ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – Primeira Prova – 29/08/2017

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

1ª Questão (4,0 pontos)

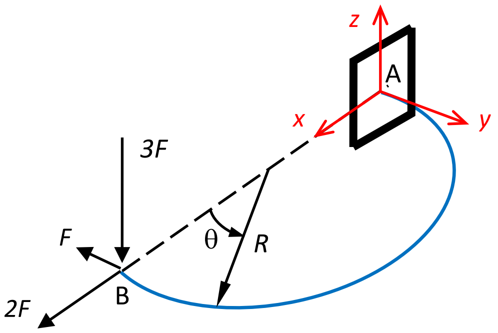
A figura abaixo ilustra o eixo central da barra AB, com raio de curvatura *R* (constante), disposto no plano horizontal *Axy*. A barra possui seção transversal circular cheia de diâmetro *d* (sendo *d*/*R* <<1) e tem sua extremidade A engastada e a extremidade B livre. Na extremidade livre B atua uma força concentrada cujas componentes, segundo os eixos *x*, *y* e *z*, estão assinaladas na figura. Pede-se:

a) obter as expressões da força normal, $N = N(\theta)$, e das componentes da força cortante: $V_b = V_b(\theta)$ (componente da força cortante que atua na direção do versor binormal) e $V_n = V_n(\theta)$ (componente da força cortante que atua na direção do versor normal), segundo o triedro de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$;

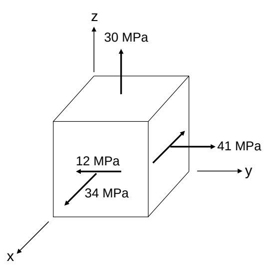
b) obter as expressões do momento torçor, $T = T(\theta)$, e das componentes do momento fletor: $M_b = M_b(\theta)$ (componente do momento fletor que atua na direção do versor binormal) e $M_n = M_n(\theta)$ (componente do momento fletor que atua na direção do versor normal), segundo o triedro de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$;

c) determinar o tensor das tensões no ponto *P* de coordenadas *P* = $(d/2,0,0)$ da seção A.

<u>**Obs**</u>: i) Considere que o ângulo θ é medido a partir da extremidade livre B, como indicado na figura, sendo $0 \leq \theta \leq \pi$; ii) Despreze o peso próprio da barra nos cálculos.



2ª Questão (4,0 pontos)



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto *P* de uma estrutura. A tensão de escoamento do material dessa estrutura é de 150MPa em tração e de 50MPa em cisalhamento. Seu limite de resistência à compressão é de 100MPa. Pede-se:

a) determinar qual é o fator de segurança nesse ponto;

b) calcular as direções normais aos planos em que ocorre o valor máximo da tensão de cisalhamento;

3ª Questão (2,0 pontos) Um tanque cilíndrico está sendo projetado para uma pressão interna de 12MPa, com um fator de segurança 2,0 em relação ao escoamento. A tensão de escoamento do seu material é de 300MPa em tração e 180MPa em cisalhamento. Se o diâmetro do tanque for 150mm, qual será a espessura de parede exigida?

GABARITO

1ª Questão

a) As expressões finais da força normal, $N = N(\theta)$, e das componentes da força cortante $V_b = V_b(\theta)$ (componente da força cortante que atua na direção do versor binormal) e $V_n = V_n(\theta)$ (componente da força cortante que atua na direção do versor binormal) ficam:

$$N(\theta) = Fcos\theta + 2Fsen\theta$$

$$V_b(\theta) = 3F$$

$$V_n(\theta) = 2Fcos\theta - Fsen\theta$$

1,0 pto

b) As expressões finais do momento torçor, $T = T(\theta)$, e das componentes do momento fletor $M_b = M_b(\theta)$ (componente do momento fletor que atua na direção do versor binormal) e $M_n = M_n(\theta)$ (componente do momento fletor que atua na direção do versor normal) ficam:

$$T(\theta) = 3FR(1 - cos\theta)$$

$$M_n(\theta) = 3FRsen\theta$$

$$M_b(\theta) = FR(1 - cos\theta - 2sen\theta)$$

1,5 pto

c) Os esforços solicitantes no engaste (seção A) ficam dados por (basta tomar $\theta = \pi$):

$$N(\theta) = -F$$

$$V_b(\theta) = 3F$$

$$V_n(\theta) = -2F$$

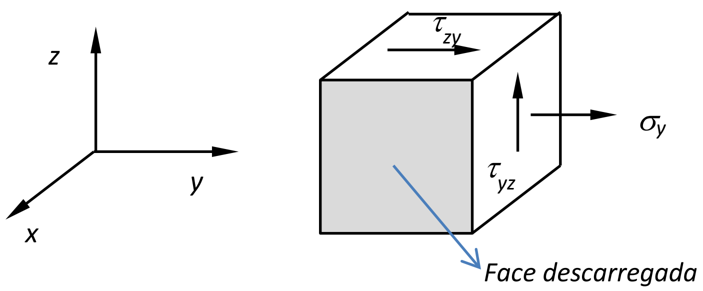
$$T(\theta) = 6FR$$

$$M_n(\theta) = 0$$

$$M_b(\theta) = 2FR$$

Levando ao seguinte estado tensional no ponto de coordenadas *P* = $(d/2, 0, d/2)$ da seção A:

1,5 pto



Onde:

$$\sigma_y = -\frac{|N|}{A} - \frac{|M_b|}{I}.\frac{d}{2} = -\frac{4F}{\pi d^2}\left(1 + \frac{16R}{d}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{4}{3}\frac{|V_b|}{A} - \frac{|T|}{J}.\frac{d}{2} = -\frac{16F}{\pi d^2}\left(1 + \frac{6R}{d}\right)$$

2ª Questão

a) Para conhecer as tensões máximas de compressão, tração e cisalhamento, é necessário calcular as tensões principais:

$$[T] = \begin{bmatrix} 34 & -12 & 0 \\ -12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 34-\lambda & -12 & 0 \\ -12 & 41-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 30-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 50MPa \\ \sigma_2 = 30MPa \\ \sigma_3 = 25MPa \end{cases}$$

Como todas as tensões principais são positivas, não há compressão em nenhum plano.

A tensão máxima de tração é σ_1. Assim, o fator de segurança à tração será:

$$FS_t = \frac{150}{\sigma_1} = \frac{150}{50} = 3$$

A tensão máxima de cisalhamento é:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 12{,}5\ MPa$$

Assim, o fator de segurança ao cisalhamento é:

$$FS_\tau = \frac{50}{\tau_{max}} = \frac{50}{12{,}5} = 4$$

O fator de segurança da estrutura no ponto considerado será o menor valor entre os fatores de segurança calculados:

$$FS = \min\{FS_t, FS_\tau\} = \min\{3, 4\} = 3$$

2,0 ptos

b) Os planos em que ocorrem as tensões de cisalhamento máximas são ortogonais a $\vec{n}_2$ e suas normais formam ângulo de 45° com as direções $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$:

$$\vec{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{n}_1 \pm \vec{n}_3)$$

Para calcular essas direções, é necessário calcular primeiro as direções principais:

$$\begin{bmatrix} 34-\lambda_i & -12 & 0 \\ -12 & 41-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 30-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$n_{i,x}^2 + n_{y,i}^2 + n_{z,i}^2 = 1$$

Resultando em

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

$$\vec{n}_2 = (0,0,1)$$

$$\vec{n}_3 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

Assim:

$$\vec{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}(7, -1, 0) \quad \text{e}$$

2,0 ptos

$$\vec{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}(1, 7, 0)$$

3ª Questão

A tensão de tração admissível é:

$$\sigma_{t,adm} = \frac{300}{2} = 150MPa$$

e a tensão de cisalhamento admissível é:

$$\tau_{adm} = \frac{180}{2} = 90MPa$$

Para um vaso de pressão de parede fina, submetido apenas a uma pressão interna, as tensões principais em um ponto da parede são:

$$\sigma_1 = \sigma_C = \frac{pR}{t}$$

$$\sigma_2 = \sigma_L = \frac{pR}{2t}$$

$$\sigma_3 = 0$$

A tensão de tração máxima σ_1. Então, para respeitar o limite de tração admissível, a espessura mínima deverá ser:

$$t = \frac{pR}{\sigma_{t,adm}} = \frac{12 \times 75}{150} = 6mm$$

A tensão de cisalhamento máxima é:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pR}{2t}$$

Assim a espessura mínima que o tubo deve ter, para respeitar a tensão de cisalhamento admissível é:

$$t = \frac{pR}{2\tau_{adm}} = \frac{12 \times 75}{2 \times 90} = 5mm$$

O valor mínimo da espessura que respeita os dois limites é $6mm$.

2,0 ptos