## Respostas às questões feitas em sala de aula

**1) Prove que a área da curva tensão x deformação corresponde à energia absorvida por unidade de volume do material até a ruptura.**

$$\acute{A}rea = \int Sde$$ onde S = tensão de engenharia e e = deformação de engenharia

$$S = \frac{F}{A_0} \text{ e } e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_o} - 1$$

onde $A_0$ = área inicial e $l_0$ = comprimento inicial, F é a força aplicada e l o comprimento a cada instante.

Portanto tem-se que $de = \frac{dl}{l_0}$ logo,

$$\acute{A}rea = \int \frac{F}{A_0}\frac{dl}{l_0} = \frac{1}{A_0 l_0}\int Fdl = \frac{1}{V_0}\int Fdl$$

onde $V_0$ corresponde ao volume inicial do corpo de prova.

Como a integral da força aplicada sobre a distância (l) corresponde ao trabalho realizado ou energia tem-se que:

$$\acute{A}rea = \frac{trabalho(energia)}{V_0} \text{ em } \frac{J}{m^3} \text{ no S.I.}$$

Por análise dimensional chega-se ao mesmo resultado:

$$\acute{A}rea = Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{N}{m^2}.\frac{m}{m} = \frac{N.m}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

**2) Mostre que a fração de átomos como primeiros vizinhos das linhas de discordância é extremamente pequena num metal não encruado, mesmo sabendo que o número de linhas de discordância seja de ~ $10^6$ linhas/cm$^2$. Mostre ainda que, apesar da densidade de linhas de discordância aumentar um milhão de vezes para um metal muito encruado essa mesma fração de átomos continua pequena.**

$10^6$ linhas/cm$^2$ correspondem a uma densidade ($\rho$) de $10^6$ cm de linhas / cm$^3$ conforme mostra a análise dimensional:

$$\rho = \frac{10^6}{cm^2} = \frac{10^6}{cm^2}.\frac{cm}{cm} = \frac{10^6 cm}{cm^3}$$

Toma-se como exemplo o cobre (Cu), assumindo que só há linhas de discordância em cunha e que cerca de 5 átomos, em média, são os primeiros vizinhos da linha num dado plano perpendicular à linha.

Considerando que o átomo de Cu tem um raio de 128 pm seu diâmetro é de 256 pm. Assim, o número de átomos de Cu ao redor das linhas ($N_l$), em um $cm^3$, será de:

$$N_l = 5.\frac{10^6.10^{-2}(m)}{256.10^{-12}(m)} \approx 1{,}95x10^{14}$$

Agora é preciso descobrir o total de átomos de Cu em um $cm^3$.
Como a densidade do Cu é 8,92 g/$cm^3$ tem-se uma massa de 8,92 g.
Sabendo que a massa atômica do Cu é de 63,546 g/mol tem-se, em um $cm^3$, o total de átomos ($N_T$) de:

$$N_T = 6{,}02x10^{23}.\frac{8{,}92}{63{,}546} \cong 8{,}45x10^{22}$$

Logo, a fração de átomos primeiros vizinhos das linhas de discordância é de:

$$\frac{N_l}{N_T} = \frac{1{,}95x10^{14}}{8{,}45x10^{22}} \cong 2{,}3x10^{-9} \text{ ou} \sim 2{,}3 \text{ ppb (partes por bilhão)}$$

Mesmo que com o encruamento intenso o número de linhas de discordância aumente cerca de um milhão de vezes (chegando a $10^{12}$ linhas/$cm^2$) o número de átomos primeiros vizinhos será de apenas:

$2{,}3x10^{-9} \cdot 10^6 = 2{,}3x10^{-3}$ ou ~ 0,23%

**3) Mostre que a fração de átomos pertencentes ao contorno de grão é pequena para um metal com tamanho médio de grão de 100 μm. Mostre que, mesmo reduzindo o tamanho médio de grão à metade (50 μm) o número de átomos nos contornos continua pequeno.**

Considerando os grãos todos do mesmo tamanho e perfeitamente cúbicos com aresta igual ao tamanho médio de grão, 100 μm, o volume total ($V_T$) de cada grão é de:

$$V_T = \left(100x10^{-6}\right)^3 = 10^{-12}\,m^3$$

A camada mais externa do grão tem a espessura do diâmetro de um átomo. Considerando o átomo de Cu com diâmetro de 256 pm essa camada mais externa tem um volume ($V_c$) aproximado de:

$$V_C \cong 6.\left(100x10^{-6}\right)^2.256x10^{-12} = 1{,}54x10^{-17}\,m^3$$

A razão entre o volume da camada externa do grão sobre o seu volume total, corresponde, aproximadamente, à fração de átomos que pertencem ao contorno de grão:

$$\frac{V_c}{V_T} = \frac{1{,}54x10^{-17}}{10^{-12}} = 15{,}4x10^{-6} \text{ ou} \sim 15 \text{ ppm (partes por milhão)}$$

Reduzindo o tamanho de grão para 50 μm tem-se:

$$V_T = (50x10^{-6})^3 = 1{,}25x10^{-13}\,m^3$$
$$V_C \cong 6.(50x10^{-6})^2.256x10^{-12} = 3{,}84x10^{-18}\,m^3$$
$$\frac{V_c}{V_T} = \frac{3{,}84x10^{-18}}{1{,}25x10^{-13}} = 30{,}7x10^{-6} \text{ ou} \sim 31 \text{ ppm (partes por milhão)}$$

Mesmo considerando um formato de grão mais próximo da realidade do que o formato cúbico, a fração de átomos no contorno não é muito diferente do que já foi calculado. Vamos considerar os grãos como uma rede tridimensional de dodecaedros rômbicos (veja os links: https://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_dodecahedral_honeycomb e https://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_dodecahedron)

O raio da interesfera de um dodecaedro rômbico é $r_m = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$, onde ***a*** é a aresta do dodecaedro rômbico. Portanto, para uma tamanho médio de grão de 100 μm a aresta será de :

$$a = \frac{3}{2\sqrt{2}}.100 \cong 106\mu m$$

O volume do dodecaedro rômbico é de $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$, portanto o volume do grão ($V_T$) será de:

$$V_T \cong \frac{16\sqrt{3}}{9}(106x10^{-6})^3 \cong 3{,}67^{-12}\,m^3$$

A área da superfície do dodecaedro rômbico é de $8\sqrt{2}a^2$, portanto o volume da camada mais externa do grão para o caso do Cu será de:

$$V_C \cong 8\sqrt{2}.(106x10^{-6})^2.256x10^{-12} = 3{,}25x10^{-17}\,m^3$$

Logo,

$$\frac{V_c}{V_T} = \frac{3{,}25x10^{-17}}{3{,}67x10^{-12}} = 8{,}9x10^{-6} \text{ ou} \sim 9 \text{ ppm (partes por milhão)}$$