1. Exercícios de Convergência de Eventos.

Exemplo 1.1. Encontre lim sup, lim inf e lim (se existir) das sequências de conjuntos a seguir. Nos casos em que o limite da sequência existir calcule e compare o limite da probabilidade e a probabilidade do limite dos eventos, utilizando a distribuição Poisson(λ).

(a)

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}, \ n \geq 1.$$

Resposta: vemos que esta sequência é crescente pois $A_n \subset A_{n+1}$, consequentemente,

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \mathbb{N}^*$$

Logo

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^* \qquad \text{e} \qquad \underline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}^*$$

Como $\overline{A} = \underline{A}$ então o limite da sequência existe e é $\mathbb{N}^*$. Finalmente, $P(X \in \mathbb{N}^*) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}$.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\{1, 2, \ldots, n\}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x=1}^{n} e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} = 1 - e^{-\theta} = P\left(lim_{n\to\infty} A_n\right),$$

então o limite da probabilidade e a probabilidade do limite dos eventos coincidem, como era esperado pela teoria apresentada em aula.

(b)

$$B_n = \{0, n\}, \ n \geq 1$$

Resposta:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k = \{0\} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = \{0, n, n+1, \ldots\}$$

Logo

$$\overline{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{0, n, n+1, \ldots\} = \{0\} \qquad \text{e} \qquad \underline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0\} = \{0\}$$

Como $\overline{B} = \underline{B}$ então o limite da sequência existe e é $\{0\}$. Finalmente, $P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\{0,n\}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\theta} + e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}$$

mas sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^n}{n!} = 0$,

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\theta} = e^{-\theta} = P\left(lim_{n\to\infty} B_n\right),$$

então o limite da probabilidade e a probabilidade do limite dos eventos coincidem, como era esperado pela teoria apresentada em aula.

(c)

$$C_n = \begin{cases} \{0,n\}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{1,n\}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

Resposta:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} C_k = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = \{0,1,n,n+1,n+2,\ldots\}$$

Logo

$$\overline{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{0,1,n,n+1,n+2,\ldots\} = \{0,1\} \qquad \text{e} \qquad \underline{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

Como $\overline{C} \neq \underline{C}$ então o limite da sequência não existe.

(d)

$$D_n = \begin{cases} \{0,1,2,3,\ldots,n\}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{n\}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

Resposta:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} D_k = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k = \mathbb{N}$$

Logo

$$\overline{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \underline{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

Como $\overline{D} \neq \underline{D}$ então o limite da sequência não existe. Este caso é particularmente interesante pois enquanto $\overline{D}$ contém todos os números naturais $\underline{D}$ é o conjunto vazio.

Exemplo 1.2. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Considere a sequência de eventos

$$A_n = \left[-1, \frac{n^2-1}{n^2+n}\right]$$

calcule $\overline{A}$ e $\underline{A}$, caso o limite da sequência de eventos exista calcule a probabilidade do evento limite e compare com o limite da probabilidade da sequência de eventos.
Resposta: Note que

$$\frac{n^2-1}{n^2+n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

e esta é uma sequência não negativa crescente de números reais, por consequência A_n é uma sequência crescente de conjuntos porque $A_n \subset A_{n+1}$. Assim

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = [-1,1)$$

Logo

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-1,1) = [-1,1) \qquad \text{e} \qquad \underline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1,1)$$

Como $\overline{A} = \underline{A}$ então o limite da sequência existe e é $[-1,1)$. Finalmente, $P(X \in [-1,1)) = 1 - 2\Phi(-1) = 0,6826$ ($\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão).

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - 2\Phi(-1) = P([-1,1)) = P(A)$$

então o limite da probabilidade e a probabilidade do limite dos eventos coincidem, como era esperado pela teoria apresentada em aula.

Exemplo 1.3. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Considere a sequência de eventos

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} r_j,$$

em que r_j é o j-ésimo número racional do intervalo $(0,1)$. (isto é possível porque o conjunto dos números racionais é enumerável, isto é, é possível estabelecer uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ e neste caso nós os ordenamos de modo crescente no intervalo $(0,1)$). Calcule $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
Resposta:

Como $A_n \subset A_{n+1}$ então esta é uma sequência crescente de conjuntos. Sejam $\epsilon > 0$ e

$$B_j = \left(r_j - \frac{\epsilon}{2^{j+1}}, r_j + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right),$$

ou seja, B_j é uma vizinhança de r_j. Como $r_j \in B_j \ \forall j$, então

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_j \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)$$

mas $P(B_j) = r_j + \epsilon/2^{j+1} - (r_j - \epsilon/2^{j+1}) = \epsilon/2^j$ e

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \epsilon,$$

devido a série geométrica convergir para 1. Como $\lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \epsilon, \ \forall \epsilon$ então $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Resposta alternativa

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, isto é, A é união enumerável dos intervalos degenerados disjuntos $[r_j, r_j]$, todos de comprimento zero, o comprimento de A é a soma dos comprimentos dos componentes, ou seja, $P(A) = 0$.

E-mail address: bueno@@ime.usp.br

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil