

Ressonância em osciladores mecânicos e elétricos

Esmerindo Bernardes^{1,*}

¹L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo
13560-970 São Carlos, SP, Brazil
(Dated: 18 de Setembro de 2015)

Empregaremos a segunda lei de Newton para estudar o comportamento dinâmico de uma massa presa a uma mola ideal imersa em um fluido. Veremos como esse comportamento dinâmico é descrito pelas equações diferenciais resultantes da segunda lei e ganharemos também conhecimento básicos para lidar com equações diferenciais. Veremos que nosso modelo é capaz de explicar muito bem o comportamento deste sistema massa-mola e de prever o efeito de ressonância, um conhecimento muito importante em engenharias e em física aplicada. Aproveitando a ocasião, estabeleceremos uma analogia completa entre o sistema massa-mola e um circuito elétrico RLC.

CONTENTS

I. Introdução	1
I Osciladores mecânicos	2
II. Oscilador harmônico livre	2
III. Oscilador harmônico amortecido	4
III.1. Amortecimento sub-crítico	4
III.2. Amortecimento super-crítico	5
III.3. Amortecimento crítico	5
III.4. Simulações	6
IV. Oscilador harmônico amortecido e forçado	6
IV.1. Ressonância	8
V. Oscilador harmônico amortecido e forçado II	8
V.1. O efeito da gravidade	8
V.2. O ponto de apoio móvel para a mola	9
II Osciladores Elétricos	10
VI. Conclusões	10
A. Oscilador amortecido sub-crítico	11
B. Números complexos	12

I. INTRODUÇÃO

O oscilador harmônico, bem como suas anarmonias, representa uma classe de sistemas físicos indispensáveis para a compreensão de nossa natureza. Todo objeto, seja ele microscópico ou macroscópico, é capaz de oscilar de alguma

maneira. Os átomos oscilam em torno de suas posições de equilíbrio numa molécula. Podemos citar alguns exemplos de osciladores no nosso cotidiano: amortecedores de automóveis, máquinas de lavar roupas, pontes, edifícios, pêndulos, etc.

Estaremos concentrados aqui em estudar osciladores cujo comportamento dinâmico possa ser explicado pela segunda lei de Newton, no caso de osciladores mecânicos, e pela segunda lei de Kirchhoff, no caso de osciladores elétricos. Há dois sistemas canônicos para aprendermos as principais características dinâmicas compartilhadas por qualquer oscilador: (i) o oscilador formado pelo sistema massa-mola; e (ii) osciladores construídos por circuitos elétricos contendo resistores, capacitores e indutores. Estes estudos nos possibilitarão a compreensão do efeito de ressonância, indispensável ao desenvolvimento de uma tecnologia segura. A compreensão deste efeito possibilitou a construção de edifícios e pontes capazes de suportar as oscilações produzidas pelo vento; possibilitou também a construção de muitos equipamentos de diagnósticos precisos em medicina, como as máquinas de ressonância magnética.

Também teremos aqui mais uma excelente oportunidade de sermos introduzidos ao uso de equações diferenciais. Aqueles que ainda não tiveram este contato, *don't panic!*, sejam pacientes e perseverantes. A brincadeira mais importante é mostrar como certas funções (do tempo neste caso) satisfazem certas equações contendo estas funções e algumas de suas derivadas (equações diferenciais). Como as soluções de equações diferenciais são obtidas é assunto e tarefa de cursos específicos sobre este assunto. No entanto, aprenderemos alguns truques importantes para a compreensão dos métodos formais de resolução de equações diferenciais. Também veremos que o uso de números complexos simplifica muito a nossa vida. Estes números “complexos” deveriam ser denominados de números simplexos.

Na Parte I destas notas, discutiremos a dinâmica de osciladores mecânicos. O oscilador harmônico formado por uma mola ideal e uma massa presa a ela (sistema massa-mola) será estudado na Seção II. Mais uma oportunidade de ver a segunda lei de Newton como uma equação diferencial, cuja solução será a equação horária da massa presa à mola. Na Seção III, acrescentaremos um toque de realidade introdu-

* sousa@ifsc.usp.br

zindo uma força dissipativa modelando o efeito do meio (em geral um fluido) sobre o sistema massa-mola. Para compreendermos o efeito de ressonância, teremos de introduzir uma força externa oscilante atuando sobre a massa do sistema massa-mola. Isto será feito na Seção IV. Na Seção V, a força externa oscilante será aplicada ao ponto de apoio da mola e não na massa presa a mola. Será o momento crítico do nosso texto.

Os osciladores elétricos serão discutidos na Parte II. Lá, estabeleceremos uma analogia completa entre o sistema massa-mola imerso em um fluido e o sistema elétrico formado por um circuito contendo um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C). Esta analogia, estabelecida via lei de Kirchhoff, nos permitirá aproveitar tudo que aprendemos com o sistema massa-mola para entendermos o comportamento de uma carga fluindo no circuito RLC.

Parte I Osciladores mecânicos

II. OSCILADOR HARMÔNICO LIVRE

Na ausência de qualquer força dissipativa, ou seja, considerando uma situação ideal, o movimento de um sistema constituído por uma mola com uma de suas extremidades presa e a outra contendo uma massa constante m é descrito pela segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, onde o ponto sobre o momentum linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ significa a primeira derivada no tempo. Se a mola é ideal, isto é, tem massa desprezível e obedece a lei de Hooke, então a força resultante que entra na segunda lei de Newton numa equação diferencial para a função (equação horária) que descreve a variação da posição da massa no tempo. Veja o significado disto.

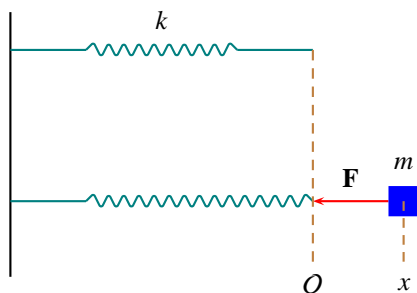


Figura 1. Sistema massa-mola ideal. O representa a origem do sistema de coordenadas (mola sem deformação) e x representa a posição da massa m e também a deformação da mola. k é a constante que caracteriza o poder de deformação da mola.

Suponha que o nosso sistema massa-mola esteja livre de forças externas e de contato com uma superfície de apoio, como representado na Figura 1. Suponha também que \hat{i} seja um versor apontando da esquerda para a direita na direção da deformação da mola. Para uma mola ideal de constante de mola k , deformada por um comprimento x (medido em

relação à origem O do sistema de coordenadas da Figura 1), a lei de Hooke nos diz que a força agindo sobre a massa é $\mathbf{F} = -kx\hat{i}$. Verifique que o sentido desta força elástica estará sempre correto para valores positivos ou negativos de x . A força elástica sempre tentará desfazer a deformação produzida na mola. Por isto, ela é conhecida como uma força restauradora. Numa situação ideal, permitiremos apenas a ação da força elástica sobre a massa m . Do jeito que construímos nosso sistema de coordenadas, a deformação da mola também mede a posição do centro de massa do nosso objeto preso à mola. Assim, seu vetor posição será $\mathbf{r} = x\hat{i}$. Suponha que esta posição aconteça num tempo qualquer t . Então a posição da massa é uma função do tempo. Consequentemente, o momentum linear da massa m é $\mathbf{p} = m\dot{x}\hat{i}$ e a segunda lei de Newton pode ser escrita explicitamente em nosso sistema de coordenadas,

$$\mathbf{F} = -kx\hat{i} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{x}\hat{i}. \quad (1)$$

Como uma igualdade entre vetores só é possível se cada componente obedecer a mesma igualdade, então

$$-kx = m\ddot{x} \quad (2)$$

é uma equação que envolve a função $x(t)$ e a sua derivada segunda $\ddot{x}(t)$. Por isto ela é denominada de equação diferencial. Note também que a ordem da derivada mais alta é dois. Por isto, a equação diferencial (2) é classificada como de segunda ordem. Além disto, note que a função $x(t)$ e suas derivadas entram na Eq. (2) de forma linear. Por isto, a equação diferencial (2) é classificada como linear. Por fim, note que a função $x(t)$ a ser determinada depende somente de uma única variável, o tempo t . Por isto, a equação diferencial (2) é classificada como ordinária (no bom sentido). Assim, a Eq. (2) é uma equação diferencial ordinária (EDO), de segunda ordem e linear. Sabendo disto, nossa tarefa a seguir é determinar a função $x(t)$ que satisfaz a equação diferencial (2), dado algumas informações adicionais.

Teorema: uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e linear admite uma solução única se duas condições iniciais (informações adicionais) forem conhecidas, por exemplo, posição inicial $x(0) = x_0$ e velocidade inicial $\dot{x}(0) = v_0$. Por comodidade, é melhor dividirmos a EDO (2) pela massa m ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (3)$$

Podemos notar imediatamente nesta equação que a constante nova ω_0 tem dimensão de inverso do tempo (frequência). Assim, ela será denominada de frequência natural deste sistema massa-mola. Melhor regra para se resolver uma EDO: adivinhar a solução! Certamente nossos conhecimentos sobre derivadas ajudará muito. A EDO (3) está nos perguntando: quem é a função (ou funções) que ao ser derivada duas vezes volta nela mesma?, a menos de uma constante multiplicativa real negativa. Basta lembrar das funções trigonométricas elementares, também conhecidas por funções harmônicas, e da exponencial. Vamos experimentar a função cosseno,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (4)$$

onde as duas constantes arbitrárias, A e ϕ , são conhecidas por amplitude e constante de fase.¹ Verifique que a solução (4) satisfaz plenamente a EDO (3) para quaisquer valores de A e ϕ . Outro teorema sobre EDOs: cada solução deve conter um número de constantes arbitrárias igual à ordem da EDO. Verifique também que estas constantes arbitrárias A e ϕ são determinadas em termos das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ na forma

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2, \quad \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (5)$$

Assim, dado as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, a equação horária (4) fica unicamente determinada.

Qual é a interpretação mecânica da equação horária (4)? Primeiro, podemos ver de (4) que a posição x do nosso objeto pertence ao intervalo fechado $[A, -A]$. A constante A é denominada de amplitude. Segundo, a função cosseno é periódica. Assim, o movimento representado pela equação horária (4) é periódica de período $\tau = 2\pi/\omega_0$.² Isto significa que $\omega_0 = 2\pi f$, onde $f = 1/\tau$ é frequência (expressa em inverso de segundos ou Hertz). Assim, devemos chamar ω_0 de frequência angular (expressa em radianos por segundo). Um movimento que é periódico e limitado num certo intervalo é denominado de oscilatório. Desta forma, a equação horária (4) representa o movimento de um oscilador ideal. Como a frequência (angular) deste oscilador é ω_0 , definida na Eq. (3), o movimento é denominado de harmônico (descrito por funções harmônicas).

Para completar, precisamos fazer algumas considerações sobre a energia mecânica (cinética + potencial) deste sistema. A energia cinética é a parcela que depende apenas da velocidade, $K = mv^2/2$. Ao contrário da energia cinética, a energia potencial é definida somente para forças que podem ser derivadas (em todos os sentidos) de uma função da posição, sem uma dependência explícita do tempo e/ou da velocidade, a qual é denominada de energia potencial. No caso da força elástica dada pela lei de Hooke, em coordenadas, $\mathbf{F} = -kx\hat{i}$, note que $F_x = kx$ é a derivada de $V(x) = kx^2/2$, e que o vetor força é obtido multiplicando esta derivada espacial pelo versor $-\hat{i}$. Esta operação de derivar e multiplicar por um versor é conhecida por “gradiente”, denotada por ∇ .³ Assim, podemos dizer que a lei de Hooke é derivada da função (energia) potencial $V(x) = kx^2/2$ via a operação gradiente,

$$\mathbf{F} = -\nabla V(x) = -\hat{i} \frac{d}{dx} V(x) = -\hat{i} \frac{d}{dx} \frac{1}{2} kx^2 = -kx\hat{i}. \quad (6)$$

Note que temos a liberdade de somar uma constante arbitrária à energia potencial. Assim, a referência para medirmos energia potencial pode ser escolhida arbitriamente. No caso, escolhemos $V = 0$ em $x = 0$ (mola sem deformação), mas

podemos mudar esta escolha a vontade. Note também que a função $V(x) = kx^2/2$ não contém uma dependência explícita do tempo, embora a equação horária $x = x(t)$ seja uma função do tempo, cuja forma específica dependerá das condições iniciais dadas em (3). As forças que são derivadas da energia potencial, como a força elástica de Hooke, são denominadas de “forças conservativas”.

Uma consequência importante da presença de apenas forças conservativas em um sistema mecânico é a conservação da energia mecânica. Podemos verificar diretamente esta lei de conservação em nosso sistema massa-mola,

$$E = K + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2, \quad (7)$$

onde usamos a forma explícita da equação horária (4) para $x(t)$ (verifique). Portanto, a energia mecânica média,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} E(t) dt, \quad (8)$$

também é constante no tempo. Naturalmente, para que esta energia mecânica permaneça constante, deve haver uma troca harmônica entre energia cinética e potencial. Isto significa que, mesmo embora não haja qualquer troca de energia entre este sistema (massa–mola) e o meio (não há forças externas e nem dissipações), há uma troca de energia internamente entre a massa m e a mola k . É muito interessante ver esta troca de energia na forma de potência cinética instantânea (variação de energia cinética no tempo),

$$P(t) = \frac{dK}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x} = -\frac{1}{2} k\omega_0 A^2 \sin(2\omega_0 t + 2\phi). \quad (9)$$

Note que o período desta expressão é a metade do período da equação horária (4). Note também que potência cinética instantânea é igual ao produto da força elástica ($-kx$) pela velocidade (\dot{x}), ou seja, $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (produto escalar).

A Figura 2 mostra a equação horária para um oscilador harmônico com a frequência natural $\omega_0 = 2\pi$ rad/s. Estamos assumindo uma amplitude $A = 1$ m. As condições iniciais são $x_0 = 1$ m e $v_0 = 0$ (não se preocupe com estes valores nada realistas). A massa m e a constante de mola k não estão especificadas, porém sempre podemos escrever $k = m\omega_0^2$ e deixar tudo em função da massa, como as energias mostradas na Figura 2. Note a troca harmônica de papéis entre a energia cinética $K(t)$ e a energia potencial $V(t)$ para que a energia mecânica $E(t)$ permaneça constante.

¹ A “fase” é o argumento da função trigonométrica, ou seja, $\theta(t) = \omega_0 t + \phi$.

² Sendo $x(t)$ periódica de período τ , então $x(t + \tau) = A \cos(\theta + \omega_0 \tau) = x(t) = A \cos(\theta)$, onde $\theta = \omega_0 t + \phi$. Como a função cosseno tem período 2π , então $\omega_0 \tau = 2\pi$.

³ Em coordenadas cartesianas, o operador gradiente é escrito como $\nabla = \hat{i} \frac{d}{dx} + \hat{j} \frac{d}{dy} + \hat{k} \frac{d}{dz}$, onde \hat{j} e \hat{k} são os outros dois versores ao longo dos demais eixos ortogonais.

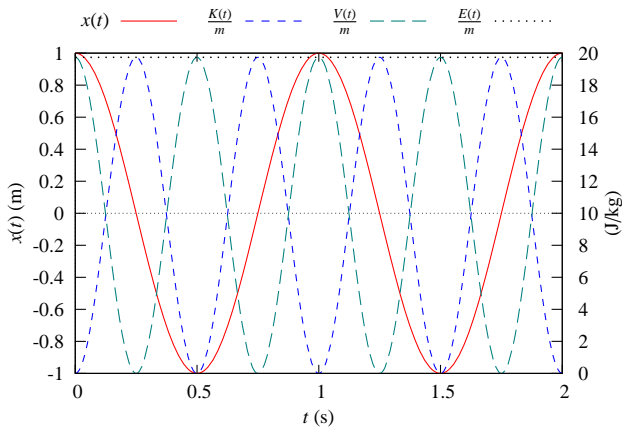


Figura 2. Equação horária $x(t)$ dada em (4) para as condições iniciais $x_0 = 1$ m, $v_0 = 0$ e frequência $\omega_0 = 2\pi$ rad/s. As energias cinética $K(t)$, potencial $V(t)$ e mecânica $E(t) = K(t) + V(t)$ estão divididas pela massa arbitrária m .

O movimento ideal previsto pela equação horária (4) pode ser observado no laboratório usando um sistema massa-mola montado sobre um trilho de ar horizontal. Como este sistema movimenta-se sobre uma suave camada de ar, há uma enorme minimização do efeito de atrito entre a massa e seu apoio. Além disto, a força externa da gravidade sendo perpendicular ao movimento do oscilador somente interage com ele via força de atrito que foi drasticamente minimizada pelo trilho de ar. Mesmo assim esta situação ainda não é exatamente a ideal, mas podemos perceber uma forte semelhança com o caso ideal (sistema massa-mola no vácuo e livre de forças externas). No entanto, mesmo usando um trilho de ar, a amplitude do movimento harmônico diminui com o tempo. Este tempo de espera para vermos uma alteração significativa na amplitude diminui muito se consideramos um sistema massa-mola na vertical. Como podemos explicar estes efeitos é o assunto da próxima seção.

III. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Suponha que a massa m do sistema massa-mola anterior esteja imersa em um determinado fluido, como o ar atmosférico ou água ou óleo. Neste caso, devemos saber modelar a interação do sistema massa-mola com o fluido. É esta interação que explica a diminuição da amplitude com o tempo (um efeito denominado de amortecimento) vista no laboratório. Numa primeira aproximação, para corpos com um volume pequeno, como uma bolinha de gude, esta interação com o fluido pode ser modelada matematicamente por uma força proporcional à velocidade, $-b\mathbf{v}$, onde b é uma constante característica do fluido, conhecida como constante de amortecimento. Esta constante b tem o mesmo papel da constante de mola: é estritamente positiva e seu valor quantifica a viscosidade do fluido (b é muito pequena para o ar atmosférico e igual a zero para o vácuo). Quem pratica natação, conhece muito bem esta força (embora pudesse nunca ter pensado nela matematicamente, como agora). Esta força viscosa $-b\mathbf{v}$ é restauradora ($b > 0$), pois tem sempre o sentido oposto à ve-

locidade. Ainda mais, sua intensidade é proporcional à intensidade da velocidade, ou seja, quanto mais rápido tentamos correr dentro d'água, mais difícil é. Já experimentou esta sensação?

Até aqui, há duas forças atuando na massa m em nosso sistema massa-mola: a força elástica $\mathbf{F}_e = -k\mathbf{r}$, onde $\|\mathbf{r}\|$ representa a deformação da mola e \mathbf{r} representa o vetor posição da massa m , e a força viscosa $\mathbf{F}_v = -b\mathbf{v} = -b\dot{\mathbf{r}}$. A primeira modela a mola ideal (de constante k) e a segunda modela o fluido (de constante b). Como curiosidade, note que $k\mathbf{F}_v = b\mathbf{F}_e$. Veremos mais adiante que este fato impedirá que a força viscosa seja uma força conservativa. Portanto esperamos que o sistema massa-mola apresente uma perda de energia mecânica para o meio. Isto explicará o efeito de amortecimento, ou seja uma diminuição da amplitude com o tempo. Veremos também que nosso modelo matemático explicará muito bem este efeito.

Assim, a força resultante atuando em nosso objeto de massa m no sistema massa-mola imerso em um fluido é $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_v$. Desta forma, usando o mesmo sistema de coordenadas da Figura 1, a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (10)$$

onde já aplicamos a condição de igualdade entre vetores (verifique). Dividindo esta equação pela massa m , introduzindo as constantes apropriadas, teremos de resolver a equação diferencial

$$\ddot{x} + 2\omega_1\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_1 = \frac{b}{2m}, \quad (11)$$

para determinarmos a equação horária $x(t)$ da massa m nesta nova situação (imersa em um fluido). As condições iniciais podem ser as mesmas, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Note que a constante $\omega_1 = b/2m$ tem dimensão de frequência. O fator dois foi introduzido por comodidade, como veremos mais adiante.

Neste caso, é mais conveniente escrevermos a solução geral da equação diferencial (11) em termos de exponenciais (verifique),

$$x(t) = e^{-\omega_1 t} (C_+ e^{+\Omega' t} + C_- e^{-\Omega' t}), \quad \Omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \quad (12)$$

onde C_{\pm} são as duas constantes arbitrárias, as quais devem ser determinadas através das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ (verifique),

$$C_{\pm} = \frac{1}{2\Omega'} \left[(\Omega' \pm \omega_1)x_0 \pm v_0 \right]. \quad (13)$$

Devido à forma de Ω' em (12), devemos considerar três casos separadamente: (1) $\omega_1 < \omega_0$ (Ω' imaginário; amortecimento sub-crítico), (2) $\omega_1 = \omega_0$ ($\Omega' = 0$; amortecimento crítico) e (3) $\omega_1 > \omega_0$ (Ω' real; amortecimento super-crítico).

III.1. Amortecimento sub-crítico

Neste caso, $\omega_1 < \omega_0$. Assim é melhor redefinirmos a constante Ω' para

$$\Omega' = i\Omega, \quad i^2 = -1, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \quad (14)$$

Levando em conta que $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, após um pouco de simplificações, a equação horária em (12) pode ser reescrita como (verifique)

$$x_{sb}(t) = e^{-\omega_1 t} \left[x_0 \cos(\Omega t) + (\omega_1 x_0 + v_0) \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right] \quad (15)$$

Usando $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, com $a = \Omega t$, $\cos(b) = x_0$ e $\sin(b) = -(\omega_1 x_0 + v_0)/\Omega$, a equação horária (15) pode ser reescrita numa forma mais compacta (verifique),

$$x_{sb}(t) = A(t) \cos(\Omega t + \phi), \quad (16)$$

onde agora a amplitude $A(t)$ é dependente do tempo e a constante de fase ϕ continua constante,

$$A(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + 2\omega_1 x_0 v_0 + v_0^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}} e^{-\omega_1 t}, \quad (17)$$

$$\tan \phi = -\frac{\omega_1 + v_0/x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}}. \quad (18)$$

A equação horária (16) é reobtida por meios mais “físicos” no Apêndice A. As observações lá feitas são muito úteis para aqueles que estão iniciando seus estudos em equações diferenciais e querem uma abordagem inicial menos formal.

Note que a equação horária (16) é harmônica, com a frequência angular $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$, a qual é ligeiramente menor que a frequência natural ω_0 . Além disso, ela tem uma amplitude exponencialmente decrescente no tempo, cuja taxa de decrescimento é dada por $\omega_1 = b/2m$, ou seja, pela viscosidade do meio. Podemos notar também que os limites das expressões dadas nas Eqs. (17)–(18) quando $\omega_1 \rightarrow 0$, isto é, na ausência do meio viscoso, coincidem com os valores obtidos para estas mesmas constantes em (5), como esperado. Portanto, a equação horária (16) apresenta todas as características que observamos no sistema massa-mola em condições normais em nosso laboratório.

É importante observarmos que energia potencial elástica é definida somente para a força elástica, a qual é conservativa. Em geral, forças que dependem explicitamente do tempo e/ou dependem da velocidade não são conservativas. A força viscosa é um exemplo de força não-conservativa. Em geral, a presença de uma força não-conservativa implica numa energia mecânica (cinética + potencial) variando no tempo. Podemos verificar isto, calculando a derivada da energia mecânica $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ (sem usar a dependência de x explicitamente no tempo),

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(-kx - b\dot{x}) + kx\dot{x} = -b\dot{x}^2, \quad (19)$$

onde usamos a EDO (10) para simplificarmos o resultado. Note que esta potência instantânea é dependente do tempo e estritamente negativa, evidenciando que a energia mecânica está diminuindo no tempo. Mais do que isto, note que na última igualdade em (19) temos $-b\dot{x}^2 = \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v}$, que é a expressão para a potência instantânea associada à força viscosa. Como acreditamos na conservação da energia total, então $-\mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v}$ deve representar a taxa de absorção de energia pelo meio (o fluido).

III.2. Amortecimento super-crítico

O amortecimento é super-crítico quando $\omega_1 > \omega_0$, ou seja $\Omega' > 0$ em (12). Levando esta condição na equação horária geral (12), podemos ver que neste caso a massa m não oscila, pois a equação horária contém apenas exponenciais reais. A equação horária (12) com $\Omega' > 0$ pode ser simplificada um pouquinho com a ajuda de funções hiperbólicas,

$$x_{sp}(t) = e^{-\omega_1 t} \left[x_0 \cosh(\Omega' t) + (\omega_1 x_0 + v_0) \frac{\sinh(\Omega' t)}{\Omega'} \right], \quad (20)$$

onde $\Omega' = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} > 0$ e

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (21)$$

III.3. Amortecimento crítico

O amortecimento é crítico quando $\omega_1 = \omega_0$, ou seja, $\Omega' = 0$ em (12). Devemos tomar certos cuidados ao fazermos $\omega_1 = \omega_0$ nas Eqs. (12)–(13), pois aparentemente há indefinições. Se partirmos do caso sub-crítico, $\omega_1 - \omega_0 \rightarrow 0^-$, então a equação horária é a Eq. (15), a qual envolve o limite fundamental (pensaram que iam escapar dele?!)

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{\Omega} t)}{\sqrt{\Omega}} = t. \quad (22)$$

Por outro lado, se partimos do caso super-crítico, $\omega_1 - \omega_0 \rightarrow 0^+$, então a equação horária é a Eq. (20), a qual também envolve o limite fundamental (hiperbólico)

$$\lim_{\Omega' \rightarrow 0} \frac{\sinh(\sqrt{\Omega'} t)}{\sqrt{\Omega'}} = t. \quad (23)$$

Assim, a equação horária para o caso crítico, é obtida através dos limites

$$x_{cr}(t) = \lim_{\omega_1 - \omega_0 \rightarrow 0^-} x_{sb}(t) = \lim_{\omega_1 - \omega_0 \rightarrow 0^+} x_{sp}(t) = e^{-\omega_0 t} [x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0)t], \quad (24)$$

mostrando que o sistema massa-mola não oscila, mesmo quando a mola está deformada de x_0 e a massa é solta com uma velocidade inicial v_0 . Neste caso, a massa simplesmente retorna à posição de equilíbrio sem oscilar. Esta é uma situação muito difícil de ser vista com base na tentativa e erro e é até mesmo inesperada. Isto mostra que nosso modelo está sendo útil, pois além de explicar uma situação bem conhecida (amortecimento sub-crítico), ele nos oferece efeitos novos, como os amortecimentos críticos e super-críticos. Estes conhecimentos foram fundamentais para o desenvolvimento da indústria bilionária dos amortecedores. Hoje, com a fabricação de novos materiais, a viscosidade do meio pode ser controlada eletromagneticamente, criando amortecedores realmente muito eficazes, capazes de mudar em tempo real seu desempenho de acordo com a situação. Conhecimento a serviço da tecnologia.

III.4. Simulações

A Figura 3 exibe uma equação horária típica para cada uma das três situações possíveis. Para o amortecimento sub-crítico ($\omega_1 < \omega_0$) discutido na Sec. III.1, com a equação horária (16), escolhemos $\omega_0 = \sqrt{65} \pi/4$ rad/s e $\omega_1 = \pi/4$ rad/s. Esta escolha faz com que a frequência de oscilação Ω em (14) seja exatamente 2π rad/s, como pode ser visto na Figura 3 (verifique). Para o amortecimento super-crítico discutida na Sec. III.2, com a equação horária (20), mantivemos $\omega_0 = \sqrt{65} \pi/4$ rad/s e escolhemos $\omega_1 = 3\pi$ rad/s. Para o amortecimento crítico, com a equação horária (24) discutida na Sec. III.3, mantivemos $\omega_0 = \omega_1 = \sqrt{65} \pi/4$ rad/s. As condições iniciais foram as mesmas para os três casos, $x_0 = 1$ m e $v_0 = 0$ (repouso).

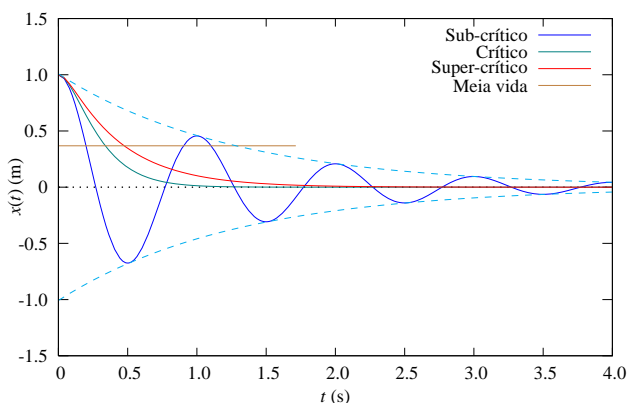


Figura 3. Equações horárias típicas para um oscilador amortecido com as condições iniciais $x_0 = 1$ m e $v_0 = 0$. Nos três casos, a frequência natural foi mantida em $\omega_0 = \sqrt{65} \pi/4$ rad/s. No caso super-crítico, a frequência do amortecimento foi $\omega_1 = 3\pi$ rad/s e $\omega_1 = \pi/4$ rad/s no caso sub-crítico. As linhas tracejadas correspondem aos valores da amplitude $A(t)$ em (16).

As linhas tracejadas na Figura 3 correspondem aos valores positivos e negativos da amplitude dependente do tempo $A(t)$ dada em (16). Também está indicado na mesma figura a posição relativa dos tempos de meia vida (tempo τ_m que a amplitude leva para diminuir por um fator igual $1/e = 0.36788$), os quais são $\tau_m = 0.3389$ s para o amortecimento crítico e $\tau_m = 0.4751$ s para o amortecimento super-crítico. O tempo de meia vida do caso crítico é sempre menor que o tempo de meia vida do caso super-crítico.

A Figura 4 mostra a energia mecânica $2E(t) = m\dot{x}^2 + kx^2$, a energia cinética $2K(t) = m\dot{x}^2$ e a energia dissipada $E_d(t) = -\int \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v} dt$, todas por unidade de massa, para o amortecimento sub-crítico mostrado na Figura 3. É interessante observar o comportamento da energia mecânica e da energia cinética. Toda vez que a energia potencial se iguala à energia mecânica, a energia cinética tem de se anular, o que significa velocidade nula. Observando as curvas de energia cinética (curva verde-azulada) e da equação horária (linha tracejada), vemos que os zeros na energia cinética correspondem aos pontos extremos na equação horária, os quais são denominados de “pontos de retorno”. Evidentemente, pontos de retorno ocorrem somente em movimentos oscilatórios. Note também que

a energia mecânica apresenta pequenos platôs (derivada quase nula) nos pontos de retorno.

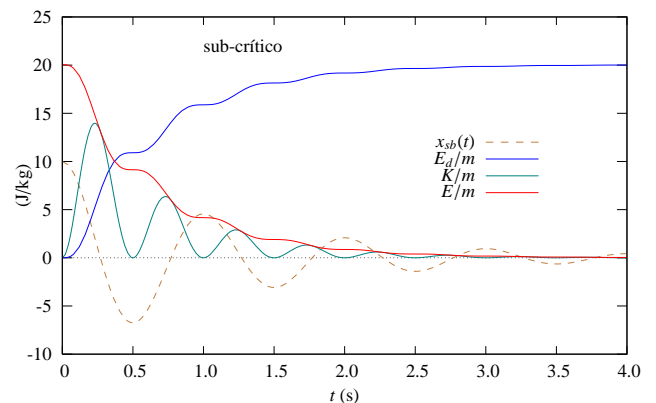


Figura 4. Energia mecânica (cinética + potencial) por unidade de massa, E/m , energia cinética por unidade de massa, K/m , e energia dissipada por unidade de massa, E_d/m , para um oscilador com amortecimento sub-crítico ($\omega_0 = \sqrt{65} \pi/4$ rad/s e $\omega_1 = \pi/4$ rad/s).

IV. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E FORÇADO

Vimos na Sec. III.3 que um oscilador (amortecido) perde energia para o meio em que ele está. Como consequência, a amplitude do movimento diminui com o passar do tempo. Além disso, a frequência das oscilações é menor que a frequência natural. Podemos estudar agora o comportamento de um oscilador amortecido na presença de uma força externa, também oscilante, capaz de injetar energia no sistema massa-mola. Como podemos ver na Figura 4, a energia mecânica inicial do oscilador é transferida rapidamente para o meio. Ao mesmo tempo, a força externa transfere energia para a massa presa à mola. Neste intervalo inicial de tempo, conhecido por “transiente”, a dinâmica da massa presa à mola pode ser bastante irregular. No entanto, após o regime transiente pode haver um “acordo” entre a perda e o ganho de energia pela massa presa à mola de tal forma a proporcionar novamente um movimento harmônico. Esta situação, caso ela exista, deve ser descrita por alguma equação horária que seja uma possível solução da EDO resultante da segunda lei de Newton.

Vamos supor que a força externa oscilante seja da forma $\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_e t)$, com $\mathbf{F}_0 = F_0 \hat{i}$. Usamos o mesmo sistema de coordenadas mostrado na Figura 1. Não esqueça que esta força externa é aplicada na massa presa à mola, enquanto a outra extremidade da mola permanece fixa, como mostrado na Figura 1. Assim, a força resultante na massa m é a soma de três forças: elástica, viscosa e força externa oscilante. Portanto, a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_o = [-kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_e t)] \hat{i} = m\ddot{x} \hat{i}. \quad (25)$$

A equação horária $x(t)$ para a posição da massa m é uma solução da EDO resultante da igualdade vetorial (25),

$$\ddot{x}(t) + 2\omega_1 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = (F_0/m) \cos(\omega_e t), \quad (26)$$

onde as constantes $\omega_0^2 = k/m$ e $\omega_1 = b/2m$ foram introduzidas. Esta é a EDO que descreve o comportamento do nosso oscilador amortecido e “forçado”, como ele é denominado.

Note que esta EDO (26) difere daquela dada em (11), a qual descreve o comportamento de oscilador amortecido, pela presença de um termo contendo uma dependência explícita do tempo. A EDO (11) é classificada como “homogênea”, enquanto que a EDO (26) é “não-homogênea”. Há um teorema para uma EDO não-homogênea como a (26) que diz que a sua solução mais geral é composta pela solução geral da parte homogênea e de uma solução particular da EDO completa (não-homogênea). A EDO (11) é a parte homogênea da EDO (26). Vimos na Sec. III que a solução geral da parte homogênea apresenta uma dependência decrescente no tempo [veja a Eq. (12)], aliás decresce exponencialmente no tempo, ou seja, muito rápido. Aquela equação horária dada em (12) representa o regime transiente do nosso oscilador amortecido e forçado.

Como o regime transiente dura pouco, vamos buscar uma solução particular que seja harmônica e que tenha uma amplitude constante no tempo,

$$x(t) = A \cos \theta, \quad \theta = \omega t + \phi, \quad (27)$$

onde esperamos que a amplitude A , a frequência ω e a constante de fase ϕ dependam de ω_0 , ω_1 , ω_e e F_0 (todos reais). A solução (27) representa o regime “estacionário” (depois do regime transiente). A forma mais eficiente de mostrarmos que a função (27) pode satisfazer a EDO (26) é seguindo os mesmos passos do final do Apêndice A, isto é, fazendo uso do plano complexo (veja o Apêndice B). A equação horária (27) pode ser vista como a parte real de uma função complexa $z(t)$ tal que (verifique)

$$z(t) = A e^{i\theta(t)}, \quad \dot{z} = i\omega A e^{i\theta}, \quad \ddot{z} = -\omega^2 A e^{i\theta}, \quad (28)$$

e a EDO (26) torna-se (verifique)

$$\ddot{z}(t) + 2\omega_1 \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_e t}. \quad (29)$$

Substituindo (28) na EDO (29) obtemos (verifique)

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\omega_1\omega)] A e^{i\theta(t)} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_e t}. \quad (30)$$

Note que a EDO tornou-se em uma igualdade entre dois números complexos. Antes de tirarmos proveito disto é preciso perceber que o lado esquerdo da Eq. (30) contém o produto de dois números complexos, $(\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\omega_1\omega)$ e $A e^{i\theta(t)}$, sendo que um deles ($A e^{i\theta(t)}$) já está na forma polar (módulo vezes a fase; veja o Apêndice B). Precisamos colocar o outro também na forma polar (verifique),

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\omega_1\omega) = B e^{i\delta}, \quad (31)$$

onde

$$B = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega_1\omega)^2}, \quad \tan \delta = \frac{2\omega_1\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (32)$$

Assim, a Eq. (30) torna-se em (verifique)

$$A B e^{i(\delta+\phi)} e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_e t}. \quad (33)$$

Esta igualdade somente é possível se houver uma igualdade também entre os módulos e as fases, para qualquer instante de tempo, ou seja, somente se

$$A B = \frac{F_0}{m}, \quad \omega = \omega_e, \quad \phi = -\delta. \quad (34)$$

Isto determina univocamente as três constantes arbitrárias que introduzimos na equação horária proposta em (27) e mostra (prova) que ela é uma solução particular (independente de condições iniciais) da EDO (26) que descreve o oscilador amortecido e forçado. As duas últimas igualdades em (34) são decorrentes da igualdade entre os polinômios temporais $\delta + \phi + \omega t$ e $\omega_e t$ contidos nas fases.

Vale a pena estudar como a amplitude A depende dos parâmetros ω_0 , ω_1 , ω_e e F_0 ,

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\omega_1\omega_e)^2}}. \quad (35)$$

A frequência angular natural ω_0 está fixa para um dado sistema massa-mola assim como ω_1 representando o meio contendo este sistema. Podemos fixar a intensidade F_0 da força externa oscilante e mudar a vontade sua frequência ω_e . Por isto escrevemos $A(\omega_e)$ em (35). Agora vamos estudar o comportamento da amplitude (35) em função da frequência ω_e da força externa. Como a raiz no denominador da Eq. (35) contém toda a dependência com ω_e , seus extremos (pontos de máximos e mínimos) darão também informações sobre os extremos da amplitude $A(\omega_e)$. A derivada primeira do denominador é (verifique)

$$\frac{d}{d\omega_e} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\omega_1\omega_e)^2} = \frac{4\omega_e[2\omega_1^2 - (\omega_0^2 - \omega_e^2)]}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\omega_1\omega_e)^2}}. \quad (36)$$

Esta derivada se anula para os valores $\omega_e = 0$ e $\omega_e = \omega_r$ (verifique), onde

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_1^2}, \quad \omega_0 > \sqrt{2}\omega_1. \quad (37)$$

Note que a frequência externa ω_e é um número real e, portanto, devemos ter $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$. Naturalmente, a solução $\omega_e = 0$ não nos interessa, pois significaria aplicar uma força constante na massa m . No entanto, a solução não-nula $\omega_e = \omega_r$, com ω_e dada em (37), faz com que a amplitude (35) exiba um ponto de máximo.⁴ A frequência ω_e é conhecida por frequência de ressonância.

⁴ Você pode provar esta afirmativa calculando a derivada segunda do denominador da amplitude e verificando que ela é positiva, ou seja, o denominador passa por um ponto de mínimo.

Naturalmente, medindo o valor da frequência de ressonância ω_r , podemos obter o valor da amplitude F_0 da força externa oscilante ou o valor de ω_1 (caso F_0 seja conhecido). Isto é possível porque a frequência de ressonância (37) fornece o ponto onde a amplitude (35) é máxima (verifique)

$$A(\omega_r) = \frac{F_0/m}{2\omega_1 \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}}. \quad (38)$$

Podemos ver que ω_0 precisa ser maior que ω_1 para que a raiz no denominador da amplitude (38) seja um número real. Note que esta condição já é satisfeita pela condição $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$ encontrada na Eq. (37).

IV.1. Ressonância

Descobrimos então que a amplitude possui um máximo quando a frequência da força externa oscilante é ajustada para coincidir com valor dado em (37) e a condição $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$ é satisfeita. Este aumento no valor da amplitude como função da frequência ω_e da força externa oscilante é um efeito muito importante, denominado de “ressonância”. Note também que a condição $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$ também é a condição para o movimento ser sub-crítico.

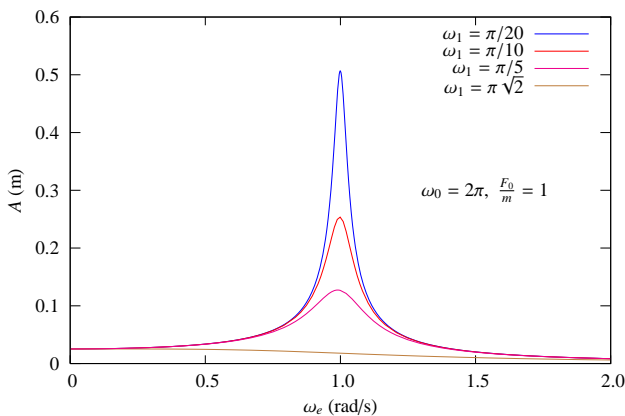


Figura 5. Efeito de ressonância na amplitude de um oscilador amortecido e forçado para diferentes meios caracterizados por ω_1 (em rad/s).

A Figura 5 exibe este efeito para três meios diferentes, caracterizados pelos valores $\pi/20$, $\pi/10$ e $\pi/5$ de $\omega_1 = b/2m$. Note que para um amortecimento pequeno como $\omega_1 = \pi/20$ rad/s, a amplitude tem o seu máximo mais acentuado e que a frequência de ressonância ocorre em $\omega_e = 1.99875\pi$ rad/s, um valor muito próximo da frequência natural $\omega_0 = 2\pi$ rad/s. Caso este experimento seja realizado no vácuo ($\omega_1 = 0$) então a ressonância ocorreria exatamente em $\omega_e = \omega_0$, como podemos ver em (37), e o valor da amplitude (38) seria infinito. O ar atmosférico tem uma viscosidade muito baixa, quase próxima de zero. Isto explica por que pontes podem exibir este efeito de ressonância, podendo ser destruídas completamente, como já ocorreu no passado. Este efeito é muito importante nas Engenharias Mecânica e

Cívil. Por isso, sejam cuidadosos com os sistemas massa-mola ao ar livre em nossos laboratórios, pois caso a condição de ressonância aconteça, eles podem ser danificados e/ou ferir alguém.

Note na Figura 5 que não há ressonância para $\omega_1 = \sqrt{2}\pi$. Isto é fácil de entendermos. Como a frequência natural é $\omega_0 = 2\pi$, então $\omega_0 = \sqrt{2}\omega_1$ e a condição $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$ não é satisfeita, portanto não pode haver ressonância.

V. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E FORÇADO II

V.1. O efeito da gravidade

É comum encontrarmos arranjos experimentais onde o sistema massa-mola é usado na vertical, como mostrado na Figura 6, portanto imerso naturalmente em nosso ar atmosférico. Neste caso há também a força gravitacional atuando na massa presa à mola. No entanto, como a força gravitacional é praticamente constante no local do experimento, ela simplesmente leva a massa para uma nova posição de equilíbrio [ilustração (b) na Figura 6], $k(x_e - L) = mg$, onde k é a constante característica da mola ideal (obedecendo a lei de Hooke), m é a massa presa à mola, L é o comprimento natural da mola, g é o módulo da aceleração da gravidade e $x_e = L + mg/k$ é a posição de equilíbrio. Depois que o movimento inicial cessa, a massa fica em repouso na posição de equilíbrio. Assim, qualquer deformação subsequente da mola faz com que todos os movimentos deste oscilador passam a ocorrer em torno da posição de equilíbrio [ilustração (c) na Figura 6]. Precisamos verificar se a gravidade produz alguma mudança na frequência destes movimentos.

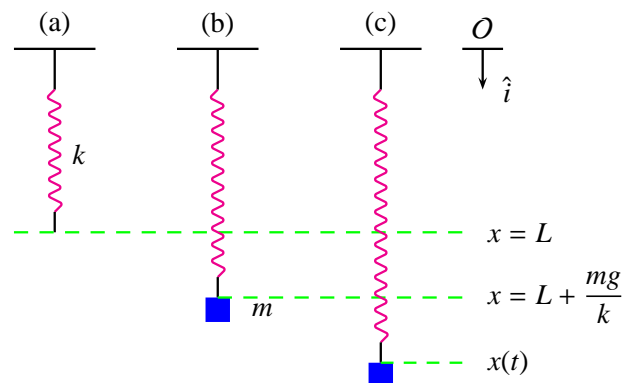


Figura 6. Sistema massa-mola na vertical na presença de gravidade. (a) mola ideal sem a massa. (b) Sistema massa-mola+gravidade em equilíbrio. (c) Sistema massa-mola fora do equilíbrio. O representa a origem do nosso sistema de coordenadas.

Para verificarmos se a presença do campo gravitacional altera a frequência do movimento oscilatório podemos ignorar a presença da atmosfera, por simplicidade. Temos então um oscilador livre na presença do campo gravitacional. Usando o sistema de coordenadas O indicado na Figura 6, a força elástica agindo na massa m será $F_e = -k(x - L)\hat{i}$. Assim, a

força resultante pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g = -k(x - L)\hat{\mathbf{i}} + mg\hat{\mathbf{i}} = m\ddot{x}\hat{\mathbf{i}}. \quad (39)$$

A EDO que resulta desta segunda lei de Newton é

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - (\omega_0^2 L + g) = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (40)$$

Note que no equilíbrio não há movimento, portanto $\ddot{x} = 0$ e, conseqüentemente, $x = L + g/\omega_0^2 = L + mg/k$, ou seja, recuperamos a posição de equilíbrio encontrada previamente. Note também que esta EDO difere daquela EDO (3) do oscilador livre apenas por um termo constante. Isto sugere uma mudança na variável dependente $x(t)$ da forma

$$y(t) = x(t) - \left(L + \frac{g}{\omega_0^2} \right), \quad \ddot{y} = \ddot{x}. \quad (41)$$

Note que esta mudança de variável corresponde a uma mudança da origem do sistema de coordenadas O do ponto de apoio da mola para a posição de equilíbrio, pois $y = 0$ implica em $x = x_e$ (a posição de equilíbrio). Desta forma, a EDO (40) pode ser reescrita como $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ (verifique), que é idêntica à EDO (3), ou seja, representa um movimento harmônico com a frequência natural ω_0 . Portanto a gravidade não interfere na frequência de oscilação, ela apenas desloca a posição em torno da qual o movimento oscilatório passa a ocorrer. Quando colocamos o sistema massa-mola num fluido, a gravidade novamente apenas irá deslocar a posição em torno da qual o movimento oscilatório irá ocorrer.

V.2. O ponto de apoio móvel para a mola

É muito comum encontrarmos arranjos experimentais onde a implementação da força externa oscilante é feita de tal forma que o ponto de apoio da mola mostrado na Figura 6 está em movimento oscilatório, $l \cos(\omega_e t)\hat{\mathbf{i}}$, onde l é a amplitude destes pequenos deslocamentos. Isto significa que a origem de nosso sistema de coordenadas não está fixa. Cabe aqui duas observações muito importantes. Neste tipo de implementação da força externa oscilante, esta força externa não é aplicada diretamente à massa presa na mola como requer a segunda lei de Newton. A força externa é aplicada ao suporte da mola. Portanto, neste arranjo experimental, em princípio, não podemos aplicar os resultados obtidos na Sec. IV. Entretanto, ainda podemos tratar esta situação com relativa facilidade.

Suponha agora que o nosso sistema massa-mola esteja na presença do campo gravitacional, imersa em um determinado meio fluido e com o ponto de apoio da mola oscilando na forma $\mathbf{o} = l \cos(\omega_e t)\hat{\mathbf{i}}$. Estas oscilações no ponto de apoio alteram a posição $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}}$ da massa m presa à mola para $\mathbf{r} + \mathbf{o}$. Assim, num determinado instante t , a força elástica (lei de Hooke) e a força viscosa (massa muito pequena) serão

$$\mathbf{F}_e = -k(x + o - L)\hat{\mathbf{i}} = [-kx(t) - kl \cos(\omega_e t) + kL]\hat{\mathbf{i}}, \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_v = -b(\dot{x} + \dot{o})\hat{\mathbf{i}} = [-b\dot{x}(t) + bl\omega_e \sin(\omega_e t)]\hat{\mathbf{i}}, \quad (43)$$

respectivamente. Note que a velocidade que entra na força viscosa é a velocidade relativa da massa em relação ao meio, o qual está em movimento (descrito pela coordenada $\mathbf{o}(t)$). Desta forma, a força resultante atuando na massa m é

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_v = [-kx(t) - kl \cos(\omega_e t) + kL + mg - b\dot{x}(t) + bl\omega_e \sin(\omega_e t)]\hat{\mathbf{i}}. \quad (44)$$

A EDO resultante da segunda lei, $\mathbf{F}_R = m\ddot{x}\hat{\mathbf{i}}$, é (verifique)

$$\ddot{x} + 2\omega_1\dot{x} + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 L + 2l\omega_1\omega_e \sin(\omega_e t) - l\omega_0^2 \cos(\omega_e t), \quad (45)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$ e $\omega_1 = b/2m$. Esta EDO também pode ser reescrita juntando as constantes $g + \omega_0^2 L$ com a variável dependente $x(t)$,

$$\ddot{x} + 2\omega_1\dot{x} + \omega_0^2 \left[x - (L + g/\omega_0^2) \right] = 2l\omega_1\omega_e \sin(\omega_e t) - l\omega_0^2 \cos(\omega_e t), \quad (46)$$

a qual “implora” para realizarmos a mudança de variável

$$\bar{y}(t) = x(t) - (L + g/\omega_0^2), \quad (47)$$

tal que a EDO (46) torna-se em (verifique)

$$\ddot{\bar{y}} + 2\omega_1\dot{\bar{y}} + \omega_0^2 \bar{y} = 2l\omega_1\omega_e \sin(\omega_e t) - l\omega_0^2 \cos(\omega_e t), \quad (48)$$

onde a gravidade foi eliminada, como no caso anterior. Como no caso anterior, a origem $\bar{y} = 0$ do segundo sistema de coordenadas está na posição de equilíbrio $x = x_e = L + g/\omega_0^2$.

Observando a EDO (48) um pouco mais de perto, podemos reescrevê-la na forma

$$\ddot{\bar{y}} + 2\omega_1\dot{\bar{y}} + \omega_0^2 [\bar{y} + l \cos(\omega_e t)] = 2l\omega_1\omega_e \sin(\omega_e t), \quad (49)$$

a qual “pede” para fazermos mais uma mudança de variável,

$$y(t) = \bar{y}(t) + l \cos(\omega_e t), \quad (50)$$

tal que (verifique)

$$\dot{y}(t) = \dot{\bar{y}}(t) - l\omega_e \sin(\omega_e t), \quad \ddot{y}(t) = \ddot{\bar{y}}(t) - l\omega_e^2 \cos(\omega_e t). \quad (51)$$

Substituindo (50) e (51) na EDO (49), obtemos (verifique)

$$\ddot{y} + 2\omega_1\dot{y} + \omega_0^2 y = l\omega_e^2 \cos(\omega_e t). \quad (52)$$

Este é um resultado extraordinário, pois esta EDO para $y(t)$ é idêntica à EDO (26) com F_0/m trocado por $l\omega_e^2$. Portanto, podemos afirmar que o ponto de apoio móvel produz uma força oscilante na massa presa à mola. Isto significa que podemos transferir para cá tudo (ou quase tudo) que aprendemos na Sec. IV. Note que, neste caso, a amplitude da solução estacionária dada pela Eq. (35) passará a conter uma dependência com a frequência externa ω_e também no numerador (vinda da identificação $F_0/m \rightarrow l\omega_e^2$),

$$A(\omega_e) = \frac{l\omega_e^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\omega_1\omega_e)^2}}, \quad (53)$$

cuja derivada primeira é (verifique)

$$\frac{d}{d\omega_e} A(\omega_e) = 2l\omega_e \frac{\left[\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2\omega_1^2\omega_e^2 \right]}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\omega_1\omega_e)^2}}. \quad (54)$$

Isto significa que os pontos extremos ocorrerão em $\omega_e = 0$ (trivial; ausência das oscilações externas; não nos interessa) e $\omega_e = \omega_r$, onde (verifique)

$$\omega_r = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_1^2}}, \quad \omega_0 > \sqrt{2}\omega_1. \quad (55)$$

Note que esta frequência de ressonância é diferente daquela encontrada em (37), embora a condição para haver ressonância, $\omega_0 > \sqrt{2}\omega_1$, seja a mesma. Note também que as frequências de ressonância (37) e (55) são idênticas ($\omega_r = \omega_0$) na ausência de um meio viscoso ($\omega_1 = 0$).

Naturalmente, medindo o valor da frequência de ressonância, podemos obter o valor da amplitude l das oscilações na base da mola ou o valor de ω_1 (caso l seja conhecido). Isto é possível por que a frequência de ressonância (55) fornece o ponto onde a amplitude (53) é máxima (verifique)

$$A(\omega_r) = \frac{l}{2} \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}}. \quad (56)$$

Podemos ver mais uma vez que ω_0 precisa ser maior que ω_1 .

Para termos uma idéia numérica sobre a diferença entre as frequências de ressonância (37) e (55), vamos usar $\omega_0 = 2\pi$ rad/s e $\omega_1 = \pi/20$ rad/s, como na Sec. IV.1. A frequência de ressonância dada em (37) ocorre em 6.2793 rad/s, enquanto que a frequência de ressonância dada em (55) ocorre em 6.2871 rad/s, ambas muito próximas de $2\pi = 6.2832$ rad/s. Embora estes valores praticamente coincidam, é preciso compreender que o lado direito da EDO (52) vem da oscilação do ponto de apoio da mola e não de uma força externa aplicada diretamente à massa presa a mola. Além disto, a amplitude (35) tem uma forma funcional diferente daquela em (53).

Parte II Osciladores Elétricos

Considere o circuito RLC (formado por um resistor, um capacitor e um indutor) mostrado na Figura 7. Suponha que a fonte produza uma voltagem oscilante no tempo da forma $V = V_0 \cos(\omega_e t)$. A corrente fluindo no circuito num dado instante é a taxa de variação da carga $Q = Q(t)$ no tempo, $I = \dot{Q}$. Sejam $V_R = RI$, $V_L = L\dot{I}$ e $V_C = Q/C$ as tensões no resistor de resistência R , no indutor de indutância L e no capacitor de capacitância C , respectivamente. A lei de Kirchhoff diz que a tensão V fornecida pelo gerador é igual à soma das tensões no resto do circuito,

$$V = V_0 \cos(\omega_e t) = V_L + V_R + V_C = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q. \quad (57)$$

Esta é a equação diferencial que controla o comportamento temporal da carga $Q(t)$ fluindo no circuito. Podemos simplificar esta EDO dividindo-a pela indutância L e introduzindo as frequências $\omega_1 = R/2L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$ (verifique),

$$\ddot{Q} + 2\omega_1\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{V_0}{L} \cos(\omega_e t), \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_1 = \frac{R}{2L}. \quad (58)$$

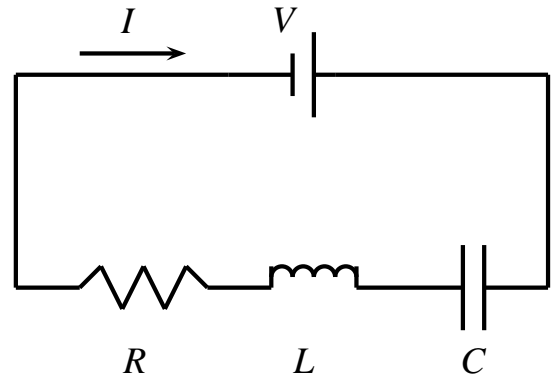


Figura 7. Oscilador formado por um circuito elétrico RLC (resistor, capacitor e um indutor).

Percebemos imediatamente que esta EDO (58) é idêntica à EDO (11) descrevendo o comportamento do oscilador amortecido e forçado usando o sistema massa-mola. Podemos até fazer a identificação da massa m do sistema massa-mola com a indutância L do circuito RLC ($L \rightarrow m$), da constante b caracterizando a viscosidade do fluido contendo o sistema massa-mola com a resistência R do resistor no circuito RLC ($R \rightarrow b$), bem como entre a constante de mola k e o inverso da capacitância C ($1/C \rightarrow k$). Naturalmente, a carga $Q(t)$ corresponde a posição $x(t)$ da massa presa a mola. Como pudemos estabelecer um mapa único entre as quantidades mecânicas e elétricas, podemos usar aqui tudo que aprendemos na Sec. IV, sem restrições.

Naturalmente, não temos aqui a dificuldade prática em aplicar uma força externa oscilante à massa presa à mola. O circuito RLC é contruído facilmente em nossos laboratórios e todas as quantidades elétricas podem ser monitoradas em tempo real e medidas com grande precisão. Portanto, o circuito RLC é um excelente laboratório para estudarmos o efeito de ressonância.

VI. CONCLUSÕES

Vimos que o comportamento dinâmico do sistema massa-mola em um meio viscoso pode ser modelado pelo programa Newtoniano via a segunda lei. A segunda lei fornece equações diferenciais cujas soluções descrevem a posição da massa como função do tempo (equações horárias). Além de uma descrição detalhada do comportamento dinâmico, nosso modelo também forneceu uma previsão muito importante: o efeito de ressonância, ou seja, um aumento acentuado da amplitude de oscilação no regime estacionário para um determinado valor da frequência da força externa oscilante. Este

efeito foi responsável pela destruição de certos tipos de pontes no passado e seu conhecimento é muito importante nas engenharias Civil e Mecânica.

Nosso modelo também nos mostrou que a gravidade não altera a frequência de oscilação de um sistema massa-mola colocado na vertical, alterando apenas a posição em torno da qual as oscilações ocorrem. Vimos também que a aplicação de oscilações na extremidade da mola que estava fixa produz um comportamento dinâmico diferente daquele obtido quando a uma força externa oscilante é aplicada diretamente à massa presa à mola. Em princípio, as frequências de ressonâncias destes dois casos são diferentes. Em geral, quando usamos a segunda lei de Newton, as forças precisam ser aplicadas ao objeto cujo movimento queremos determinar.

Por fim, aproveitando o momento, estabelecemos uma analogia completa, um para um, entre os elementos de um circuito elétrico do tipo RLC (resistor+indutor+capacitor) e o sistema massa mola imerso em um meio viscoso. Nesta analogia, a massa m é identificada com a indutância L , a viscosidade do fluido b é identificada com a resistência R e a mola de constante k é identificada com o inverso da capacitância C . Naturalmente, a carga $Q(t)$ fluindo no circuito corresponde à posição $x(t)$ da massa presa a mola e a segunda lei de Newton corresponde à lei de Kirchhoff. Este circuito RLC é um laboratório perfeito para o estudo do efeito de ressonância.

Apêndice A: Oscilador amortecido sub-crítico

Como o oscilador amortecido sub-crítico é o caso mais comum de encontrarmos no laboratório, e lá percebemos que a amplitude deste movimento diminui com o tempo e que sua frequência (o que requer observações minuciosas) é menor que a frequência natural, então podemos propor uma forma específica para a equação horária que irá satisfazer a EDO (11). Por exemplo,

$$x(t) = A(t) \cos \theta, \quad \theta(t) = \omega t + \phi, \quad (\text{A1})$$

descreve um movimento harmônico com uma frequência angular ω (a ser determinada) e com uma amplitude $A(t)$ variando no tempo (também a ser determinada). As duas primeiras derivadas desta solução construída com base em nossas observações são

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \theta - \omega A \sin \theta, \quad (\text{A2})$$

$$\ddot{x} = (\ddot{A} - \omega^2 A) \cos \theta - 2\omega \dot{A} \sin \theta. \quad (\text{A3})$$

Assim, a EDO (11) pode ser reescrita na forma (verifique)

$$-2\omega(\dot{A} + \omega_1 A) \sin \theta + \left[\ddot{A} + 2\omega_1 \dot{A} - (\omega^2 - \omega_0^2) A \right] \cos \theta = 0. \quad (\text{A4})$$

Note que este resultado estabelece uma combinação linear (com coeficientes dependentes do tempo) para as funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$. Este é o momento de observarmos que as funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$ são linearmente independentes (como vetores ortogonais), ou seja, não é possível escrever uma

como proporcional a outra, como sugerido em (A4). Desta forma, a única solução possível para a Eq. (A4) é igualando seus coeficientes dependentes do tempo iguais a zero, simultaneamente,

$$2\omega(\dot{A} + \omega_1 A) = 0, \quad (\text{A5})$$

$$\ddot{A} + 2\omega_1 \dot{A} - (\omega^2 - \omega_0^2) A = 0. \quad (\text{A6})$$

Considerando que a frequência ω não seja nula, caso contrário não teríamos um movimento oscilatório, então temos de resolver a EDO $\dot{A} + \omega_1 A = 0$. Ora, a solução desta nós podemos advinhar facilmente (verifique),

$$\dot{A} + \omega_1 A = 0, \quad A(t) = A_0 e^{-\omega_1 t}. \quad (\text{A7})$$

Sabendo disto e usando isto na Eq. (A6), obtemos uma equação algébrica para ω , cuja solução é (verifique)

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2. \quad (\text{A8})$$

Esta nova frequência de oscilação será menor que a frequência natural ω_0 somente se $\omega_1 < \omega_0$, ou seja, para um oscilador sub-crítico. Olha só, estamos resolvendo EDOs com base apenas em observações físicas e nossos conhecimentos de cálculo e geometria e álgebra elementar. Imagine o que poderemos fazer depois de alguns cursos sobre EDO!

Há ainda uma segunda forma de resolver este mesmo problema que será muito útil no estudo do efeito de ressonância. Note que podemos escrever a nossa proposta (A1) como sendo a parte imaginária da função complexa $z(t)$ escrita na forma polar (veja o Apêndice B),

$$z(t) = A(t) e^{i\theta(t)} = A(t) \cos \theta + i A(t) \sin \theta, \quad (\text{A9})$$

onde $\theta(t) = \omega t + \phi$. Formalmente, $x(t) = \Re\{z(t)\} = A(t) \cos \theta$. Com esta inspiração “simplexa”, reescrevemos a EDO (11) para a função complexa $z(t)$,

$$\ddot{z} + 2\omega_1 \dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \quad (\text{A10})$$

Note que tomando a parte real desta EDO, obtemos a EDO (11) original. Isto é possível por que a operação de tomar a parte real é linear e comuta com a operação derivada. As duas primeiras derivadas de $z(t)$ dada em (A9) são calculadas facilmente (verifique),

$$\dot{z} = (\dot{A} + i\omega A) e^{i\theta(t)}, \quad \ddot{z} = (\ddot{A} + 2i\omega \dot{A} - \omega^2 A) e^{i\theta(t)}. \quad (\text{A11})$$

Desta forma, a EDO (A10) fornece (verifique)

$$\left[\ddot{A} + 2i\omega \dot{A} - (\omega^2 - \omega_0^2) A \right] + i \left[2\omega(\dot{A} + \omega_1 A) \right] = 0, \quad (\text{A12})$$

onde levamos em consideração que a fase $e^{i\theta(t)}$ é sempre diferente de zero. Note que a Eq. (A12) é um número complexo igual a zero. Isto somente é possível se as partes real e imaginária são nulas simultaneamente, o que nos leva às duas condições estabelecidas previamente nas Eqs. (A5)–(A6). Portanto, quem preferir, pode muito bem trabalhar com números (funções) complexos escritos na forma polar. Em muitas ocasiões, o uso do plano complexo facilita extraordinariamente nossas tarefas. É por ajudas como esta que números complexos deveriam ser denominadas de “simplexos”.

Apêndice B: Números complexos

A Figura 8 mostra a representação cartesiana e polar de um número complexo z no plano complexo,

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad (\text{B1})$$

onde $|z|$ é o módulo, distância do ponto (x, y) até a origem do sistema de coordenadas, o ângulo θ é a fase e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. É comum denominarmos a exponencial $e^{i\theta}$ também de “fase”. Usando séries de Taylor, podemos provar que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (\text{B2})$$

Note que o módulo também pode ser calculado por

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad (\text{B3})$$

onde $z^* = x - iy$ é a operação que faz a troca de sinal da unidade imaginária (conjugação complexa). As coordenadas

cartesianas x e y também são conhecidas por partes real e imaginária, respectivamente.

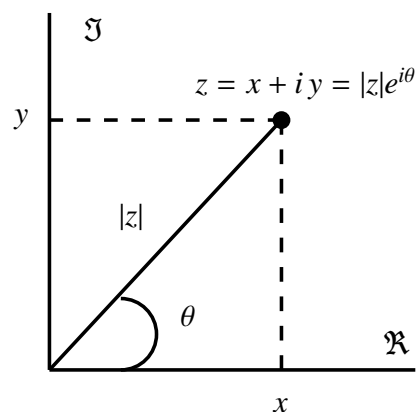


Figura 8. Um número complexo z representado na forma cartesiana ($z = x + iy$) e polar ($z = |z|e^{i\theta}$).