

Ondas: uma breve introdução

Esmerindo Bernardes^{1,*}

¹L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo
13560-970 São Carlos, SP, Brazil
(Dated: 23 de Novembro de 2016)

Faremos aqui uma breve apresentação das principais características de um movimento ondulatório. A equação de onda é introduzida construtivamente usando um pulso numa corda esticada. As velocidades de propagação de pulsos numa corda e num fluido são obtidas também construtivamente usando a segunda lei de Newton. Ondas harmônicas são introduzidas para apresentar frequências, comprimentos de onda e interferências espaciais e temporais.

CONTENTS

| | |
|---------------------------|---|
| I. Introdução | 1 |
| II. Equação de onda | 1 |
| II.1. Caso unidimensional | 1 |
| II.2. Caso tridimensional | 3 |
| III. Pulso numa corda | 4 |
| IV. Pulso num fluido | 5 |
| V. Ondas harmônicas | 6 |
| V.1. Interferência | 7 |
| V.2. Ondas estacionárias | 8 |
| VI. Conclusões | 8 |
| Referências | 9 |

I. INTRODUÇÃO

O movimento ondulatório está presente em nossa natureza sob diversas formas. Por exemplo, luz é uma onda (onda eletromagnética), assim como o som (onda sonora). Estes são dois exemplos que estão presentes no nosso cotidiano e certamente os mais familiares. Ondas na superfície de um lago calmo também fazem parte do nosso cotidiano e nos remete à infância. Ondas também desempenham papéis fundamentais em domínios onde não temos uma experiência sensorial direta, como no mundo atômico (microscópico) e no mundo macroscópico (com dimensões de galáxias). Um átomo tem também um comportamento ondulatório. Objetos massivos como estrelas podem gerar ondas gravitacionais. O deslocamento de placas tectônicas em um planeta gera ondas sísmicas (terremotos e maremotos).

Há ondas que precisam de um meio para se propagarem, como as ondas sonoras, e há ondas que não precisam de um meio de propagação, como as ondas eletromagnéticas (e as

ondas gravitacionais). As leis que regem o movimento de ondas que precisam de um meio de propagação foram descobertas na época de Newton (Séc. XVII), enquanto que as leis do movimento das ondas eletromagnéticas datam da época de Maxwell (Séc. XIX). As ondas gravitacionais foram previstas no Séc. XX. Entretanto, o movimento de qualquer onda obedece uma única lei, conhecida por Equação de Onda.

Tecnicamente uma onda é qualquer perturbação periódica que se propaga em um meio ou no vácuo. Uma característica marcante de uma onda é a sua capacidade de “transportar” energia e momentum sem o transporte de matéria. A luz do sol, ondas eletromagnéticas emitidas pelo sol, viaja no vácuo, atinge a Terra e nos aquece e alimenta. Ondas podem interagir entre si ou com obstáculos, gerando efeitos espetaculares como interferência, difração, refração e reflexão (veja a definição de cada um destes efeitos em um dicionário). Há muitas aplicações tecnológicas importantes envolvendo ondas, como o radar, o sonar, os equipamentos de ecografia em geral, etc.

A Seção II usa um pulso viajando em uma corda esticada para deduzir a equação de onda de duas formas: uma usando as transformações de Galileu e outra usando diretamente a segunda lei de Newton. Discutiremos nas Seções III e IV como as velocidades de propagação de um pulso numa corda esticada e em um fluido, respectivamente, podem ser deduzidas usando conceitos elementares de mecânica. Ondas harmônicas são apresentadas na Seção V para introduzir os conceitos de frequências e comprimentos de onda, interferências e ondas estacionárias, como aquelas produzidas pelas cordas de um violão ou por uma flauta.

II. EQUAÇÃO DE ONDA

II.1. Caso unidimensional

A Figura 1 representa um pulso viajando para a direita com velocidade constante v numa corda (esticada) de densidade uniforme. Enquanto o referencial O está fixo no laboratório, o referencial O' é solidário ao pulso. Suponha que no instante inicial, os dois referenciais sejam coincidentes. Num instante t posterior, (x', f') representa em O' as coordenadas de um ponto qualquer sobre o pulso. Este mesmo ponto é re-

* sousa@ifsc.usp.br

presentado no referencial do laboratório por (x, f) . Então, da Figura 1 temos $f = f'$ e $x = x' + v_x t$. O tempo t é o mesmo nos dois referenciais. Estas são as transformações de Galileu, válidas somente para a cinemática Newtoniana.¹ Note que, caso o pulso estivesse viajando no sentido oposto, então $x = x' - v_x t$, ou seja basta trocar o sinal de v_x .

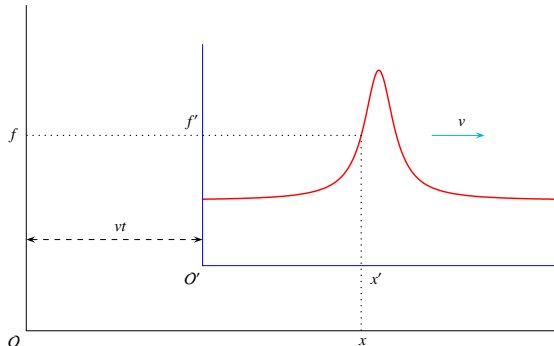


Figura 1. Pulso com velocidade $v = v_x$ em uma corda esticada. O referencial O' é solidário ao pulso.

Suponha que a forma do pulso mostrada na Figura 1 (curva vermelha) seja descrita pela função $f' = f'(x', t)$ no referencial O' solidário ao pulso, num certo instante t . Admitindo que a corda tenha uma densidade uniforme e que não haja perda de energia para o meio (vácuo), então a forma do pulso é preservada durante seu movimento (meio não-dispersivo). Portanto a forma do pulso deve ser descrita pela mesma função no referencial O fixo no laboratório, isto é, $f(x, t) = f'(x', t) = f(x', t)$. Usando as transformações de Galileu, $x' = x \pm v_x t$, a forma do pulso é descrita pela função $f = f(x, t) = f'(x', t) = f(x \pm v_x t, t) = f(x \pm v_x t)$. Note que é uma função de duas variáveis.² Note também que esta dependência da posição x e do tempo t é especial, pois ocorre somente através da combinação $x \pm v_x t$.

Apesar de termos iniciado com uma situação bastante simples, um pulso numa corda, obteremos aqui um resultado universal muito importante: a equação de onda. Chegamos à conclusão que a forma do pulso é descrita por uma função arbitrária que dependa da posição e do tempo de uma forma muito particular,

$$f = f(x, t) = f(x \pm v_x t) = f(x'(x, t)), \quad x' = x \pm v_x t. \quad (1)$$

O sinal positivo (negativo) significa que o pulso viaja para a esquerda (direita). Como a posição x e o tempo t estão variando enquanto o pulso caminha, então podemos calcular as

taxas³ de variação da função (composta) f em relação a x e t ,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx'} \frac{dx'}{dt} = \pm v_x \frac{df}{dx'} = \pm v_x g(x'), \quad (2)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx'} \frac{dx'}{dx} = \frac{df}{dx'} = g(x'), \quad (3)$$

onde g é novamente uma função composta. Vamos derivar mais uma vez,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \pm v_x \frac{dg}{dt} = \pm v_x \frac{dg}{dx'} \frac{dx'}{dt} = v_x^2 \frac{dg}{dx'}, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dx'} \frac{dx'}{dx} = \frac{dg}{dx'}. \quad (5)$$

Igualando estes dois resultados, temos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{v_x^2} \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad (6)$$

ou, numa notação tecnicamente correta,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v_x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Esta é uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem na posição e no tempo, conhecida como “equação de onda”. A equação de onda (7) é para o movimento ondulatório o equivalente da segunda lei de Newton para o movimento de translação de um objeto. Note que qualquer função $f(x, t)$ que dependa da posição e do tempo na forma $f(x \pm v_x t)$ é uma solução da equação de onda.

Uma observação importante: como a função f que define a forma do pulso pode ser escolhida, então podemos escolher uma forma harmônica (senos e cossenos) ou uma gaussiana (exponencial), para citar apenas dois exemplos. Isto significa que o argumento $x \pm v_x t$ precisa ser reescrito numa forma adimensional. Não podemos escrever $f = f_0 \cos(x \pm v_x t)$, pois $x \pm v_x t$ tem dimensão de comprimento. A forma natural de corrigir este inconveniente é introduzir uma constante real k_x com dimensão do inverso do comprimento, denominada de número de onda. Assim $k_x(x \pm v_x t)$ é adimensional. Note também que $k_x v_x$ tem dimensão de frequência. Será que $f = f(k_x x \pm k_x v_x t)$ ainda satisfaz a equação de onda (7)? Podemos verificar facilmente que satisfaz (verifique), para qualquer valor de k_x .

Outra observação importante: como a solução da equação de onda (7) é uma função arbitrária mas que pode depender apenas de $x \pm v_x t$, ou seja, seu argumento não pode conter qualquer outra dependência na posição e no tempo, então a “fase” $x \pm v_x t$ deve ser uma constante,

$$\theta(x, t) = k_x(x \pm v_x t) = cte. \quad (8)$$

¹ As transformações de Galileu são substituídas pelas transformações de Lorentz na cinemática Einsteiniana (relatividade especial).

² Isto justifica a necessidade de um curso de cálculo para várias variáveis.

³ No curso de cálculo de várias variáveis, estas derivadas serão representadas pelo símbolo $\partial f / \partial x$, denominado de derivada parcial de f em relação a x (as demais variáveis são tratadas como constantes durante uma derivada parcial). As regras de derivação continuam as mesmas.

Note que esta relação impõe um vínculo entre x e t . Como consequência, seus diferenciais também estão relacionados. De fato, o diferencial total da fase (16) é⁴

$$d\theta(x, t) = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial t}dt = k_x(dx \pm vdt) = 0. \quad (9)$$

Isto nos permite escrever $dx/dt = \pm v_x$, como esperávamos.

Exemplo 1

Considere a função

$$f(x, t) = \frac{2}{(2x - 3t)^2 + 1}, \quad (10)$$

a qual descreve um pulso caminhando para a direita com fase $\theta = 2x - 3t$, velocidade 3/2 m/s e número de onda 2/m. Todos os pontos sobre o pulso caminham com a mesma velocidade. Podemos escolher um deles para acompanhar. Por exemplo, o ponto $f(x, t) = 1$. Para este ponto, temos $2x - 3t = \pm 1$, ou seja uma fase constante. Há muitos pontos no pulso com diferentes fases, porém todos com a mesma velocidade.

II.2. Caso tridimensional

A discussão no final da seção anterior sugere uma generalização tridimensional da equação de onda unidimensional (7). Primeiro note que a forma do pulso em três dimensões dada por

$$f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t), \quad (11)$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ é denominado vetor de onda e ω é a frequência angular.⁵ O significado dos parâmetros \mathbf{k} e ω serão discutidos em breve. É imediato mostrar que a função f dada em (11) satisfaz a equação diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t), \quad (12)$$

onde

$$\omega^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)v^2 = k^2v^2, \quad (13)$$

cujas soluções são $\omega = kv$. A equação diferencial parcial (12) representa uma onda tridimensional com velocidade v e “vetor de onda” \mathbf{k} . Como veremos, o vetor de onda \mathbf{k} indica a direção do movimento da onda. Como exemplo, uma onda sonora numa sala tem a forma esférica e seu vetor de onda é perpendicular à sua superfície (em qualquer posição). Um vetor perpendicular a uma superfície esférica é denominado

de radial (sua direção está apoiada numa reta que passa pelo centro da esfera).

As derivadas espaciais na equação de onda (12) aparecem em muitos lugares (inclusive em Matemática) e são tão importantes que receberam um nome, “Laplaciano”, e um símbolo especial,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (14)$$

onde o operador (vetorial) ∇ é denominado de “gradiente”. Em coordenadas cartesianas,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (15)$$

Os versores $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ definem as orientações positivas nos três eixos cartesianos. Funções de várias variáveis, gradientes e Laplacianos serão estudados em detalhes no curso de Cálculo 2. Divirtam-se!

Um pouquinho mais de Cálculo II. Agora a condição de fase constante (16) deve ser reescrita como

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t = cte. \quad (16)$$

Assim, o diferencial total da fase é

$$\begin{aligned} d\theta(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}dz + \frac{\partial\theta}{\partial t}dt \\ &= \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial\theta}{\partial t}dt = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \pm \omega dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Portanto,

$$\mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \pm\omega. \quad (18)$$

Agora um pouquinho de Geometria. Um produto escalar pode ser calculado pelo produto dos módulos vezes o cosseno do ângulo entre eles, independentemente de qualquer sistema de coordenadas. Desta forma, o produto escalar em (18) pode ser reescrito como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv \cos\beta$, onde β é o ângulo entre os vetores \mathbf{k} e \mathbf{v} . Mas havíamos descoberto em (13) que $kv = \omega$. Portanto os vetores \mathbf{k} e \mathbf{v} precisam ser paralelos ou anti-paralelos, ou seja, o vetor de onda está sempre na direção do movimento.

Exemplo 2

A luz é um exemplo importante de onda tridimensional. No Séc. XIX Maxwell sintetizou as leis do eletromagnetismo, como Newton havia feito para a mecânica, e mostrou que a luz é um efeito ondulatório. As leis de Maxwell para o eletromagnetismo (no vácuo) podem ser escritas em termos dos campos vetoriais elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad (22)$$

⁴ O significado de diferencial total é estudado em Cálculo II. Tome isto como uma simples apresentação. O diferencial de uma constante é zero e obedece as demais regras de derivação.

⁵ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ é o produto escalar. Numa base ortonormal, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$.

onde as constantes μ_0 e ϵ_0 são, respectivamente, permissividade e permeabilidade do vácuo. As duas primeiras equações de Maxwell contêm o “divergente” (produto escalar contendo o gradiente ∇) dos campos. Um divergente diferente de zero de um campo vetorial num dado ponto do espaço significa que uma fonte deste campo está presente naquele ponto. Assim, as duas primeiras equações de Maxwell estão dizendo que não fontes dos campos eletromagnéticos no vácuo (por definição). As outras duas equações de Maxwell contêm o “rotacional” (produto vetorial contendo o gradiente ∇). Campos com rotacionais não-nulos produzem redemoinhos (vórtices). Note que estas duas últimas equações de Maxwell ligam as variações espaciais de um campo com a variação temporal do outro. Por exemplo, a variação temporal de um campo elétrico gera um campo magnético não-uniforme. Divergentes e rotacionais fazem parte das discussões em Cálculo II. A Ref. 1 contém uma excelente discussão sobre a interpretação física e geométrica de divergentes e rotacionais.

Por falar em Cálculo II, é um exercício interessante mostrar que os campos eletromagnéticos (19)–(22) satisfazem a equação de onda (12). Isto envolve algumas propriedades de gradientes, divergentes e rotacionais (cálculo vetorial), as quais serão estudadas em Cálculo II num momento oportuno. Por enquanto, aceite as propriedades usadas como conhecidas. Notando que as próprias equações de Maxwell são funções do tempo t e da posição \mathbf{r} , podemos perfeitamente calcular novamente gradientes, divergentes e rotacionais delas, bem como derivadas (parciais) no tempo. Por exemplo (útil), vamos tomar novamente o rotacional de cada uma das duas últimas equações (21)–(22),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right], \quad (23)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \left[\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]. \quad (24)$$

Estas duas equações podem ser simplificadas enormemente usando a propriedade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (25)$$

para expandir o duplo produto vetorial no lado esquerdo das Eqs. (23)–(24), e o fato que os campos eletromagnéticos são funções contínuas da posição e do tempo. Isto nos permite intercalar as derivadas espaciais [dentro do gradiente; veja a definição (15)] com as derivadas temporais no lado direito das Eqs. (23)–(24). Assim,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (26)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (27)$$

Agora devemos usar novamente as equações de Maxwell para simplificar ainda mais este resultado. Podemos usar as duas primeiras equações de Maxwell (19)–(20) contendo os divergentes nulos dos campos para simplificar o lado esquerdo. Depois podemos usar as duas últimas equações de Maxwell

(21)–(22) para simplificar o lado direito, resultando em

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (28)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (29)$$

Podemos notar que estas duas equações têm a mesma forma da equação de onda (12). Isto significa que os campos eletromagnéticos são ondas caminhando no vácuo com uma velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c. \quad (30)$$

Considerando $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ e $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ N s}^2/\text{C}^2$, então $c = 299,46 \times 10^6 \text{ m/s}$. Esta é a velocidade da luz no vácuo (aproximadamente trezentos mil quilômetros por segundo).⁶

III. PULSO NUMA CORDA

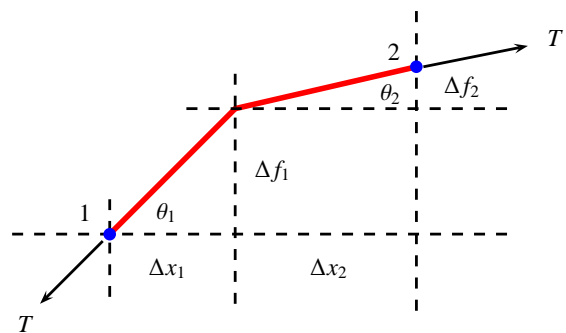


Figura 2. Pequeno pedaço do pulso mostrado na Figura 1 sob a tensão T que mantém a corda esticada. Os ângulos θ_i , $i \in \{1, 2\}$, são pequenos (o diagrama não está em escala).

Por falar em Newton, é instrutivo deduzir a equação de onda (7) usando a segunda lei de Newton. A Figura 2 mostra uma região pequena do pulso exibido na Figura 1, centrada no ponto (x, f) . A corda é mantida esticada pela tensão T , a qual está presente nas duas extremidades do pedaço da corda mostrado na Figura 2. Note que a direção destas tensões são ligeiramente diferentes, caracterizadas pelos ângulos θ_1 e θ_2 . Agora uma hipótese crucial: vamos assumir que a altura do pulso na Figura 1 é muito menor que o sua largura na base da corda. Isto torna os ângulos θ_1 e θ_2 pequenos (vinte graus no máximo). Então, $\text{sen } \theta_i \approx \theta_i$ e $\text{cos } \theta_i \approx 1$. Logo $\text{tan } \theta_i \approx \text{sen } \theta_i$. Assim, da Figura 2, temos

$$\text{sen } \theta_i \approx \text{tan } \theta_i = \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (31)$$

⁶ É interessante observar que, segundo a relatividade especial de Einstein, a velocidade da luz no vácuo é o limite superior para a velocidade de corpos que possuem massa de repouso (que pode ser medida por uma balança). Isto inviabiliza qualquer viagem intergaláctica por seres humanos.

que corresponde à derivada (parcial) primeira de f em relação a x nos pontos 1 e 2 no limite $\Delta x_i \rightarrow 0$ ($i \in \{1, 2\}$). Note que estamos usando a definição de derivada primeira (num certo instante de tempo). Desta forma, a diferença $\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1$ dividida por $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ (veja a Figura 2), representa a derivada (parcial) segunda de $\text{sen } \theta$ em relação à posição,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_2 - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_1}{\Delta x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (32)$$

Note que usamos novamente a definição de derivada.

Como os ângulos θ_i são pequenos, então podemos assumir que o comprimento da corda entre os pontos 1 e 2 (veja a Figura 2) é aproximadamente $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Assim, conhecendo a densidade linear λ da corda, supostamente constante, podemos escrever a massa deste pedaço de corda em termos de sua densidade e de seu comprimento aproximado,

$$\Delta m \approx \lambda \Delta x. \quad (33)$$

Podemos ver na Figura 2 que as componentes horizontais das forças atuando nas extremidades do pedaço de corda mostrado se anulam. No entanto, há uma força resultante na vertical $T(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1)$ que, de acordo com a segunda lei, é proporcional à aceleração na direção vertical, $\partial^2 f / \partial t^2$, na posição x fixa. Assim,

$$T(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1) = \Delta m \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \lambda \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (34)$$

onde fizemos uso da Eq. (33). Dividindo esta equação por Δx e tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ e usando a Eq. (32) para simplificar o resultado, obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (35)$$

Esta equação diferencial é idêntica à equação de onda (7) com

$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}. \quad (36)$$

Esta é a velocidade de propagação do pulso na corda. Note que ela não depende da fonte que gerou o pulso. Ela depende apenas da tensão T que mantém a corda esticada e de sua densidade linear de massa λ , a qual é constante.

IV. PULSO NUM FLUIDO

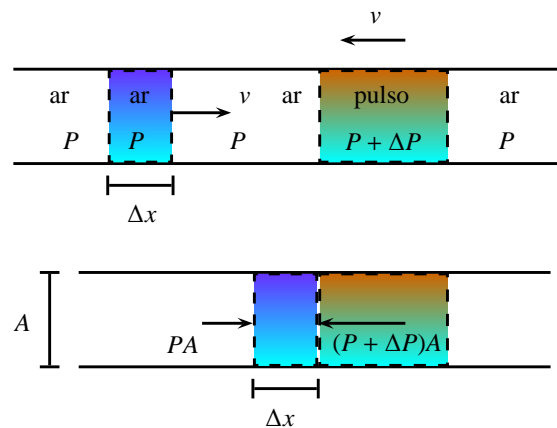


Figura 3. Um pulso viajando com velocidade v num tubo de seção reta A contendo ar sob uma pressão P .

Ondas sonoras são produzidas pelos deslocamentos sucessivos de porções de um fluido (como o ar atmosférico). Quando algum mecanismo desloca uma porção do fluido, uma região pequena com uma pressão ligeiramente aumentada (em relação à pressão de equilíbrio do fluido) é formada: isto é um pulso criado no fluido. Este pulso viaja pelo fluido com uma determinada velocidade. Uma sucessão regular destes pulsos forma uma onda sonora. Por simplicidade, vamos considerar um fluido ideal (rarefeito, sem viscosidade com as paredes do tubo e sem a formação de redemoinhos dentro do tubo).

A Figura 3 mostra um tubo de seção reta A contendo um fluido de densidade volumétrica ρ , a uma pressão de equilíbrio P . A figura superior mostra um pulso (região colorida à direita) viajando para a esquerda com velocidade v . A pressão $P + \Delta P$, onde $\Delta P > 0$ (compressão), na região do pulso é ligeiramente maior que a pressão de equilíbrio P . No referencial do pulso, é o fluido que se movimenta para a direita com velocidade v . Consideremos então o encontro de uma pequena região do fluido de largura Δx (região colorida à esquerda na figura superior) com o pulso. No momento do encontro (figura inferior), há forças perpendiculares às faces desta pequena região do fluido, cuja resultante é $F = PA - (P + \Delta P)A = -\Delta P A$. Note que adotamos o sentido positivo como sendo da esquerda para a direita. Esta força resultante sendo contrária ao movimento do fluido, deve reduzir sua velocidade, $v \rightarrow v + \Delta v$, onde $\Delta v < 0$. Seja Δt o tempo gasto pela face esquerda desta pequena porção do fluido para atingir o pulso. Transcorrido este tempo, esta região estará inteiramente imersa dentro do pulso. Assim a desaceleração sofrida pelo fluido é $a = \Delta v / \Delta t$. Então, usando a segunda lei de Newton, temos

$$F = -\Delta P A = \Delta m a = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (37)$$

onde Δm é a massa contida nesta pequena região do fluido que se chocou com o pulso.

Como na região de largura Δx o fluido caminha com a velocidade constante v , então $\Delta x = v \Delta t$. Desta forma, a massa

do fluido nesta pequena região de volume $V = A\Delta x$ pode ser escrita como $\Delta m = \rho V = \rho A\Delta x = \rho A v \Delta t$. Isto nos permite reescrever a segunda lei de Newton (37) como

$$-\Delta P = \rho v \Delta v. \quad (38)$$

Esta expressão pode nos dar a velocidade do pulso em termos de quantidades que podem ser facilmente medidas. Para tal, precisamos substituir a variação da velocidade em (38) por algo que seja mais fácil de ser medido. Note que esta pequena região de largura $\Delta x = v\Delta t$, volume $V = A\Delta x = Av\Delta t$, sofre uma compressão ao se chocar com o pulso, reduzindo seu volume por $\Delta V = A\Delta v\Delta t$, devido à redução Δv em sua velocidade. Observe que $\Delta V < 0$, pois a velocidade diminui ($\Delta v < 0$). Assim, combinando estes dois resultados, temos (verifique)

$$\frac{V}{\Delta V} = \frac{v}{\Delta v}. \quad (39)$$

Isto nos permite reescrever a Eq. (38) na forma (verifique)

$$\rho v^2 = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} = B. \quad (40)$$

A quantidade B (estritamente positiva) no lado direito desta equação é conhecida como “módulo de compressibilidade” de um fluido e é facilmente medida.

Portanto, da Eq. (40), a velocidade de propagação de um pulso num fluido ideal é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad B = -V \frac{\partial P}{\partial V}. \quad (41)$$

Note que esta expressão é similar àquela para a velocidade do pulso numa corda [veja a Eq. (36)]. A tensão T na corda e o módulo de compressibilidade B do fluido têm papéis similares. Ambos dizem respeito à propriedade “elástica” de cada meio de propagação do pulso. Nos denominadores das expressões contendo a velocidade de propagação do pulso em (36) e (41) estão quantidades representando a propriedade inercial do meio, ou seja densidades de massa (linear e volumétrica).

O próprio Newton chegou à expressão (41). No entanto, na época de Newton, a única relação entre pressão e volume era dada pela lei de Boyle, $PV = cte$, que assume uma temperatura constante (transformação isotérmica). Assim, para Newton, o módulo de compressibilidade para um gás ideal é

$$B = -V \frac{\partial P}{\partial V} = -V \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{cte}{V} \right) = \frac{cte}{V} = P. \quad (42)$$

Vamos lembrar mais um pouquinho de Termodinâmica. Massa pode ser rescrita como o número de moles n vezes o peso molecular M , $m = nM$. Segundo a lei dos gases ideais, $PV = nRT$, onde $R = 8.314 \text{ J/mol K}$ é a constante universal dos gases ideais.⁷ Desta forma, a densidade volumétrica pode

ser reescrita como

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{MP}{RT}. \quad (43)$$

Vamos determinar então a velocidade de propagação de um pulso no ar, Nas condições normais de pressão e temperatura, isto é, $P = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$), $T = 273,15 \text{ K}$ e $n = 1$. O peso molecular do ar é $M = 28,9 \text{ g/mol}$. Assim, segundo Newton, a velocidade do som é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = 280.3 \text{ m/s}. \quad (44)$$

O valor experimental é próximo de 332 m/s , 18% maior. Newton verificou que seus resultados em outras temperaturas sempre diferiam dos valores experimentais também por um fator 1.18, ou seja, os valores experimentais eram aproximadamente 18% maiores. Um entendimento melhor desta situação ocorreu somente no Séc. XIX, quando as transformações adiabáticas foram descobertas. Numa transformação adiabática não há troca de energia com o meio pelo mecanismo de calor. Isto acarreta numa variação simultânea da pressão P , do volume V e da temperatura T tal que $PV^\gamma = cte$, onde a constante adimensional γ é a razão entre as capacidades térmicas a pressão constante e a volume constante, $\gamma = C_p/C_v$ (mais detalhes no curso de Termodinâmica). Usando uma transformação adiabática ao invés de uma isotérmica, então o módulo de compressibilidade para um gás ideal é

$$B = -V \frac{\partial P}{\partial V} = -V \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{cte}{V^\gamma} \right) = \gamma \frac{cte}{V^\gamma} = \gamma P. \quad (45)$$

Assim, a velocidade do som (CNTP, $\gamma = 1.4$) é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 331.7 \text{ m/s}. \quad (46)$$

Note que $\sqrt{\gamma} = 1.18$, exatamente o fator que Newton precisava (descoberto quase 200 anos depois).

V. ONDAS HARMÔNICAS

Muitas características importantes de uma onda podem ser estudadas supondo que a forma do pulso seja harmônica, isto é,

$$f(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t), \quad \omega = kv. \quad (47)$$

Podemos ver claramente que esta função harmônica satisfaz a equação de onda (7) (verifique). A amplitude A pode representar tanto a pequena altura de um pulso numa corda quanto a pressão inicial em um fluido.

Como a posição x e o tempo t entram com o mesmo “pé de igualdade” na onda harmônica (47), então teremos dois períodos: um espacial λ e um temporal T . Mantendo o tempo

⁷ A constante universal dos gases foi descoberta somente no início do Séc. XIX.

constante (por exemplo, $t = 0$), a função (47) é periódica na posição

$$f(x + \lambda, 0) = A \cos[k(x + \lambda)] = f(x, 0) = A \cos(kx). \quad (48)$$

Expandindo o cosseno, obtemos a equação

$$\begin{aligned} \cos[k(x + \lambda)] &= \cos(kx) \cos(k\lambda) - \sin(kx) \sin(k\lambda) \\ &= \cos(kx), \end{aligned} \quad (49)$$

para quaisquer valores de x . Então, a única solução possível é $k\lambda = n2\pi$, onde n é um inteiro positivo ou negativo. O período espacial λ é definido para $n = 1$,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (50)$$

também conhecido por “comprimento de onda”. Agora podemos obter uma interpretação geométrica para a constante k . Note que 2π é o comprimento de uma circunferência de raio unitário. Então, $k\lambda = 2\pi$ indica que o número real k representa o número de vezes que o comprimento de onda λ cabe dentro do perímetro de uma circunferência de raio unitário. Por isso, a constante k é denominada de “número de onda”. Dado o comprimento de onda λ , o número de onda correspondente é

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (51)$$

Como veremos adiante, esta expressão é similar à expressão que define a frequência angular (temporal).

Considerando agora a posição constante, por exemplo em $x = 0$, a onda harmônica (47) é também periódica no tempo, $f(0, t + T) = f(0, t)$, onde T um período (comprimento de onda temporal). Procedendo como anteriormente, teremos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (52)$$

Esta é a frequência angular (temporal), similar à expressão (51) que define o número de onda em termos do comprimento de onda espacial λ . Note que a frequência angular é 2π vezes a frequência usual (inverso do período; medida em Hertz).

Naturalmente, as frequências angulares (51) e (52) estão interligadas pela relação (13), $k v = \omega$, a qual nos possibilita escrever

$$k v = \omega, \quad \lambda f = v. \quad (53)$$

A velocidade de propagação de uma onda é igual ao produto entre seu comprimento de onda e sua frequência. As duas relações em (53) permanecem válidas até em Mecânica Quântica onde as leis de Newton perdem a validade.

V.1. Interferência

A equação de onda (7) permite que a combinação linear (com coeficientes constantes) de duas funções de onda (funções que são soluções da equação de onda) também seja

uma função de onda. Em outras palavras, a superposição (ou interferência) de duas ondas é também uma onda.

Como primeiro exemplo de interferência, vamos considerar duas ondas harmônicas f_i diferindo apenas por uma constante na fase,

$$f_1 = A \sin(\theta_1), \quad f_2 = A \sin(\theta_2), \quad (54)$$

e

$$\theta_2 = \theta_1 + \delta, \quad \theta_1 = kx - \omega t, \quad (55)$$

onde δ é uma constante. A soma desta duas ondas pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right] \\ &= 2A \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Esta função também satisfaz a equação de onda (7) (verifique). Assim, para estas duas ondas que percorreram o mesmo percurso, mas com fases diferentes, podem se combinar construtivamente de forma que o módulo da nova amplitude $2A \cos(\delta/2)$ seja máximo, isto é, para $\delta = 2n\pi$, com n inteiros (múltiplo par de π). A interferência será destrutiva quando a nova amplitude $2A \cos(\delta/2)$ se anular, ou seja, quando $\delta = (2n + 1)\pi$ (múltiplo ímpar de π).

Outro tipo interessante de interferência espacial ocorre quando duas ondas de mesma frequência (temporal e espacial) percorrem percursos ligeiramente diferentes, $x_1 - x_2 = \Delta x$,

$$\theta_1 = kx_1 - \omega t, \quad \theta_2 = kx_2 - \omega t. \quad (57)$$

Como no caso anterior,

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right] \\ &= 2A \cos\left(\frac{1}{2}k\Delta x\right) \sin\left[\frac{1}{2}(kx_1 + kx_2 - 2\omega t)\right]. \end{aligned} \quad (58)$$

A interferência será construtiva quando $k\Delta x = n2\pi$, n inteiro, ou, usando a definição (51), $\Delta x = n\lambda$, isto é, quando a diferença de percurso Δx for um múltiplo inteiro do comprimento de onda λ . Esta condição é conhecida por “condição de ressonância”. A interferência será destrutiva quando $k\Delta x = (2n + 1)\pi$, ou $\Delta x = (2n + 1)\lambda/2$, ou seja, caso a diferença de percurso seja um múltiplo de meio comprimento de onda.

Vejam agora um tipo de interferência temporal, isto é, quando duas ondas diferem (ligeiramente) apenas pelas suas frequências angulares (temporais), $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$,

$$\theta_1 = kx - \omega_1 t, \quad \theta_2 = kx - \omega_2 t. \quad (59)$$

Procedendo como antes, temos

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right] \\ &= 2A \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \sin(kx - \omega_m t), \end{aligned} \quad (60)$$

onde $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$. A novidade agora é a amplitude $2A \cos(\Delta\omega t/2)$ dependente do tempo, de forma harmônica, com uma frequência angular $\Delta\omega/2$, correspondendo a um período $\tau = 2\pi/(\Delta\omega/2) = 4\pi/\Delta\omega$. Então teremos uma onda com frequência angular ω_m , cuja amplitude é modulada por outra onda harmônica de frequência angular $\Delta\omega/2$. Este efeito é conhecido por “batimento”. As vezes, este efeito ocorre durante o estudo do efeito de ressonância usando um sistema massa-mola. É interessante observar que o ouvido humano depende da amplitude ao quadrado e, portanto, não distingue os sinais desta nova amplitude dependente do tempo, reduzindo assim o período τ pela metade. A frequência que o ouvido humano percebe, correspondente a $f_{bat} = 1/(\tau/2) = \Delta\omega/2\pi$, é denominada de frequência de batimento. Ela ajuda músicos a afinarem seus instrumentos usando apenas seus ouvidos (explique como).⁸

V.2. Ondas estacionárias

Um tipo interessante de interferência ocorre quando duas ondas diferem apenas pelo sentido de propagação. Para facilitar, suponha que uma onda seja formada por um pulso numa corda de forma harmônica criado de tal forma a viajar para a esquerda. Suponha também que os extremos da corda de comprimento L (densidade linear μ ; para não confundir com o comprimento de onda λ) sejam mantidos fixos. Quando um pulso atinge o extremo esquerdo, ele é refletido e retorna encontrando outros pulsos viajando em sentido oposto. A mesma situação ocorre no extremo direito da corda. Assim, teremos a superposição de duas ondas harmônicas de mesmo comprimento de onda, mesma frequência, mas diferindo pelo sentido de propagação,

$$\begin{aligned} f &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \\ &= 2A \sin(kx) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (61)$$

A novidade aqui é a dependência espacial da nova amplitude $2A \sin(kx)$. Isto dá a impressão de que não há pulsos viajando de um lado para o outro da corda (“ondas estacionárias”). Como os extremos ($x = 0$ e $x = L$) estão fixos em $f = 0$, então esta nova amplitude precisa anular-se nos extremos da corda, ou seja, $k_n L = n\pi$, n inteiros. Note que escrevemos k_n ao invés de k , pois temos um número de onda diferente para cada inteiro n . Reescrevendo esta condição (também denominada de ressonância) em termos do comprimento de onda, temos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

ou $L = n\lambda_n/2$. A condição de ressonância estabelece que o comprimento da corda precisa caber exatamente um número inteiro de metades de comprimentos de onda. Para

os músicos, é mais conveniente reescrever esta condição de ressonância em termos da frequência. Usando a relação (13), temos

$$f_n = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (63)$$

onde F é a tensão que mantém a corda esticada. Em música, $n = 1$ é o harmônico fundamental.

Caso um dos extremos da corda, digamos $x = L$, esteja completamente livre, então a onda resultante (61) não irá se anular na extremidade livre. Como ela está livre, ela deverá atingir sua amplitude máxima nesta extremidade, ou seja, $\sin(kL) = \pm 1$ em (61), o que implica em $k_n L = (2n + 1)\pi/2$ ou $L = (2n + 1)\lambda_n/4$. Desta vez, devemos ter o comprimento da corda igual a um número ímpar de quartos de comprimentos de onda.

Se considerarmos ondas sonoras formadas por pulsos em um tubo, podemos aproveitar muito as discussões anteriores usando pulsos em uma corda. Caso as extremidades de um tubo de comprimento L não estejam tampadas, então o fluido nestas regiões pode se mover livremente. Assim, esperamos que a onda sonora dentro do tubo tenha uma amplitude mínima nas extremidades, ou seja, que o comprimento do tubo caiba um número inteiro de meio comprimento de ondas, $L = n\lambda_n/2$. Esta é condição de ressonância em uma corda com as duas extremidades fixas. Caso o tubo contenha uma de suas extremidades tampada, então a onda sonora deve ter uma amplitude máxima nesta extremidade, pois o fluido não pode se mover nesta posição. Porém, na outra extremidade, onde a onda sonora é criada, a amplitude é mínima. Assim, o comprimento do tubo deve conter um número ímpar de um quarto de comprimento de ondas, $L = (2n + 1)\lambda_n/4$. Esta situação é idêntica à de uma corda com apenas uma de suas extremidades presa.

VI. CONCLUSÕES

Usando conhecimentos elementares de cinemática como as transformações de Galileu que relacionam coordenadas de um ponto em dois referenciais inerciais (movimento relativo uniforme), estabelecemos a equação de onda, a qual governa o comportamento básico de qualquer onda em um meio não-dispersivo. Descobrimos que o perfil de uma onda pode ser descrito por qualquer função, porém estas funções devem depender da posição e do tempo através de uma forma única, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$. A segunda lei de Newton foi utilizada, juntamente com a definição básica e intuitiva de derivada primeira, para determinar a velocidade de propagação de um pulso numa corda e num fluido. Em ambos os casos, a velocidade de propagação depende da razão entre as propriedades elástica e inercial de cada meio. Discutimos também a generalização tri-dimensional da equação de onda, onde introduzimos os operadores Laplaciano (escalar) e gradiente (vetorial). Mostramos que os campos eletromagnéticos satisfazem a equação de onda tri-dimensional e se propagam no vácuo com a velocidade da luz. Nesta discussão foi introduzido os operadores vetoriais

⁸ Aqueles interessados na física de instrumentos musicais podem consultar a Ref. 2 e outras referências contidas nela.

divergente e rotacional. Fica clara neste texto a necessidade e a importância de um curso de cálculo para várias variáveis. Encerramos estas discussões com ondas harmônicas, através das quais introduzimos os conceitos de comprimento de onda espacial (λ) e temporal (período; T) e frequências angulares

temporal (ω) e espacial (número de onda; k). Estes dois conceitos ondulatórios estão interligados pela relação $k\nu = \omega$ ou, equivalentemente, $\nu = \lambda f$, onde ν é a velocidade de propagação e f a frequência ($f = 1/T$). Também discutimos alguns tipos de interferência entre ondas, condições de ressonância e batimentos.

[1] E. M. Purcell. *Eletricidade e Magnetismo*, volume 2 of *Curso de Física de Berkeley*. Edgard Blücher – UnB, 1970.

[2] J. P. Donoso, A. Tannús, F. G., and T. C. de Freitas. A física do violino. *Rev. Bras. Ens. Fís.*, 30(2):2305, 2008.