{e^{-\alpha s^*}}{e^{-\alpha S^*}} = \frac{K + (c + h)\Delta + \dfrac{1}{\alpha}(c + h)}{\dfrac{h + c}{h + p}},$$

que se reduz a

$$e^{\alpha\Delta} = \frac{\alpha K}{c + h} + \alpha\Delta + 1.$$

Caso $\alpha\Delta$ seja próximo de zero, $e^{\alpha\Delta}$ pode ser expandido em uma série de Taylor em torno de zero. Se os termos anteriores do termo quadrático puderem ser desprezados, o resultado fica

$$1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha^2\Delta^2}{2} \cong \frac{\alpha K}{c + h} + \alpha\Delta + 1,$$

de modo que

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{2K}{\alpha(c + h)}}.$$

Portanto, a aproximação desejada para s* é

$$s^* \cong S^* - \sqrt{\frac{2K}{\alpha(c + h)}}.$$

Usando essa aproximação no exemplo da bicicleta resulta em

$$\Delta \cong \sqrt{\frac{(2)(10.000)(800)}{20 - 9}} = 1.206,$$

de modo que

$$s^* \cong 11.856 - 1.206 = 10.650,$$

que é bem próximo do valor exato de $s^* = 10.674$.

18.8 SISTEMAS DE ESTOQUES MAIORES USADOS NA PRÁTICA

Todos os modelos de estoques apresentados neste capítulo se preocuparam com o controle de estoques de um único produto em uma única posição geográfica. Tais modelos fornecem os alicerces para o controle de estoques científico.

Sistemas de Estoque com Vários Produtos

Entretanto, é importante reconhecer que muitos sistemas de estoques devem lidar simultaneamente com muitos produtos, chegando algumas vezes a centenas ou até mesmo milhares de produtos. Além disso, o estoque de cada produto normalmente é disperso geograficamente, talvez até globalmente.

Com vários produtos, é comumente possível aplicar o modelo de produto único apropriado a cada um dos produtos individualmente. Entretanto, as empresas talvez não se interessem por fazer isso com os produtos menos importantes em virtude dos custos envolvidos no monitoramento regular do nível de estoques para implementar tal modelo. Uma metodologia popular usada na prática é o **método de controle ABC**. O processo envolve dividir os produtos em três grupos chamados grupo *A*, *B* e *C*. Os produtos do grupo *A* são os particularmente importantes e que devem ser cuidadosamente monitorados de acordo com um modelo de estoque formal. Produtos do grupo *C* são menos importantes, de modo que eles sejam apenas monitorados informalmente de maneira bem ocasional. Os produtos do grupo *B* recebem um tratamento intermediário.

Ocasionalmente não é apropriado aplicar modelo de estoques com um único produto em razão das interações entre os produtos. São possíveis diversas interações. Talvez produtos similares possam ser substituídos entre si conforme a necessidade. Para um fabricante, quem sabe, seus produtos devam competir por tempo de produção ao encomendar a produção de lotes de peças. Para um atacadista ou varejista, talvez seu custo de implantação para encomendar um produto possa ser reduzido fazendo simultaneamente um pedido conjunto para certo número de produtos. Talvez também haja limitações orçamentárias conjuntas envolvendo todos os produtos, ou, quem sabe, os produtos precisem competir por espaço de armazenagem limitado.

É comum na prática ter um pouco de tais interações entre produtos e ainda ser possível aplicar um modelo de estoques com um único produto com aproximação razoável. Entretanto, quando uma interação estiver desempenhando papel principal, é necessária uma análise adicional. Já foram realizadas algumas pesquisas para desenvolver *modelos de estoques para vários produtos* visando tratar algumas dessas interações.[11]

Controle de Estoques Multinível na IBM[12]

A Seção 18.5 introduziu modelos de estoques multiníveis para coordenar os estoques de um produto em diversos pontos da cadeia de abastecimento da empresa. Vejamos agora como uma grande corporação (IBM) vem gerenciando um de seus sistemas de estoques multiníveis há vários anos.

A IBM tem, aproximadamente, 1.000 produtos atuantes. Portanto, ela emprega mais de 15.000 engenheiros de campo para atendimento a clientes que são treinados para reparar e manter todos os sistemas computacionais instalados em clientes por todo o território norte-americano, sejam eles adquiridos ou via sistema de *leasing*.

Para apoiar toda essa operação, a IBM mantém um imenso sistema de estoques multinível de peças de reposição. Esse sistema controla mais de 200.000 tipos de peças, com o estoque total avaliado na casa dos *bilhões de dólares*. Anualmente são processados milhões de transações envolvendo essas peças.

Os níveis desse sistema começam com a manufatura das peças, depois os depósitos nacionais ou regionais, em seguida os centros de distribuição de campo, depois os postos de peças e, finalmente, vários milhares de locais externos (inclusive estoques mantidos nos próprios clientes e os bagageiros ou caixas de ferramentas dos engenheiros de campo da companhia).

Para coordenar e controlar todos esses estoques nos diferentes níveis, foi desenvolvido um enorme sistema computacional chamado *Optimizer*. O Optimizer é formado por quatro módulos principais. Um módulo do sistema destina-se à previsão contendo alguns poucos programas para estimativa das taxas de falha para cada um dos tipos de peças. O segundo módulo destina-se ao envio de dados e é formado por aproximadamente 100 programas que processam mais de 15 gigabytes de dados para fornecer as entradas necessárias para o sistema Optimizer. O terceiro é um módulo de tomada de decisão que otimiza o controle dos estoques semanalmente. O quarto e último módulo é formado por seis programas que integram o Optimizer no PIMS (Parts Inventory Management System, ou seja, Sistema de Controle de Estoques de Peças). O PIMS é um sofisticado sistema de controle e informação que contém milhões de linhas de código.

O Optimizer controla o nível de estoques para cada tipo de peça em todos os locais onde existem estoques (exceto nas localidades externas, onde somente peças com custo superior a determinado limite são monitoradas). É usada uma política de estoques do tipo (R, Q) para cada peça em cada local e nível do sistema.

É necessário um planejamento cuidadoso para *implementar* um sistema complexo como este após o seu desenvolvimento. Três fatores demonstraram ser particularmente

---

[11] Ver, por exemplo, DOWNS, B. et al. Managing Inventory with Multiple Products, Lags in Delivery, Resource Constraints, and Lost Sales: A Mathematical Programming Approach. *Management Science*, v. 47, p. 464-479, 2001.

[12] COHEN, M. et al. Optimizer: IBM's Multi-Echelon Inventory Systems for Managing Service Logistics. *Interfaces*, v. 20, p. 65-82, jan./fev., 1990. Para uma descrição de como a IBM estendeu esse tipo de abordagem para realizar uma reengenharia de sua cadeia de abastecimento global, consulte também a LIN, G. et al. Extended-Enterprise Supply-Chain Management at IBM Personal Systems Group and Other Divisions. *Interfaces*, v. 30, n. 1, p. 7-25, jan./fev. 2000.

importantes para se atingir uma implementação bem-sucedida. O primeiro deles foi a inclusão de uma *equipe de usuários* (formada por gerentes operacionais) como conselheiros para a equipe de projeto ao longo deste estudo. Na época da fase de implementação, esses gerentes operacionais tinham um forte sentimento de propriedade e, portanto, tornaram-se ardorosos apoiadores da instalação do Optimizer em suas áreas funcionais. Um segundo fator de sucesso foi um amplo *teste de aceitação pelos usuários* por meio do qual os usuários poderiam identificar áreas problemáticas que precisavam de retificação antes da implementação total. O terceiro fator-chave foi que o novo sistema foi implantado gradualmente, em fases, com cuidadosos testes em cada fase, de modo que os principais *bugs* pudessem ser eliminados antes de o sistema ir ao ar em todo o território nacional.

Esse novo sistema de estoques multinível provou ser extremamente bem-sucedido. Ele gerou economias de cerca de US$ 20 milhões por ano com a melhoria na eficiência operacional. Ele também gerou economias até maiores em termos de custos de manutenção de estoque (incluindo o custo de capital imobilizado em estoque) reduzindo o valor dos estoques da IBM em mais de US$ 250 milhões. Apesar dessa grande redução nos estoques, o controle de estoques aperfeiçoado ainda possibilitou a prestação de melhores serviços aos seus clientes. Especificamente, o novo sistema produziu um ganho de 10% na disponibilidade de peças em níveis mais baixos (nas quais os clientes são afetados) e mantendo, ao mesmo tempo, níveis de disponibilidade de peças nos níveis superiores.

Gerenciamento de Cadeias de Abastecimento na Hewlett-Packard[13]

A Seção 18.5 introduziu o conceito de *gerenciamento de cadeias de abastecimento* (a coordenação do fluxo de matérias-primas, bens intermediários e produtos finais pela cadeia de abastecimento de uma empresa) e o papel fundamental que o controle de estoques multinível desempenha nesse processo. Na economia global de nossos dias, o gerenciamento eficaz da cadeia de abastecimento tornou-se um fator de sucesso vital para várias empresas líderes de mercado. O campo da pesquisa operacional tem desempenhado papel fundamental no desenvolvimento dos modelos e *insights* que agora orientam diversos aspectos do gerenciamento das cadeias de abastecimento. Ver, por exemplo, a Referência Selecionada 14 para um manual clássico sobre modelos de PO para gerenciamento de cadeias de abastecimento como também a Referência Selecionada 4 para um manual mais recente que é dedicado à prática do gerenciamento de cadeias de abastecimento da perspectiva da PO.[14]

Por vários anos, a Hewlett-Packard tem sido uma das empresas que abriram caminho para tornar o gerenciamento de cadeias de abastecimento parte de sua cultura corporativa. Sintetizaremos a seguir a experiência da empresa nesse aspecto.

A Hewlett-Packard (HP) é uma das empresas líderes no mercado da alta tecnologia. Seu âmbito é genuinamente global. Cerca de metade de seus empregados se encontra fora dos Estados Unidos. Em 1993, ela possuía instalações voltadas à fabricação ou pesquisa e desenvolvimento em 16 países, bem como escritórios de vendas e de serviços em 110 países. O número total de seus produtos ultrapassa 22.000.

No final dos anos 80, a HP tinha estoques que chegavam à casa dos bilhões de dólares e uma alarmante insatisfação por parte de seus clientes em relação ao processo de atendimento de pedidos. A diretoria da empresa estava muito preocupada, já que o atendimento às encomendas feitas pelos clientes estava se tornando um grande campo de batalha entre as indústrias de alta tecnologia. Reconhecendo a necessidade de modelos de PO para apoiar a alta gerência no processo de tomada de decisão, a HP formou, em 1988, um grupo conhecido como SPaM (Strategic Planning and Modeling). A diretoria encarregou o grupo pelo desenvolvimento e introdução de inovações nos campos da PO e da engenharia industrial.

---

[13] LEE, H. L.; BILLINGTON, C. The Evolution of Supply-Chain-Management Models and Practices at Hewlett-Packard. *Interfaces*, v. 25, p. 42-63, set./out., 1995. Ver também CARGILLE, B. et al. Part Tool, Part Process: Inventory Optimization at Hewlett-Packard Co. OR/MS *Today*, v. 26, p. 18-24, 1999.

[14] Ver também as edições especiais da *Interfaces*, v. 30, n. 4, jul./ago. 2000 e *IIE Transactions*, v. 29, n. 8, ago. 1997, que são dedicadas ao gerenciamento de cadeias de abastecimento.

Em 1989, o SPaM começou a introduzir conceitos de gerenciamento de cadeias de abastecimento na HP. A cadeia de abastecimento da HP inclui a fabricação de circuitos integrados, montagem de placas, montagem final e remessa aos clientes de forma global. Com produtos tão diversos e complexos, enfrentar problemas referentes à cadeia de abastecimento pode ser uma tarefa realmente desafiadora. Variações e incertezas são predominantes ao longo de toda a cadeia. Os fornecedores podem atrasar em suas remessas ou os materiais recebidos podem estar com defeito. O processo de produção pode ser afetado ou a produção pode ser imperfeita. Finalmente, as demandas por produtos também são altamente incertas.

Grande parte do foco inicial do SPaM era na modelagem de estoques. Esse esforço levou ao desenvolvimento do *WINO* (*Worldwide Inventory Network Optimizer*, ou seja, Otimizador de Redes de Estoques Mundial) da HP. Assim como o Optimizer da IBM descrito anteriormente nesta seção, o WINO controla um sistema de estoques multinível. Entretanto, em vez de lidar apenas com estoques de produtos acabados, o WINO também leva em consideração os estoques de mercadorias recebidas e mercadorias remetidas em cada ponto da cadeia de abastecimento.

O WINO usa um modelo de estoques de revisão discreta para determinar o ponto para fazer novo pedido e quantidades encomendadas para cada um desses estoques. Pela introdução de revisões de estoques mais freqüentes, foram obtidos, em geral, melhor equilíbrio dos estoques relacionados, eliminação de estoques de segurança redundantes etc., reduções de estoques de 10% a 30%.

O WINO foi até estendido para incluir os sistemas de estoques de alguns representantes-chave. Isso permitiu a redução dos estoques de produtos acabados tanto nos centros de distribuição da HP como nos seus representantes mantendo, ao mesmo tempo, o mesmo objetivo de serviço para os clientes.

O foco inicial do SPaM na modelagem de estoques logo se ampliou para lidar com questões de estratégia de distribuição. Por exemplo, seu realinhamento da rede de distribuição na Europa reduziu o custo total de distribuição em US$ 18 milhões por ano.

O trabalho do SPaM também evoluiu em outras áreas funcionais, entre as quais projeto, finanças e marketing.

Hoje em dia a importância do gerenciamento de cadeias de abastecimento é reconhecida por toda a organização. Várias divisões-chave formalizaram tais posições como gerentes de projetos das cadeias de abastecimento, bem como analistas e coordenadores de cadeias de abastecimento. Esses indivíduos trabalham próximos ao SPaM para garantir que modelos de cadeia de abastecimento sejam usados de forma eficiente, assim como para identificar novos problemas que minam o esforço de pesquisa e desenvolvimento do SPaM.

O trabalho do SPaM na aplicação da PO para integrar gerenciamento de cadeias de abastecimento na HP rendeu enormes dividendos. O SPaM várias vezes identificou economias em custos da ordem de US$ 10 milhões a US$ 40 milhões por ano em apenas um único projeto. Portanto, as economias totais em termos de custos giram hoje na ordem das centenas de milhões de dólares anuais. Obteve-se também benefícios intangíveis de extrema importância, entre os quais o aumento da reputação da HP como uma empresa progressista com a qual seus clientes podem contar para ter seus pedidos atendidos prontamente.

18.9 CONCLUSÕES

Neste capítulo, introduzimos apenas tipos de modelos de estoques, porém eles servem para introduzir a natureza geral dos modelos de estoques. Além disso, existem representações suficientemente acuradas de muitas situações relacionadas com estoques que são freqüentemente úteis na prática. Por exemplo, os modelos EOQ têm sido particularmente usados em grande escala. Esses modelos são, algumas vezes, modificados para incluir algum tipo de demanda estocástica, tal como faz o modelo estocástico de revisão contínua. O modelo estocástico de período simples é um destes bastante convenientes para produtos perecíveis. Os modelos estocásticos com vários períodos têm sido importantes na caracterização dos tipos de políticas a serem seguidas, por exemplo, políticas (s, S), embora possa ser difícil determinar os valores ótimos de s e S.

Na economia global de nossos dias, os modelos de estoques multinível (como aqueles introduzidos na Seção 18.5) estão desempenhando papel cada vez mais importante para auxiliar no gerenciamento da cadeia de abastecimento de uma empresa.

Não obstante, muitas situações envolvendo estoques possuem fatores complicadores que não são levados em conta pelos modelos deste capítulo, como interações entre produtos ou complexos sistemas de estoques multinível. Foram formulados modelos mais complexos na tentativa de atender a tais situações, porém é difícil atingir-se realismo adequado, bem como tratabilidade suficiente para ser útil na prática. O desenvolvimento de modelos úteis para o gerenciamento de cadeias de abastecimento é, no momento, uma área de pesquisa particularmente ativa.

Há um crescimento contínuo no uso de sistemas computadorizados para processamento de dados de estoques, juntamente com um crescimento no controle científico de estoques.

REFERÊNCIAS SELECIONADAS

1. AKSOY, Y.; DERBEZ, A. 2003 Software Survey: Supply Chain Management. *OR/MS Today*, v. 30, p. 4, p. 34-41, jun. 2003.

2. AXSÄTER, S. *Inventory Control*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

3. DONG, L.; LEE, H. Optimal Policies and Approximations for a Serial Multiechelon Inventory System with Time-Correlated Demand. *Operational Research*, v. 51, p. 969-980, 2003.

4. HARRISON, T. P. et al. (Eds.). *The Practice of Supply Chain Management:* Where Theory and Application Converge. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

5. KHOUJA, M. The Single-Period (News-Vendor) Problem: Literature Review and Suggestions for Future Research. *Omega*, v. 27, p. 537-553, 1999.

6. MUCKSTADT, J.; ROUNDY, R. Analysis of Multi-Stage Production Systems, p. 59-131. In: GRAVES, S. et al. (Eds.). *Handbook in Operations Research and Management Science, Vol. 4, Logistics of Production and Inventory.* Amsterdã: North-Holland, 1993.

7. NAHMIAS, S. Perishable Inventory Theory: A Review. *Operational Research*, v. 30, p. 680-708, 1982.

8. ______. *Production and Operations Analysis.* 5. ed. Burr Ridge, IL: McGraw-Hill/Irwin, 2005.

9. PIASECKI, D. Optimizing Economic Order Quantity. *IIE Solutions*, p. 30-33, 39, jan. 2001.

10. SHANG, K. H.; SONG, J.-S. Newsvendor Bounds and Heuristic for Optimal Policies in Serial Supply Chains. *Management Science*, v. 49, n. 5, p. 618-638, maio 2003.

11. SHERBROOKE, C. C. *Optimal Inventory Modeling of Systems: Multi-Echelon Techniques.* Nova York: Wiley, 1992.

12. SILVER, E. et al. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling.* 3. ed. Nova York: Wiley, 1998.

13. TALLURI, G.; van Ryzin, K. *Theory and Practice of Yield Management.* Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

14. TAYUR, S. et al. (Eds.). *Quantitative Models for Supply Chain Management.* Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

15. VEINOTT, JR. A. F. Inventory Policy under Certainty, p. 975-980. In: EATWELL, J. et al. (Eds.). *The New Palgrave: A Dictionary of Economic Theory and Doctrine.* Nova York: The Stockton Press, 1987.

16. WAGNER, H. M. And Then There Were None. *Operational Research*, v. 50, p. 217-226, 2002.

17. ZIPKEN, P. H. *Foundations of Inventory Management.* Boston: McGraw-Hill, 2000.

FERRAMENTAS DE APRENDIZADO PARA ESTE CAPÍTULO INCLUÍDAS NO CD-ROM

Exemplos Trabalhados:

Exemplos para o Capítulo 18

Procedimentos Automáticos no Tutorial IOR:

Modelo Estocástico de Período Simples para Produtos Perecíveis, Sem Custo de Implantação

Modelo Estocástico de Período Simples para Produtos Perecíveis, Com Custo de Implantação

Arquivos em Excel (Capítulo 18 — Teoria dos Estoques):

Gabaritos para o Modelo EOQ Básico (Versão do Solver e Versão Analítica)
Gabaritos para o Modelo EOQ com Falta de Produto Planejada (Versão Solver e Versão Analítica)
Gabarito para Modelo EOQ com Descontos por Quantidade (Somente Versão Analítica)
Gabarito para o Modelo Estocástico de Revisão Contínua

Arquivo Lingo (Capítulo 18 — Teoria dos Estoques) para Solucionar os Exemplos Selecionados

Glossário para o Capítulo 18

Suplementos para Este Capítulo

Obtenção da Política Ótima para o Modelo Estocástico para Período Simples para Produtos Perecíveis
Modelos Estocásticos de Revisão Periódica

PROBLEMAS

Inserimos um T à esquerda de alguns problemas (ou parte deles) toda vez que um dos gabaritos listados anteriormente puder ser útil. Um asterisco no número do problema indica que pelo menos há uma resposta parcial no final do livro.

T **18.3-1.*** Suponha que a demanda para um produto seja de 30 unidades por mês e os itens sejam retirados em uma taxa constante. O custo de implantação cada vez que se assume a produção de um lote de peças para reabastecer os estoques é de US$ 15. O custo de produção é de US$ 1 por item e o custo de manutenção de estoque é de US$ 0,30 por item por mês.

(a) Supondo-se que não seja tolerada a falta de produto, determine com que freqüência realizar a produção de um lote de peças e qual deve ser o tamanho do lote.

(b) Caso seja permitida a falta de produto, porém o custo seja de US$ 3 por item por mês, determine com que freqüência realizar a produção de um lote de peças e qual deve ser o tamanho do lote.

T **18.3-2.** A demanda por um produto é de 600 unidades por semana e os itens são retirados a uma taxa constante. O custo de implantação para se fazer um pedido para reabastecer estoques é de US$ 25. O custo unitário de cada item é de US$ 3 e o custo de manutenção de estoque é de US$ 0,05 por item por semana.

(a) Supondo que não seja tolerada a falta de produtos, determine com que freqüência realizar a produção de um lote de peças e qual deve ser o tamanho do lote.

(b) Se fosse permitida a falta de produto, porém o custo fosse de US$ 2 por item por semana, determine com que freqüência realizar a produção de um lote de peças e qual deve ser o tamanho do lote.

18.3-3.* Tim Madsen é o comprador da Computer Center, uma grande loja de computadores. Recentemente ele incorporou o mais moderno computador pessoal do momento, o modelo Power, ao estoque de mercadorias da loja. No momento, as vendas desse modelo giram por volta de 13 unidades por semana. Tim compra esses computadores diretamente do fabricante a um custo unitário de US$ 3.000, onde cada remessa leva meia semana para chegar.

Tim usa rotineiramente o modelo EOQ básico para determinar a política de estoques da loja para cada um de seus produtos mais importantes. Para essa finalidade, ele estima que o custo anual de manter itens em estoque seja de 20% do custo de sua compra. Ele também estima que o custo administrativo associado a fazer cada pedido seja de US$ 75.

T **(a)** No momento, Tim está adotando a política de encomendar cinco computadores modelo Power por vez, onde cada pedido é programado de tal modo que a remessa chegue à loja exatamente quando o estoque destes computadores está por terminar. Use a versão Solver do Gabarito em Excel para o modelo EOQ básico para determinar os diversos custos anuais sendo incorridos com essa política.

T **(b)** Use essa mesma planilha para gerar uma tabela que mostre como esses custos mudariam, caso a quantidade encomendada fosse mudada para os seguintes valores: 5, 7, 9, . . . , 25.

T **(c)** Use o Solver para encontrar a quantidade ótima a ser encomendada.

T **(d)** Agora utilize a versão analítica do Gabarito em Excel para o modelo EOQ básico (que aplica a fórmula EOQ diretamente) para encontrar a quantidade ótima. Compare os resultados (incluindo os diversos custos) com aqueles obtidos no item (*c*).

(e) Verifique sua resposta para a quantidade ótima encomendada obtida no item (*d*) aplicando manualmente a fórmula EOQ.

(f) Com a quantidade ótima a ser encomendada obtida anteriormente, com que freqüência em média terão de ser feitos pedidos? Qual deveria ser o nível de estoque aproximado quando for feito cada pedido?

(g) Em que proporção a política de estoques ótima reduz o custo de estoques variável total por ano (custos de manutenção de estoque mais custos administrativos para realização dos pedidos) para os computadores modelo Power em relação à política descrita no item (*a*)? Qual é a redução porcentual?

18.3-4. A Blue Cab Company é a principal companhia de táxi da cidade de Maintown. Ela usa gasolina com uma média de 8.500 litros por mês. Como este é um custo importante, a empresa fez um acordo especial com a Amicable Petroleum Company para comprar um grande volume de gasolina a preço reduzido de US$ 1,05 por litro em intervalos de poucos meses. O custo de preparo para cada pedido, incluindo o armazenamento do combustível é de US$ 1.000. O custo de manter a gasolina em estoque é estimado em US$ 0,01 por litro por mês.

T **(a)** Use a versão Solver do Gabarito em Excel para o modelo EOQ básico para determinar os custos que seriam incorridos anualmente, caso a gasolina tivesse de ser encomendada mensalmente.

T **(b)** Utilize essa mesma planilha para gerar uma tabela que ilustre como esses custos mudariam, caso o número de meses entre os pedidos tivesse de ser alterado para os seguintes valores: 1, 2, 3, . . . , 10.

T **(c)** Empregue o Solver para encontrar a quantidade ótima a ser encomendada.

T **(d)** Use agora a versão analítica do Gabarito em Excel para o modelo EOQ básico para encontrar a quantidade ótima a ser encomendada. Compare os resultados (inclusive os diversos custos) com aqueles obtidos no item (*c*).

(e) Verifique sua resposta para a quantidade ótima a ser encomendada obtida no item (*d*) aplicando manualmente a fórmula EOQ.

18.3-5. Para o modelo EOQ básico, use a fórmula da raiz quadrada para determinar como Q^* mudaria para cada uma das mudanças nos custos ou taxa de demanda. A menos que especificado explicitamente, considere cada mudança por si só.

(a) O custo de implantação é reduzido em 25% de seu valor original.

(b) A taxa de demanda anual se torna quatro vezes maior que seu valor original.

(c) Ambas as mudanças dos itens (*a*) e (*b*).

(d) O custo de manutenção de estoque unitário é reduzido para 25% de seu valor original.

(e) Ambas as mudanças dos itens (*a*) e (*d*).

18.3-6.* Kris Lee, proprietário e gerente da Quality Hardware Store, está reavaliando sua política de estoques para martelos. Ele vende uma média de 50 martelos por mês e, portanto, ele vem fazendo um pedido para a compra de 50 martelos de um atacadista a um custo de US$ 20 por martelo no final de cada mês. Entretanto, o próprio Kris faz todos os pedidos para a loja e ele acha que isso está consumindo grande parte de seu tempo. Ele estima que o valor de seu tempo gasto para fazer cada compra de martelos é de US$ 75.

(a) Qual deveria ser o custo de manutenção de estoque unitário para martelos para a política de estoques atual de Kris ser ótima de acordo com o modelo EOQ básico? Qual é este custo de manutenção de estoque unitário em termos de porcentagem do custo de aquisição unitário?

T **(b)** Qual é a quantidade ótima a ser encomendada, caso o custo de manutenção de estoque unitário seja, na verdade, 20% do custo de aquisição unitário? Qual é o valor correspondente do TVC = custo de estoque variável total por ano (custos de manutenção de estoque mais custos administrativos para realização dos pedidos)? Qual é o TVC para a política de estoques atual?

T **(c)** Se o atacadista entregar normalmente uma encomenda de martelos a cada cinco dias úteis (de 25 dias úteis em média em um mês), qual seria o ponto para fazer novo pedido (de acordo com o modelo EOQ básico)?

(d) Kris não quer incorrer em falta de produto em estoque para os itens mais importantes. Portanto, ele decidiu acrescentar um estoque de segurança de cinco martelos para salvaguardar contra entregas atrasadas e vendas maiores que as normais. Qual seria agora o ponto para fazer novo pedido? Quanto esse estoque de segurança acrescenta ao TVC?

18.3-7.* Considere o Exemplo 1 (fabricação de alto-falantes para televisores) introduzido na Seção 18.1 e usado na Seção 18.3 para ilustrar os modelos EOQ. Use o modelo EOQ com falta de produto planejada para resolver esse exemplo quando o custo de escassez unitário é modificado para US$ 5 por alto-falante em falta por mês.

18.3-8. A Speedy Wheels é um distribuidor de bicicletas no atacado. Seu gerente de estoques, Ricky Sapolo, está revendo no momento a política de estoques para um modelo popular que está vendendo uma média de 250 unidades por mês. O custo administrativo para se fazer um pedido desse modelo para o fabricante é de US$ 200 e o preço de compra é de US$ 70 por bicicleta. O custo anual do capital imobilizado em estoque é de 20% do valor (baseado no preço de compra) dessas bicicletas. O custo adicional para armazenar as bicicletas — incluindo aluguel de depósito, seguro, impostos e outros — é de US$ 6 por bicicleta por ano.

T **(a)** Use o modelo EOQ básico para determinar a quantidade ótima a ser encomendada e o custo de estoque variável total por ano.

T **(b)** Os clientes da Speedy Wheel (lojas varejistas) geralmente não se importam com pequenos atrasos na entrega de seus pedidos. Portanto, a gerência concordou com uma nova política com pequenas faltas de produto ocasionais para reduzir o custo de estoque variável. Após consultas com a gerência, Ricky estima que o custo de escassez anual (incluindo negócios futuros perdidos) seria de US$ 30 vezes o número médio de bicicletas em falta durante o ano. Use o modelo EOQ com falta de produto planejada para determinar a nova política de estoques ótima.

T **18.3-9.** Reconsidere o Problema 18.3-3. Em virtude da popularidade do computador modelo Power, Tim Madsen descobriu que os clientes estão pensando em comprar um computador mesmo quando não existe nenhum em estoque no momento desde que eles estejam certos de que seus pedidos de compra serão atendidos em um período de tempo razoável. Portanto, Tim decidiu mudar do modelo EOQ básico para o modelo EOQ com falta de produto planejada, usando um custo de escassez de US$ 200 por computador em falta por ano.

(a) Use a versão Solver do Gabarito em Excel para o modelo EOQ com falta de produto planejada (com restrições adicionadas na caixa de diálogo do Solver de modo que C10:C11 = inteiro) para encontrar a nova política de estoques ótima e seu custo de estoque variável total por ano (TVC). Qual é a redução no valor de TVC encontrada para o Problema 18.3-3 (e dado na parte final do livro) quando a falta de produto planejada não fosse permitida?

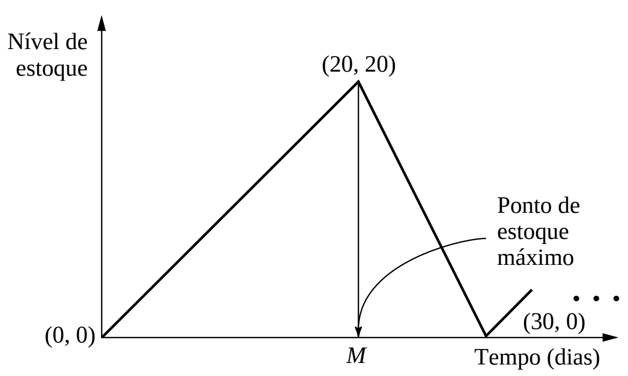
(b) Use essa mesma planilha para gerar a tabela que ilustra como o TVC e seus componentes mudariam caso a falta de produto máxima fosse mantida igual aos valores encontrados no item (*a*), porém com a quantidade encomendada alterada para os seguintes valores: 15, 17, 19, . . . , 35.

(c) Use essa mesma planilha para gerar a tabela que ilustra como o TVC e seus componentes mudariam, caso a quantidade encomendada fosse mantida a mesma do item (*a*), porém quando a falta de produto máxima fosse alterada para os seguintes valores: 10, 12, 14, . . . , 30.

18.3-10. Você foi contratado como consultor em pesquisa operacional por uma empresa para reavaliar a política de estoques para um de seus produtos. A empresa usa no momento o modelo EOQ básico. Segundo esse modelo, a quantidade ótima a ser encomendada para esse produto é de 1.000 unidades e, portanto, o nível de estoque máximo também é de 1.000 unidades e a falta de produto máxima é 0.

Você decidiu recomendar que a empresa mude e adote o modelo EOQ com falta de produto planejada após determinar quão grande é o custo de escassez unitário (p) quando comparado ao custo de manutenção de estoque unitário (h). Prepare uma tabela para a gerência que mostre quais deveriam ser a quantidade ótima a ser encomendada, o nível de estoque máximo e a falta de produto máxima segundo esse modelo para cada uma das seguintes razões de p em relação h: $\frac{1}{3}$, 1, 2, 3, 5, 10.

18.3-11. No modelo EOQ básico, suponha que o estoque seja reabastecido uniformemente (em vez de instantaneamente) a uma taxa de b itens por unidade de tempo até a quantidade encomendada Q ser atendida. São feitas retiradas do estoque a uma taxa de a itens por unidade de tempo, em que $a < b$. São feitos reabastecimentos e retiradas simultâneas do estoque. Por exemplo, se Q for 60, b for 3 por dia e a 2 por dia, então chegam três unidades do estoque a cada dia para os dias 1 a 20, 31 a 50 e assim por diante, ao passo que as unidades são retiradas a uma taxa de 2 por dia todos os dias. O diagrama do nível de estoque *versus* tempo é dado a seguir, para esse exemplo.



(a) Encontre o custo total por unidade de tempo em termos do custo de implantação K, da quantidade produzida Q, custo unitário c, custo de manutenção de estoque h, taxa de retirada a e taxa de reabastecimento b.

(b) Determine a quantidade econômica a ser encomendada Q^*.

18.3-12.* A MBI é um fabricante de computadores pessoais. Todos seus computadores pessoais usam uma unidade de disquete flexível de alta densidade de 3,5" que é adquirida da Ynos. A MBI opera sua fábrica 52 semanas por ano, o que requer a montagem de 100 dessas unidades de disquete nos computadores por semana. A taxa anual de custo de manutenção de estoque da MBI é de 20% do valor (baseado no custo de aquisição) do estoque. Independentemente do tamanho do pedido, o custo administrativo de se fazer um pedido de compra com a Ynos foi estimado em US$ 50. É oferecido um desconto por volume pela Ynos para grandes pedidos, conforme mostrado a seguir, em que o preço para cada categoria se aplica a *cada* unidade de disquete adquirida.

Categoria de Desconto	Quantidade Adquirida	Preço (por Unidade de Disquete)
1	1 a 99	US$ 100
2	100 a 499	US$ 95
3	500 ou mais	US$ 90

T **(a)** Determine a quantidade ótima a ser encomendada de acordo com o modelo EOQ com descontos por quantidade. Qual é o custo total por ano resultante?

(b) Com essa quantidade encomendada, quantos pedidos de compra precisam ser feitos por ano? Qual é o intervalo de tempo entre os pedidos?

18.3-13. A família Gilbreth bebe uma caixa de Royal Cola todos os dias, 365 dias por ano. Felizmente, um distribuidor local oferece descontos por quantidade para grandes pedidos, conforme mostrado na tabela a seguir, em que o preço para cada categoria se aplica a *toda* caixa adquirida. Considerando-se o custo da gasolina, Sr. Gilbreth estima que custe a ele cerca de US$ 5 para ir buscar uma encomenda de Royal Cola. O Sr. Gilbreth também é um investidor no mercado de ações, onde ele vem tendo um retorno anual médio de 20%. Ele considera o retorno perdido por comprar a Royal Cola em vez da ação como o único custo de manutenção de estoque para a Royal Cola.

Categoria de Desconto	Quantidade Adquirida	Preço (por Caixa)
1	1 a 49	US$ 4,00
2	50 a 99	US$ 3,90
3	100 ou mais	US$ 3,80

T **(a)** Determine a quantidade ótima a ser encomendada de acordo com o modelo EOQ com descontos por quantidade. Qual é o custo total por ano resultante?

(b) Com essa quantidade encomendada, quantos pedidos de compra precisam ser feitos por ano? Qual é o intervalo de tempo entre os pedidos?

18.3-14. Kenichi Kaneko é o gerente de um departamento de produção que usa 400 caixas de rebites por ano. Para manter o nível de estoque baixo, Kenichi vem encomendando apenas 50 caixas por vez. Entretanto, o fornecedor de rebites está oferecendo no momento um desconto por pedidos de grande quantidade de acordo com a seguinte tabela de preços, na qual o preço para cada categoria se aplica a *toda* caixa adquirida.

Categoria de Desconto	Quantidade Adquirida	Preço (por Caixa)
1	1 a 99	US$ 8,50
2	100 a 999	US$ 8,00
3	1.000 ou mais	US$ 7,50

A empresa usa uma taxa de custo de manutenção de estoque anual de 20% do preço do item. O custo total associado a fazer um pedido de compra é de US$ 80 por pedido.

Kenichi decidiu usar o modelo EOQ com descontos por quantidade para determinar sua política de estoques ótima para rebites.

(a) Para cada categoria de desconto, escreva uma expressão para o custo total por ano (TC) em função da quantidade encomendada Q.

T **(b)** Para cada categoria de desconto, use a fórmula EOQ para o modelo EOQ básico para calcular o valor de Q (viável ou inviável) que fornece o valor mínimo de TC. Você pode usar a versão analítica do Gabarito em Excel para o modelo EOQ básico para realizar esse cálculo caso deseje.

(c) Para cada categoria de desconto, use os resultados dos itens (*a*) e (*b*) para determinar o valor *viável* de Q que fornece o valor mínimo *viável* de TC e para calcular esse valor de TC.

(d) Desenhe manualmente curvas aproximadas de TC *versus* Q para cada uma das categorias de desconto. Use o mesmo formato da Figura 18.3 (uma curva cheia onde viável e uma curva tracejada onde for inviável). Mostre os pontos encontrados nos itens (*b*) e (*c*). Entretanto, você não precisa realizar cálculos adicionais para tornar as curvas particularmente precisas em outros pontos.

(e) Use os resultados dos itens (*c*) e (*d*) para determinar a quantidade ótima a ser encomendada e o valor correspondente de TC.

T **(f)** Use o Gabarito em Excel para o modelo EOQ com descontos por quantidade para verificar suas respostas nos itens (*b*), (*c*) e (*e*).

(g) Para a categoria de desconto 2, o valor de Q que minimiza TC acaba sendo viável. Explique por que ter conhecimento desse fato lhe permitiria eliminar a categoria de desconto 1 como um candidato para fornecer a quantidade ótima a ser encomendada sem nem mesmo realizar os cálculos para essa categoria que foram feitos nos itens (*b*) e (*c*).

(h) Dada a quantidade ótima a ser encomendada dos itens (*e*) e (*f*), quantos pedidos de compra precisariam ser feitos por ano? Qual é o intervalo de tempo entre pedidos?

18.3-15. Sarah dirige uma barraquinha sob concessão em um local no centro durante o ano. Um dos itens mais populares é o amendoim torrado, vendendo cerca de 200 saquinhos por mês.

Sarah compra o amendoim torrado da Peanut Shop de Peter. Ela vem comprando 100 saquinhos por vez. Entretanto, para encorajar compras maiores, Peter está oferecendo a ela no momento descontos para pedidos de compra maiores de acordo com a seguinte tabela de preços, na qual o preço para cada categoria se aplica a *todo* saquinho adquirido.

Categoria de Desconto	Quantidade Adquirida	Preço (por Saquinho)
1	1 a 199	US$ 1,00
2	200 a 499	US$ 0,95
3	500 ou mais	US$ 0,90

Sarah quer usar o modelo EOQ com descontos por quantidade para determinar qual deveria ser a quantidade encomendada. Para essa finalidade, ela estima uma taxa de custo de manutenção de estoque anual de 17% do valor (baseado no preço de compra) dos amendoins. Ela também estima um custo de implantação de US$ 4 para fazer cada pedido de compra.

Siga as instruções do Problema 18.3-14 para analisar o problema de Sarah.

18.4-1. Suponha que o planejamento de produção tenha de ser feito para os próximos cinco meses, em que as respectivas demandas são $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$, $r_4 = 2$ e $r_5 = 3$. O custo de implantação é de US$ 4.000, o custo unitário de produção é US$ 1.000 e o custo de manutenção de estoque unitário é de US$ 300. Use o modelo determinístico de revisão periódica para determinar a programação de produção ótima que satisfaça as necessidades mensais.

18.4-2. Reconsidere o exemplo usado para ilustrar o modelo determinístico de revisão periódica da Seção 18.4. Solucione esse problema quando as demandas são aumentadas em 1 avião em cada período.

18.4-3. Reconsidere o exemplo usado para ilustrar o modelo determinístico de revisão periódica da Seção 18.4. Suponha que seja feita apenas uma mudança no exemplo como indicado a seguir. O custo de produção de cada avião agora varia de período em período. Particularmente, além do custo de implantação de US$ 2 milhões, o custo de produção de aviões seja no período 1 ou período 3 é de US$ 1,4 milhão por aeronave, ao passo que ele é de apenas US$ 1 milhão por avião no período 2 ou período 4.

Use a programação dinâmica para determinar quantos aviões (se efetivamente algum) deveriam ser produzidos a cada um dos quatro períodos para minimizar o custo total.

18.4-4.* Considere a situação em que determinado produto é fabricado e colocado no estoque de produtos em processamento até que ele seja necessário em um processo de produção subseqüente. O número de unidades necessárias em cada um dos três próximos meses, o custo de implantação e o custo unitário de produção em tempo regular (em unidades de milhares de dólares) que seriam incorridos em cada mês são os seguintes:

Mês	Necessidade	Custo de Implantação	Custo Unitário (em Tempo Regular)
1	1	5	8
2	3	10	10
3	2	5	9

Existe no momento uma unidade em estoque e queremos ter duas unidades em estoque no final de três meses. Pode ser produzido um máximo de três unidades em tempo de produção regular a cada mês, embora uma unidade adicional possa ser produzida em tempo extra a um custo que é duas vezes maior que o custo unitário de produção em tempo regular. O custo de manutenção de estoque é de 2 por unidade para cada mês extra em que ele é armazenado.

Use a programação dinâmica para determinar quantas unidades deveriam ser produzidas em cada mês para minimizar o custo total.

18.5-1. Considere um sistema de estoques que se ajuste ao modelo para um sistema serial de dois níveis apresentado na Seção 18.5, em que K_1 = US$ 15.000, K_2 = US$ 500, h_1 = US$ 20, h_2 = US$ 22 e $d = 5.000$. Desenvolva uma tabela como a Tabela 18.1 que mostre os resultados da realização tanto da otimização separada das instalações quanto da otimização simultânea das instalações. A seguir, calcule o aumento porcentual no custo variável total por unidade de tempo caso fossem usados os resultados da otimização separada em vez dos resultados da abordagem válida da realização da otimização simultânea.

18.5-2. Em breve, uma empresa vai iniciar a produção de um novo produto. Quando isso acontece, será usado um sistema de estoques que se ajuste ao modelo para um sistema serial de dois níveis conforme apresentado na Seção 18.5. Nessa oportunidade, há uma grande incerteza em relação aos custos de implantação e custos de manutenção de estoque nas duas instalações, bem como qual será a taxa de demanda pelo novo produto. Portanto, para iniciar a fazer planos para o novo sistema de estoques, várias combinações de possíveis valores dos parâmetros do modelo precisam ser verificadas.

Calcule Q_2^*, n^*, n, e Q_1^* para as seguintes combinações.

(a) (K_1, K_2) = (US$ 25.000, US$ 1.000), (US$ 10.000, US$ 2.500) e ($5.000, US$ 5.000), com h_1 = US$ 25, h_2 = US$ 250 e d = 2.500.

(b) (h_1, h_2) = (US$ 10, US$ 500), (US$ 25, US$ 250) e (US$ 50, US$ 100), com K_1 = US$ 10.000, K_2 = US$ 2.500 e d = 2.500.

(c) d = 1.000, d = 2.500 e d = 5.000, com K_1 = US$ 10.000, K_2 = US$ 2.500, h_1 = US$ 25 e h_2 = US$ 250.

18.5-3. Uma empresa possui uma fábrica para produzir seus produtos, bem como uma loja de varejo para vendê-los. Determinado produto novo será vendido exclusivamente por essa loja. O estoque desse produto será reabastecido quando necessário pelo estoque da fábrica, onde serão incorridos um custo administrativo e de remessa de US$ 200 cada vez que isso for feito. A fábrica reabastecerá seu próprio estoque do produto quando necessário preparando uma rápida produção de um lote de peças. Será incorrido um custo de implantação de US$ 5.000 cada vez que isso for feito. O custo anual para estocar cada unidade é de US$ 10 quando ele for estocado na fábrica e de US$ 11 quando for estocado na loja. Há uma expectativa de que a loja consiga vender 100 unidades do produto por mês. Todas as hipóteses do modelo para um sistema serial de dois níveis apresentado na Seção 18.5 se aplicam ao sistema conjunto de estoques da fábrica e loja.

(a) Suponha que a fábrica e a loja otimizem separadamente suas próprias políticas de estoques para esse produto. Calcule os Q^*_2, n^*, n, Q^*_1 e C^* resultantes.

(b) Suponha que a empresa otimize simultaneamente a política conjunta de estoques para a fábrica e loja no caso desse produto. Calcule os Q^*_2, n^*, n, Q^*_1 e C^* resultantes.

(c) Calcule o decréscimo porcentual no custo variável total por unidade de tempo C^* que é alcançado usando-se a metodologia descrita no item (*b*) em vez daquela do item (*a*).

18.5-4. Uma empresa produz determinado produto montando-o em um complexo industrial de montagem. Todos os componentes necessários para montar o produto são comprados de um único fornecedor. Uma remessa de todos os componentes é recebida do fornecedor cada vez que o complexo de montagem precisar reabastecer seu estoque de componentes. A empresa incorrerá em um custo de remessa de US$ 500 além do preço de aquisição dos componentes cada vez que isso for feito. Cada vez que o fornecedor precisar reabastecer seu próprio estoque de componentes, são preparadas a produção de lotes de peças para fabricar os componentes. O custo total de preparação para a produção desses lotes de peças é de US$ 50.000. O custo anual de estocar cada conjunto de componentes é de US$ 50 quando ele for estocado pelo fornecedor e de US$ 60 quando for estocado no complexo industrial de montagem. Ele é mais elevado no último caso já que há mais capital imobilizado em cada conjunto de componentes nesse estágio. O complexo industrial de montagem produz regularmente 500 unidades do produto por mês. Todas as hipóteses do modelo para um sistema serial de dois níveis descritas na Seção 18.5 se aplicam ao sistema conjunto de estoques do fornecedor e do complexo industrial de montagem.

(a) Suponha que o fornecedor e o complexo industrial de montagem otimizem separadamente suas próprias políticas de estoques para os conjuntos de componentes. Calcule os Q_2^*, n^*, n e Q_1^* resultantes. Calcule também, respectivamente, C_1^* e C_2^*, o custo variável total por unidade de tempo para o fornecedor e o complexo industrial de montagem, bem como $C^* = C_1^* + C_2^*$.

(b) Suponha que o fornecedor e o complexo industrial de montagem cooperem simultaneamente para otimizar sua política conjunta de estoques. Calcule as mesmas quantidades conforme especificado no item (*a*) para essa nova política de estoques.

(c) Compare os valores de C^*_1, C^*_2 e C^* obtidos nos itens (*a*) e (*b*). Qualquer uma dessas organizações vai perder dinheiro, caso adote a política conjunta de estoques obtida no item (*b*) em vez das políticas distintas obtidas no item (*a*)? Em caso positivo, que acerto financeiro seria preciso fazer entre essas organizações distintas para induzir a organização perdedora a concordar com um contrato de fornecimento que siga a política de estoques obtida no item (*b*)? Comparando-se os valores de C^*, qual seria a economia líquida para as duas organizações caso elas pudessem concordar em seguir a política ótima conjunta do item (*b*) em vez das políticas ótimas distintas do item (*a*)?

18.5-5. Considere um sistema de estoques de três níveis que respeita o modelo para um sistema serial multinível apresentado na Seção 18.5, em que os parâmetros do modelo para esse sistema em particular são dados a seguir.

Instalação *i*	K_i	h_i	d = 1.000
1	US$ 50.000	US$ 1	
2	US$ 2.000	US$ 2	
3	US$ 360	US$ 10	

Desenvolva uma tabela como a Tabela 18.4 que mostre os resultados intermediários e finais da aplicação do procedimento de resolução apresentado na Seção 18.5 a esse sistema de estoques. Após calcular o custo variável total por unidade de tempo da solução final, determine a porcentagem máxima possível pelo qual esse custo pode exceder o custo correspondente para uma solução ótima.

18.5-6. Siga as instruções do Problema 18.5-5 para um modelo de estoques de cinco níveis adequado ao modelo correspondente da Seção 18.5, em que os parâmetros do modelo são dados a seguir.

Instalação *i*	K_i	h_i	d = 1.000
1	US$ 125.000	US$ 2	
2	US$ 20.000	US$ 10	
3	US$ 6.000	US$ 15	
4	US$ 10.000	US$ 20	
5	US$ 250	US$ 30	

18.5-7. Reconsidere o exemplo de um sistema de estoques de quatro níveis apresentado na Seção 18.5, em que seus parâmetros de modelo são dados na Tabela 18.2. Suponha agora que os custos de implantação nas quatro instalações tenham mudado em relação ao que é fornecido na Tabela 18.2, na qual os novos valores são K_1 = US$ 1.000, K_2 = US$ 5, K_3 = US$ 75 e K_4 = US$ 80. Refaça a análise apresentada na Seção 18.5 para esse exemplo (conforme sintetizado na Tabela 18.4) com esses novos custos de implantação.

18.5-8. Um dos diversos produtos fabricados pela Global Corporation é comercializado basicamente nos Estados Unidos. Uma forma inacabada do produto é fabricada em uma das fábricas da corporação na Ásia e então remetida para um complexo industrial nos Estados Unidos para o trabalho de acabamento. O produto acabado é então enviado para o centro de distribuição da corporação nos Estados Unidos. O centro de distribuição armazena o produto e depois usa esse estoque para atender a pedidos de diversos atacadistas. Essas vendas a atacadistas permanecem relativamente uniformes ao longo do ano em uma taxa de cerca de 10.000 unidades por mês. O complexo industrial norte-americano usa seu estoque do produto acabado para enviar uma remessa para o centro de distribuição sempre que precisar reabastecer seu estoque. Os custos administrativos e de remessa associados giram em torno de US$ 400 por remessa. Toda vez que o complexo industrial norte-americano precisar reabastecer seu estoque, o complexo industrial asiático usa seu estoque de produto inacabado para enviar uma remessa ao complexo industrial norte-americano, que então prepara uma rápida produção de um lote de peças para converter o produto inacabado em um produto acabado. Cada vez que isso acontece, o custo total de remessa e de implantação é de cerca de US$ 6.000. O complexo industrial asiático reabastece seus estoques de produto inacabado quando necessário, preparando para uma rápida produção de um lote de peças. Um custo de implantação de US$ 60.000 é incorrido cada vez que isso é feito. O custo mensal para armazenar cada unidade é de US$ 3 na fábrica asiática, US$ 7 no complexo industrial norte-americano e de US$ 9 no centro de distribuição. Todas as hipóteses do modelo para um sistema serial multinível apresentadas na Seção 18.5 aplicam-se ao sistema de estoques nos três locais para esse produto.

Solucione esse modelo desenvolvendo uma tabela parecida com a Tabela 18.4 que mostre os resultados intermediário e final da aplicação do procedimento de resolução apresentado na Seção 18.5. Após calcular o custo variável total por mês da solução final, determine a porcentagem máxima possível pela qual esse custo pode exceder o custo correspondente para uma solução ótima.

18.6-1. Henry Edsel é o proprietário da Honest Henry's, a maior revendedora de carros nessa região do país. Seu modelo de carro mais popular é o Triton e os custos mais elevados são aqueles associados à encomenda desses veículos da fábrica e à manutenção de um estoque de Tritons no pátio. Em razão desses fatos, Henry solicitou à sua gerente-geral, Ruby Willis, que uma vez fez um curso de pesquisa operacional, que usasse sua experiência em desenvolver políticas de custos eficientes para descobrir qual deveria ser o momento de fazer essas encomendas de Tritons e quantos veículos comprar a cada vez.

Ruby decide adotar o modelo estocástico de revisão contínua apresentado na Seção 18.6 para determinar uma política (R, Q). Após alguma pesquisa, ela estima que o custo administrativo para fazer cada pedido de compra é de US$ 1.500 (é necessário um grande volume de papelada para encomendar os carros), o custo de manutenção de estoque para cada carro é de US$ 3.000 por ano (15% do preço de compra da agência que é de US$ 20.000), e o custo de escassez por carro em falta é de US$ 1.000 por ano (uma probabilidade estimada de $\frac{1}{3}$ de perder a venda de um carro e seu lucro de cerca de US$ 3.000). Após considerar tanto a gravidade de incorrer na falta de produto quanto o elevado custo de manutenção de estoque, Ruby e Henry concordam em usar um nível de atendimento de 75% (uma probabilidade de 0,75 de não incorrer na falta de produto entre o momento em que é feito um pedido de compra e a entrega do carro encomendado). Baseado em experiência prévia, eles também estimam que os Tritons são vendidos a uma taxa relativamente uniforme de cerca de 900 por ano.

Após ser feito um pedido de compra, os carros são entregues em cerca de dois terços do mês. A melhor estimativa de Ruby da distribuição probabilística da demanda durante o prazo antes de uma entrega chegar é uma distribuição normal com média de 50 e desvio-padrão igual a 15.

(a) Calcule manualmente a quantidade encomendada.

(b) Utilize a tabela para distribuição normal (Apêndice 5) para encontrar o ponto para fazer novo pedido.

T **(c)** Use o Gabarito em Excel para esse modelo que pode ser encontrado no *Courseware* de PO para verificar suas respostas nos itens (*a*) e (*b*).

(d) Dadas suas respostas anteriores, qual o nível de estoque de segurança fornecido por essa política de estoques?

(e) Essa política pode induzir a se fazer um novo pedido de compra antes de a entrega do pedido anterior ter sido efetivamente realizada. Indique quando isso poderia acontecer.

18.6-2. Um dos produtos mais vendidos na loja de departamentos de J. C. Ward é um novo modelo de geladeira com alta eficiência em termos de consumo de energia. Estão sendo vendidas cerca de 40 unidades dessas geladeiras por mês. Leva cerca de uma semana para a loja conseguir mais geladeiras de um atacadista. A demanda durante esse período apresenta uma distribuição uniforme entre 5 e 15. O custo administrativo para se fazer um pedido de compra é de US$ 40. Para cada geladeira, o custo de manutenção de estoque por mês é de US$ 8 e o custo de escassez por mês é estimado em cerca de US$ 1.

O gerente de estoque da loja decidiu adotar o modelo estocástico de revisão contínua apresentado na Seção 18.6, com um nível de atendimento (medida 1) de 0,8, para determinar uma política (R, Q).

(a) Calcule manualmente R e Q.

T **(b)** Use o Gabarito em Excel correspondente para verificar sua resposta ao item (*a*).

(c) Qual seria o número médio de esgotamento de estoques por ano com essa política de estoques?

18.6-3. Ao adotar o modelo estocástico de revisão contínua apresentado na Seção 18.6, é necessário tomar-se uma difícil decisão gerencial de avaliação sobre o nível de atendimento a ser oferecido aos clientes. O objetivo desse problema é permitir que você explore o balanceamento dos fatores envolvidos ao tomar tal decisão.

Suponha que a medida do nível de atendimento que está sendo adotada seja L = probabilidade de que não venha ocorrer um esgotamento de estoque durante o prazo de entrega. Já que a gerência geralmente dá alta prioridade no fornecimento de serviço excelente a seus clientes, a tentação é atribuir um valor muito elevado a L. Entretanto, isso resultaria na manutenção de um nível de estoque de segurança muito elevado, que vai contra o desejo da gerência de eliminar estoques desnecessários. Lembre-se de que a *filosofia just-in-time* discutida na Seção 18.3 está influenciando muito o pensamento gerencial de nossos dias. Qual é a melhor relação entre fornecimento de bons serviços e eliminação de estoques desnecessários?

Parta do pressuposto de que a distribuição probabilística da demanda durante o prazo de entrega é uma distribuição normal como média μ e desvio-padrão σ. Então, o ponto para fazer novo pedido R é $R = \mu + K_{1-L}\sigma$, em que K_{1-L} é obtido do Apêndice 5. O volume de estoque de segurança disponibilizado nesse ponto para fazer novo pedido é $K_{1\text{-}L}\sigma$. Portanto, se h representar o custo de manutenção de estoque para cada unidade mantida em estoque por ano, o custo de manutenção de estoque *anual médio para estoque de segurança* (representado por C) é $C = hK_{1-L}\sigma$.

(a) Construa uma tabela com cinco colunas. A primeira coluna é o nível de atendimento L, com valores 0,5, 0,75, 0,9, 0,95, 0,99 e 0,999. As quatro colunas seguintes fornecem C para quatro casos. O caso 1 é h = US\$ 1 e $\sigma = 1$. O caso 2 é h = US\$ 100 e $\sigma = 1$. O caso 3 é h = US\$ 1 e $\sigma = 100$. O caso 4 é h = US\$ 100 e $\sigma = 100$.

(b) Construa uma segunda tabela que se baseie na tabela obtida no item (*a*). Essa nova tabela terá cinco linhas e as mesmas cinco colunas da primeira tabela. Cada entrada na tabela nova é obtida subtraindo-se a entrada correspondente na primeira tabela da entrada na linha seguinte da primeira tabela. Por exemplo, as entradas na primeira coluna da tabela nova são $0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$, $0{,}9 - 0{,}75 = 0{,}15$, $0{,}95 - 0{,}9 = 0{,}05$, $0{,}99 - 0{,}95 = 0{,}04$ e $0{,}999 - 0{,}99 = 0{,}009$. Já que essas entradas representam aumentos no nível de atendimento L, cada entrada nas quatro colunas seguintes representa o aumento em C que resultaria do aumento de L pela quantidade mostrada na primeira coluna.

(c) Baseado nessas duas tabelas, que conselho você daria a um gerente que precisasse tomar uma decisão em relação ao valor de L a ser adotado?

18.6-4. O problema anterior descreve os fatores envolvidos na tomada de uma decisão gerencial sobre o nível de atendimento L a ser adotado. Ele também destaca que para quaisquer valores dados de L, h (o custo de manutenção de estoque unitário por ano) e σ (o desvio-padrão quando a demanda durante o prazo de entrega apresenta uma distribuição normal), o custo de manutenção de estoque anual médio para o estoque de segurança passaria a ser $C = hK_{1-L}\sigma$, em que C representa esse custo de manutenção de estoque e K_{1-L} é dado no Apêndice 5. Portanto, o nível de variação na demanda, conforme medido por σ, possui um importante impacto sobre esse custo de manutenção de estoque C.

O valor de σ é afetado substancialmente pela duração do prazo de entrega. Em particular, σ aumenta à medida que o prazo de entrega aumenta. O propósito desse problema é possibilitar que você explore mais essa relação.

Para tornar isso mais concreto, suponha que o sistema de estoques em consideração no momento tenha os seguintes valores: $L = 0{,}9$, h = US\$ 100 e $\sigma = 100$ com prazo de entrega de quatro dias. Entretanto, o fornecedor utilizado para reabastecer estoques está propondo uma alteração na programação de entrega que afetaria seu prazo de entrega. Você quer determinar como essa alteração mudaria σ e C.

Partimos do pressuposto que para esse sistema de estoques (como normalmente é o caso) as demandas em dias distintos são estatisticamente independentes. Nesse caso, a relação entre σ e o prazo de entrega é dada pela fórmula

$$\sigma = \sqrt{d}\sigma_1,$$

em que d = número de dias para o prazo de entrega,
σ_1 = desvio-padrão, caso $d = 1$.

(a) Calcule C para o sistema de estoques atual.

(b) Determine σ_1. Em seguida, descubra como C mudaria caso o prazo de entrega fosse reduzido de quatro dias para um dia.

(c) Qual seria a mudança em C se o prazo de entrega fosse dobrado, passando de quatro para oito dias?

(d) Qual seria o prazo de entrega necessário para que C dobrasse de seu valor atual com um prazo de entrega de quatro dias?

18.6-5. Qual é o efeito sobre o volume de estoque de segurança fornecido pelo modelo estocástico de revisão contínua apresentado na Seção 18.6 quando forem feitas as seguintes alterações no sistema de estoques. Considere cada alteração de forma independente.

(a) O prazo de entrega é reduzido a 0 (entrega imediata).

(b) O nível de atendimento (medida 1) é diminuído.

(c) O custo de escassez unitário é dobrado.

(d) A média da distribuição probabilística de demanda durante o prazo de entrega é aumentada (com nenhuma outra mudança na distribuição).

(e) A distribuição probabilística da demanda durante o prazo de entrega é uma distribuição uniforme variando de a a b, porém agora $(b - a)$ foi dobrado.

(f) A distribuição probabilística de demanda durante o prazo de entrega é uma distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ, mas agora σ foi dobrado.

18.6-6.* Jed Walker é o gerente da Have a Cow, uma lanchonete no centro da cidade. Jed vem adquirindo toda carne de hambúrguer da Ground Chuck (um fornecedor local), porém está pensando em mudar para a Chuck Wagon (um depósito de amplitude nacional), pois seus preços são menores.

A demanda *semanal* por carne de hambúrguer gira em média de 500 quilos, com alguma variação de semana para semana. Jed estima que o custo de manutenção de estoque *anual* seja de 30 centavos por quilo de carne. Quando a carne de sua lanchonete acaba, Jed é forçado a comprar do açougue ao lado. O alto custo de aquisição e os transtornos envolvidos geram um custo estimado de cerca de US\$ 3 por quilo de carne em falta. Para ajudar a evitar a falta de produto, Jed decidiu manter um estoque de segurança suficiente para impedir a falta do produto antes de a próxima entrega chegar durante 95% dos ciclos de pedidos de compra. Fazer um pedido de compra requer apenas o envio de um fax e, portanto, o custo administrativo é desprezível.

As bases de um contrato da Cow com a Ground Chuck são as seguintes: o preço de aquisição é de US$ 1,49 por quilo. É acrescentado um custo fixo de US$ 25 por pedido referente a transporte e manipulação. Há uma garantia de a remessa chegar em um prazo de dois dias. Jed estima que a demanda por carne durante esse prazo de entrega tenha uma distribuição uniforme variando de 50 a 150 quilos.

A Chuck Wagon está propondo as seguintes condições a Jef: a carne custaria US$ 1,35 por quilo. A Chuck Wagon transporta suas mercadorias por caminhões frigoríficos e, portanto, cobra custos de transporte adicionais de US$ 200 por pedido mais US$ 0,10 por quilo. O tempo de entrega seria de aproximadamente uma semana, mas há uma garantia de que ele não excederia dez dias. Jed estima que a distribuição probabilística de demanda durante esse tempo de espera seria uma distribuição normal com média de 500 quilos e desvio-padrão de 200 quilos.

T **(a)** Use o modelo estocástico de revisão contínua apresentado na Seção 18.6 para obter uma política (R, Q) para a Have a Cow para cada uma das duas alternativas dos fornecedores que poderiam ser usados.

(b) Mostre como o ponto para fazer novo pedido é calculado para cada uma dessas duas políticas.

(c) Estabeleça e compare a quantidade de estoque de segurança oferecida pelas duas políticas obtidas no item (*a*).

(d) Determine e compare o custo de manutenção de estoque anual médio segundo essas duas políticas.

(e) Estipule e compare o custo de aquisição anual médio (combinando preço de compra e custo de transporte) segundo essas duas políticas.

(f) Já que a falta de produto é muito rara, os únicos custos relevantes para comparação entre os dois fornecedores são aqueles obtidos nos itens (*d*) e (*e*). Some esses custos para cada fornecedor. Qual fornecedor deveria ser selecionado?

(g) Jed gostaria de usar a carne (que ele mantém em um freezer) em um prazo de até um mês de seu recebimento. Como isso influenciaria sua escolha de fornecedor?

T **18.7-1.** Uma banca de jornal compra jornais por US$ 0,36 e os revende a US$ 0,50. O custo de escassez é de US$ 0,50 por jornal (porque o revendedor compra jornais a um preço de varejo para atender à falta de produto). O custo de manutenção de estoque é de US$ 0,002 por jornal que sobra no final do dia. A distribuição de demanda é uma distribuição uniforme variando entre 200 e 300. Encontre o número ótimo de jornais a serem comprados.

18.7-2. Freddie, o jornaleiro, cuida de uma banca de jornais. Em virtude da proximidade de um escritório na área financeira, um dos jornais que ele vende diariamente é o *Financial Journal*. Ele adquire exemplares desse jornal de seu distribuidor no início de cada dia por US$ 1,50 por exemplar, e o vende a US$ 2,50 cada, e então recebe um reembolso de US$ 0,50 do distribuidor na manhã seguinte para cada exemplar não vendido. O número de exemplares vendidos desse jornal varia entre 15 e 18 por dia. Freddie estima que vende 15 exemplares em 40% dos dias, 16 exemplares em 20% dos dias, 17 exemplares em 30% dos dias e 18 exemplares nos demais dias.

(a) Use a regra de decisão de Bayes apresentada na Seção 15.2 para determinar qual deve ser o novo número de exemplares que Freddie deve encomendar para maximizar o lucro diário esperado.

(b) Aplique novamente a regra de decisão de Bayes, porém, desta vez, com o critério de minimizar o custo diário esperado por pedido subdimensionado ou superdimensionado feito por Freddie.

(c) Use o modelo estocástico de período simples para produtos perecíveis para determinar a quantidade ótima a ser encomendada por Freddie.

(d) Faça um gráfico da distribuição acumulativa em função da demanda e depois mostre graficamente como o modelo no item (*c*) encontra a quantidade ótima a ser encomendada.

18.7-3. A loja de *donuts* de Jennifer serve uma grande variedade de *doughnuts*, um dos quais com recheio de *blueberry*, coberto de chocolate e tamanho extra polvilhado de açúcar. Trata-se de um *doughnut* de tamanho extra grande destinado a ser dividido por uma família inteira. Já que a massa requer muito tempo para crescer, a preparação desses *doughnuts* começa às 4 h da manhã e, portanto, a decisão sobre o número deles a ser preparado deve ser feita muito antes de se saber realmente quantos serão necessários ao longo do dia. O custo dos ingredientes e do trabalho necessário para preparar cada um desses *doughnuts* é de US$ 1. O preço de venda é de US$ 3 cada. Aqueles que não forem vendidos naquele dia são vendidos para uma vendinha por US$ 0,50 cada. Nas últimas semanas foi feito um monitoramento do número desses *doughnuts* vendidos a US$ 3 por dia. Os dados são sintetizados a seguir.

Número Vendido	Porcentagem dos Dias
0	10%
1	15%
2	20%
3	30%
4	15%
5	10%

(a) Qual é o custo unitário de pedido subdimensionado? E o custo unitário de pedido superdimensionado?

(b) Use a regra de decisão de Bayes apresentada na Seção 15.2 para determinar quantos *doughnuts* devem ser preparados por dia para minimizar o custo médio diário para pedido subdimensionado ou superdimensionado.

(c) Após colocar em gráfico a função de demanda de distribuição acumulativa, aplique graficamente o modelo estocástico de período simples para produtos perecíveis para determinar quantos *doughnuts* devem ser preparados por dia.

(d) Dada a resposta no item (*c*), qual seria a probabilidade de ficar com falta desses *doughnuts* em dado dia?

(e) Algumas famílias vão especialmente à loja de *donuts* apenas para comprar esse *doughnut* especial. Portanto, Jennifer imagina que o custo quando ela ficar com falta do produto deve ser maior que o lucro perdido. Em particular, pode haver um custo de perda de credibilidade junto ao cliente cada vez que um cliente pedir esse *doughnut* especial, porém ele já tiver acabado. Quanto deveria ser esse custo antes de poder preparar mais um desses *doughnuts* por dia que aquele que foi encontrado no item (*c*)?

18.7-4.* A padaria do Swanson é bem conhecida por fazer o melhor pão da cidade e, conseqüentemente, suas vendas são bastante substanciais. A demanda diária por esses pães tem uma distribuição uniforme que varia entre 300 e 600 filões. O pão é levado ao forno logo pela manhã, antes de a padaria abrir para os clientes, a um custo de US$ 2 por filão. Ele é então vendido naquele dia por US$ 3 o filão. O pão que não é vendido no dia é requentado e identificado como pão do dia anterior e vendido posteriormente com um preço com desconto de US$ 1,50 por filão.

(a) Aplique o modelo estocástico de período simples para produtos perecíveis para determinar o nível ótimo de atendimento.

(b) Aplique esse modelo graficamente para determinar o número ótimo de filões a serem levados ao forno a cada manhã.

(c) Com ampla variação de possíveis valores na distribuição de demanda, fica difícil desenhar o gráfico no item (*b*) de forma suficientemente cuidadosa para determinar o valor exato do número ótimo de filões. Use álgebra para calcular esse valor exato.

(d) Dada sua resposta no item (*a*), qual é a probabilidade de faltar pão fresco em dado dia?

(e) Pelo fato de o pão dessa padaria ser tão famoso, seus clientes ficam bastante desapontados quando ocorre a falta de pão. O dono da padaria, Ken Swanson, dá alta prioridade para manter seus clientes satisfeitos, de modo que ele não gosta que falte o produto. Ele acha que uma análise também deveria levar em consideração a perda de credibilidade com o cliente em razão da falta de produto. Já que essa perda de credibilidade com o cliente pode ter um efeito negativo sobre vendas futuras, ele estima que deveria ser computado um custo de US$ 1,50 por filão de pão cada vez que um cliente não conseguisse comprar pão fresco em decorrência da falta do produto. Determine o novo número ótimo de filões a serem preparados diariamente levando em conta essa alteração. Qual é a nova probabilidade de faltar pão fresco em dado dia?

18.7-5. Reconsidere o Problema 18.7-4. O dono da padaria, Ken Swanson, agora quer realizar uma análise financeira das diversas políticas de estoques. Você deve começar com a política obtida nos primeiros quatro itens do Problema 18.7-4 (ignorando qualquer custo em conseqüência da perda de credibilidade com o cliente). Conforme dado nas respostas no final do livro, essa política é fazer 500 filões a cada manhã, o que dá uma probabilidade de $\frac{1}{3}$ e incorrer em falta do produto.

(a) Para qualquer dia em que ocorra *efetivamente* a falta de produto, calcule a receita obtida com a venda de pão fresco.

(b) Para aqueles dias em que *não* ocorre falta de produto, use a distribuição probabilística de demanda para determinar o número de filões frescos vendidos. Use esse número para calcular a receita diária esperada da venda de pão fresco nesses dias.

(c) Combine seus resultados dos itens (*a*) e (*b*) para calcular a receita diária esperada da venda de pão fresco ao considerar *todos* os dias.

(d) Calcule a receita diária esperada da venda de pão do dia anterior.

(e) Use os resultados nos itens (*c*) e (*d*) para calcular a receita diária total esperada e depois o lucro diário esperado (excluindo gastos indiretos).

(f) Considere agora a política de estoques de fazer uma fornada de 600 filões a cada manhã, de modo que jamais ocorra falta de produto. Calcule o lucro diário esperado (excluindo gastos indiretos) dessa política.

(g) Considere a política de estoques do item (*e*) do Problema 18.7-4. Conforme implícito nas respostas na parte final do livro, essa política é fazer 550 filões a cada manhã, o que dá uma probabilidade de incorrer em uma falta de produto de $\frac{1}{6}$. Já que essa política se encontra no ponto médio entre a política aqui considerada nos itens (*a*) a (*e*) e aquela considerada no item (*f*), seu lucro diário esperado (excluindo gastos indiretos e o custo de perda de credibilidade com o cliente) também se encontra no ponto médio entre o lucro diário esperado para essas duas políticas. Use esse fato para determinar seu lucro diário esperado.

(h) Considere agora o custo da perda de credibilidade com o cliente para a política de estoques analisada no item (*g*). Calcule o custo diário esperado da perda de credibilidade com o cliente e depois o lucro diário esperado ao considerar esse custo.

(i) Repita o item (*h*) para a política de estoques considerada nos itens (*a*) a (*e*).

18.7-6. Reconsidere o Problema 18.7-4. O dono da padaria, Ken Swanson, desenvolveu agora um novo plano para diminuir a dimensão da falta de produto. O pão agora será assado em duas fornadas por dia, logo antes de a padaria abrir (como antes) e a outra durante o dia, após ficar mais claro qual será a demanda para aquele dia. A primeira fornada será de 300 filões para cobrir a demanda mínima para o dia. O tamanho da segunda fornada será baseado em uma estimativa da demanda restante para aquele dia. Essa demanda restante tem, supostamente, uma distribuição uniforme variando de a a b, em que os valores de a e b são escolhidos a cada dia baseado nas vendas até então. Sabe-se, antecipadamente, que $(b - a)$ normalmente estará na casa dos 75, ao contrário do intervalo de 300 para a distribuição de demanda do Problema 18.7-4.

(a) Ignorando qualquer custo de perda de credibilidade com o cliente [como nos itens (*a*) a (*d*) do Problema 18.7-4], escreva uma fórmula para quantos filões deveriam ser feitos em uma segunda fornada em termos de a e b.

(b) Qual é a probabilidade de ainda haver falta de pão fresco em dado dia? Como essa resposta se compararia à probabilidade correspondente do Problema 18.7-4?

(c) Quando $b - a = 75$, qual é o tamanho máximo de uma falta de produto que possa ocorrer? Qual é o número máximo de filões de pão fresco que não será vendido? Como essas respostas são comparadas aos números correspondentes para a situação no Problema 18.7-4 em que ocorre apenas uma fornada (logo cedo) por dia?

(d) Considere agora apenas o custo de pedido subdimensionado e o custo de pedido superdimensionado. Dadas suas respostas no item (*c*), como seria a comparação do custo diário total esperado de pedido subdimensionado e superdimensionado para essa nova estratégia com aquele da situação do Problema 18.7-4? O que isso quer dizer em termos gerais sobre o valor de obter-se o máximo possível de informações sobre qual será a demanda antes de se fazer um pedido de compra final para um produto perecível?

(e) Repita os itens (*a*), (*b*) e (*c*) agora incluindo o custo da perda de credibilidade com o cliente como no item (*e*) do Problema 18.7-4.

18.7-7. Suponha que a demanda D para uma peça de reposição de um avião tenha uma distribuição exponencial com média 50, isto é,

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{50}e^{-\xi/50} & \text{para } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esse avião se tornará obsoleto em um ano, de forma que toda a produção das peças de reposição deve ocorrer agora. Os custos de produção no momento são US$ 1.000 por item — isto é, $c = 1.000$ —, mas eles se tornarão US$ 10.000 por item, caso tenham de ser fornecidos em datas posteriores — isto é, $p = 10.000$. Os custos de manutenção de estoque, cobrados em relação ao excesso após o final do período, são de US$ 300 por item.

T **(a)** Determine o número ótimo de peças de reposição a serem produzidas.
(b) Suponha que o fabricante tenha 23 peças já em estoque (de um avião similar, porém agora obsoleto). Determine a política de estoques ótima.
(c) Suponha que *p* não possa ser determinado agora, porém o fabricante deseja encomendar uma quantidade de tal modo que a probabilidade de ocorrência de falta de produto seja igual a 0,1. Quantas unidades deveriam ser encomendadas?
(d) Se o fabricante estivesse seguindo uma política ótima que resultasse na encomenda da quantidade encontrada no item (*c*), qual seria o valor implícito de *p*?

18.7-8. Reconsidere o Problema 18.6-1 envolvendo a revendedora de automóveis de Henry Edsel. O ano do modelo atual está quase terminando, porém os Tritons estão vendendo tão bem que o estoque atual será esgotado antes de a demanda de final de ano puder ser atendida. Felizmente, ainda há tempo para fazer mais um pedido de compra na fábrica para reabastecer o estoque de Tritons logo antes de o estoque atual acabar.

A gerente-geral, Ruby Willis, agora precisa decidir quantos Tritons devem ser encomendados da fábrica. Cada um deles custa US$ 20.000. Ela poderá vendê-los depois a um preço médio de US$ 23.000, desde que eles sejam vendidos antes do final do ano. Entretanto, qualquer Triton que sobre no final do ano teria de ser então vendido a um preço especial de US$ 19.500. Além disso, Ruby estima que o custo extra de capital imobilizado para estocar esses carros por um período tão longo seria de US$ 500 por carro, de modo que o lucro líquido seria apenas de US$ 19.000. Já que ela perderia US$ 1.000 em cada um destes carros que sobrassem no final do ano, Ruby conclui que ela precisa ser cautelosa para evitar encomendar um número excessivo de carros, porém ela também quer impedir, se possível, ficar sem o produto para vendê-los até o final do ano. Portanto, ela decide usar o modelo estocástico de período simples para produtos perecíveis para escolher a quantidade encomendada. Para tanto, ela estima que o número de Tritons que estão sendo encomendados agora e que poderiam ser vendidos antes do final do ano do modelo atual apresenta uma distribuição normal com média de 50 e desvio-padrão igual a 15.

(a) Determine o nível de atendimento ótimo.
(b) Determine o número de Tritons que Ruby deveria encomendar à fábrica.

T **18.7-9.** Encontre a política de encomenda ótima para o modelo estocástico de período simples com um custo de implantação em que a demanda possui uma função densidade probabilística

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{para } 0 \le \xi \le 20 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e os custos são

$$\begin{aligned} \text{Custo de manutenção de estoque} &= \text{US\$ 1 por item,} \\ \text{Custo de escassez} &= \text{US\$ 3 por item,} \\ \text{Custo de implantação} &= \text{US\$ 1,50,} \\ \text{Custo de produção} &= \text{US\$ 2 por item.} \end{aligned}$$

Demonstre seu exercício e depois verifique sua resposta usando o Gabarito em Excel correspondente que pode ser encontrado no *Courseware* de PO.

T **18.7-10.** Usando a aproximação para encontrar a política ótima para o modelo estocástico de período simples com um custo de implantação quando a demanda apresenta uma distribuição exponencial, encontre essa política quando

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{25} e^{-\xi/25} & \text{para } \xi \ge 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e os custos são

$$\begin{aligned} \text{Custo de manutenção de estoque} &= \text{40 centavos de dólar por item,} \\ \text{Custo de escassez} &= \text{US\$ 1,50 por item,} \\ \text{Preço de aquisição} &= \text{US\$ 1 por item,} \\ \text{Custo de implantação} &= \text{US\$ 10.} \end{aligned}$$

Demonstre seu exercício e a seguir verifique sua resposta usando o Gabarito em Excel correspondente do *Courseware* de PO.

CASOS

CASO 18.1 Revisão Sobre Controle de Estoque

Robert Gates dobra a esquina e sorri quando vê sua esposa podando suas rosas no jardim frontal. Lentamente, ele dirige seu carro até a entrada da garagem, desliga o motor e vai ao encontro de sua mulher, já de braços abertos.

"Como foi o seu dia?", pergunta ela.

"Maravilhoso! O mercado de lojas de conveniência não poderia estar melhor!" Replica Robert, "Exceto pelo trânsito do trabalho até aqui! Esse trânsito pode deixar qualquer um maluco! Estou tão nervoso agora. Acho que vou entrar e preparar um martini para relaxar".

Robert entra na casa e vai diretamente para a cozinha. Ele vê a correspondência sobre o balcão da cozinha e começa a verificar rapidamente as diversas contas e propagandas que chegaram até que se depara com a nova edição da *OR/MS Today*. Ele prepara seu drinque, pega a revista, caminha para a sala de estar e se acomoda confortavelmente em sua poltrona. Ele tem tudo o que deseja —, exceto por uma coisa. Ele vê o controle remoto em cima da televisão. Ele deixa seu drinque e revista sobre a mesa e vai em direção ao controle remoto. Agora, com o controle remoto em uma das mãos, a revista em outra e seu aperitivo na mesa logo ao seu lado, Robert se sente finalmente dono de seus domínios.

Robert liga a TV e fica percorrendo os canais até encontrar o noticiário local. A seguir, ele abre a revista e começa a ler um artigo sobre controle de estoques científico. De vez em quando ele dá uma olhada na televisão para se inteirar das últimas notícias de negócios, tempo e esportes.

À medida que Robert vai se aprofundando no artigo, ele acaba perdendo a atenção sobre este e começa a ver um comercial na TV sobre escovas de dentes. Sua pulsação aumenta ligeiramente em razão da ansiedade, pois a propaganda das escovas de dentes Totalee o faz lembrar do dentista. O comercial conclui que o cliente deve comprar uma escova Totalee, porque essa escova de dentes é "totalmente" revolucionária e "totalmente" eficiente. Ela certamente é eficiente; ela é a escova de dentes mais popular do mercado!

Naquele instante, com o artigo sobre controle de estoques e o comercial da escova fresco na memória, Robert experimenta um lampejo de sabedoria. Ele sabe como controlar o estoque de escovas Totalee na loja em que trabalha, a Nightingale!

Como gerente de controle de estoque da Nightingale, Robert tem passado por problemas em manter escovas de dentes Totalee em estoque. Ele descobriu que os clientes são muito fiéis à marca Totalee já que a Totalee tem o aval de nove de cada dez dentistas. Os clientes estão ávidos esperando que as escovas de dentes cheguem na Nightingale já que a loja as vende por 20% a menos que outras lojas da região. Esta demanda por escovas na Nightingale significa que sua loja normalmente está com falta de escovas Totalee. A loja é capaz de receber uma remessa de escovas algumas horas depois de fazer um pedido de compra no depósito regional da Totalee, pois este se encontra apenas a 20 km de distância da loja. Não obstante, a situação atual de estoque causa problemas, porque inúmeros pedidos de emergência custam à loja tempo desnecessário e papelada, além de os clientes se tornarem descontentes quando eles precisam retornar à loja mais tarde naquele dia.

Robert descobriu agora uma maneira de evitar os problemas de estoque por meio do controle de estoques científico! Ele agarra sua jaqueta e as chaves do carro e sai em disparada de casa.

Enquanto ele corre em direção ao carro, sua esposa grita: "Amor, aonde você está indo agora?"

"Desculpe-me, querida", responde Robert. "Acabo de descobrir uma maneira de controlar o estoque de um item crítico na loja de conveniência. Estou eufórico, pois agora serei capaz de aplicar meu diploma de engenheiro industrial em meu serviço! Preciso coletar os dados da loja e elaborar a nova política de estoques! Estarei de volta antes do jantar!"

Em razão de o horário de *rush* ter acabado, a ida até a loja não levou muito tempo. Ele abre a loja, já às escuras, e dirige-se a seu escritório onde vasculha os arquivos para encontrar os dados de demanda e custo para as escovas de dentes Totalee ao longo do ano passado.

Aha! Como eu suspeitava! Os dados de demanda para as escovas são praticamente constantes ao longo dos meses. Não importa se é verão ou inverno, os clientes têm dentes para ser escovados e precisam das respectivas escovas de dentes. Já que uma escova ficará gasta após poucos meses de uso, os clientes sempre voltarão para comprar outra escova. Os dados referentes à demanda mostram que os clientes da Nightingale compram uma média de 250 escovas Totalee por mês (30 dias).

Após examinar os dados de demanda, Robert investiga os dados de custo. Como a Nightingale é um bom cliente, a Totalee cobra seu menor preço de atacado, ou seja, apenas US$ 1,25 por escova. Robert gasta cerca de 20 minutos para fazer um pedido de compra na Totalee. Seu salário e benefícios chegam à casa de US$ 18,75 por hora. O custo de manutenção de estoque anual para o estoque é de 12% do capital imobilizado em estoque de escovas Totalee.

(a) Robert decide criar uma política de estoques que normalmente atenderia toda a demanda já que ele acredita que faltas de produto em estoque não valem o transtorno de acalmar os clientes ou o risco de perder futuros negócios. Portanto, ele não quer permitir a falta de produto planejada. Já que a Nightingale recebe um pedido de compra algumas horas depois que ele é feito, Robert faz a hipótese simplificadora de que a entrega seja instantânea. Qual é a política de estoques ótima sob essas condições? Quantas escovas Totalee Robert deveria encomendar cada vez e com que freqüência? Qual é o custo de estoque variável total por ano com essa política?

(b) A Totalee vem passando por problemas financeiros já que a empresa perdeu dinheiro tentando diversificar sua linha de produtos para outros artigos de higiene pessoal como escovas de cabelo e fio dental. A empresa decidiu então fechar o depósito localizado a 20 km da Nightingale. A loja agora precisa fazer seus pedidos de compra para um depósito localizado a 350 km de distância e, agora, terá de esperar seis dias para receber um pedido. Dado esse novo prazo de entrega, quantas escovas de dentes Totalee Robert deveria encomendar a cada pedido e quando ele deveria fazê-lo?

(c) Robert começa a imaginar se ele economizaria dinheiro caso permitisse a ocorrência de falta de produto planejada. Os clientes esperariam para comprar as escovas da Nightingale já que eles têm grande fidelidade, além de a Nightingale vender as escovas por preços menores. Embora os clientes teriam de esperar para adquirir a escova Totalee da Nightingale, eles ficariam insatisfeitos com a perspectiva de terem de voltar à loja novamente para adquirir o produto. Robert decide que precisa avaliar o valor econômico das ramificações negativas da falta de produto. Ele sabe que um empregado teria de acalmar cada cliente descontente e monitorar a data de entrega da nova remessa de escovas Totalee. Robert também acredita que os clientes ficariam bravos com a inconveniência de comprar na Nightingale e quem sabe começariam a procurar outra loja que oferecesse melhor atendimento. Ele estima que os custos de lidar com clientes descontentes e com a perda de credibilidade com o cliente e de futuras vendas girem em torno de US$ 1,50 por unidade faltante por ano. Dado o prazo de entrega de seis dias e a possibilidade de ocorrência de falta de produto, quantas escovas Robert deveria encomendar por pedido e quando ele deveria fazê-lo? Qual é a falta de produto máxima permitida segundo essa política de estoques ótima? Qual é o custo de estoque variável total por ano?

(d) Robert percebe que sua estimativa para o custo de escassez é simplesmente isto — uma estimativa. Ele percebe que os empregados algumas vezes devem perder vários minutos com cada cliente que deseja comprar uma escova quando não existe nenhuma disponível. Além disso, ele percebe que o custo de perda de credibilidade com o cliente e de vendas futuras poderia variar dentro de um grande intervalo. Ele estima que o custo de lidar com clientes descontentes e com perda de credibilidade com o cliente e de vendas futuras poderiam variar de 85 centavos a US$ 25 por unidade em falta por ano. Qual seria o efeito de mudar a estimativa do custo de escassez unitária sobre a política de estoques e custo de estoque variável total por ano encontrado no item (*c*)?

(e) Fechar depósitos não melhorou muito o resultado da Totalee, de modo que a empresa decidiu instituir uma política de descontos para encorajar mais vendas. A Totalee cobrará US$ 1,25 por escova para qualquer pedido de compra para 500 escovas de dentes, US$ 1,15 por escova para pedidos com mais de 500 escovas, porém menos que 1.000 e US$ 1 por escova para pedidos de 1.000 escovas ou mais. Robert ainda supõe um prazo de entrega de seis dias, mas ele não quer a ocorrência de falta de produto planejada. Sob a nova política de desconto, quantas escovas Totalee Robert deveria encomendar a cada pedido e quando ele deveria fazê-lo? Qual é o custo total de estoque (incluindo custos de aquisição) por ano?

PRÉVIA DE CASOS ADICIONAIS NO CD-ROM

CASO 18.2 Abordando o Aprendizado de um Jovem

Um jovem empreendedor operando uma banca de fogos de artifício para a festa da independência. Ele tem tempo apenas para fazer um pedido de compra dos fogos que ele venderá em sua banca. Após obter os dados financeiros relevantes e certas informações com os quais poderá estimar a distribuição probabilística de vendas em potencial, ele agora precisa determinar quantos conjuntos de fogos de artifícios deveria encomendar para maximizar seu lucro esperado em diferentes cenários.

CASO 18.3 Desfazendo-se de Estoque Excedente

A American Aerospace fabrica motores para aviões a jato militares. A freqüente falta de produto de uma peça crítica tem causado atrasos na produção do mais popular motor a jato, portanto, uma nova política de estoques precisa ser desenvolvida para essa peça. Há um longo tempo de espera entre o momento que um pedido de compra da peça é feito e aquele que a quantidade encomendada é recebida. A demanda pela peça durante esse intervalo é incerta, porém alguns dados estão disponíveis para estimar sua distribuição probabilística. No futuro, o nível de estoques da peça será mantido em revisão contínua. As decisões agora precisam ser feitas em relação ao nível de estoques no qual precisa ser feito um novo pedido de compra e quanto deve ser a quantidade encomendada.