

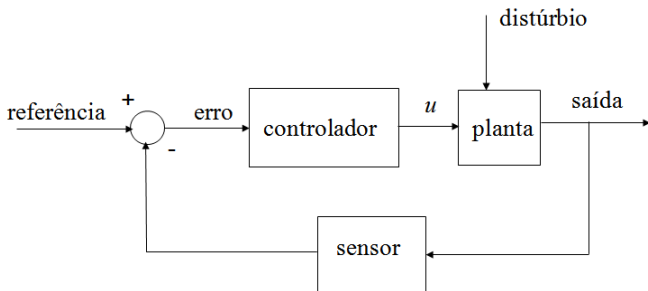
SEM 536 - Sistemas de Controle I

Aula 3 - Resposta no Tempo, Especificações de Desempenho

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Estrutura básica de um sistema realimentado



- Equação do movimento

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

sendo M a massa, B a constante do amortecedor, K a constante de rigidez da mola.

- Condições iniciais nulas: $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$

- Aplicando a propriedade da diferenciação:

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s)$$

- Função de Transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$
$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

z_i : zeros de $G(s)$

p_i : polos de $G(s)$

Sistema de primeira ordem

- Sistema de primeira ordem padrão:

$$\dot{y}(t) + \sigma y(t) = u(t)$$

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s + \sigma}$$

Sistema de primeira ordem

- polo: $p = -\sigma$
- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = e^{-\sigma t}$$

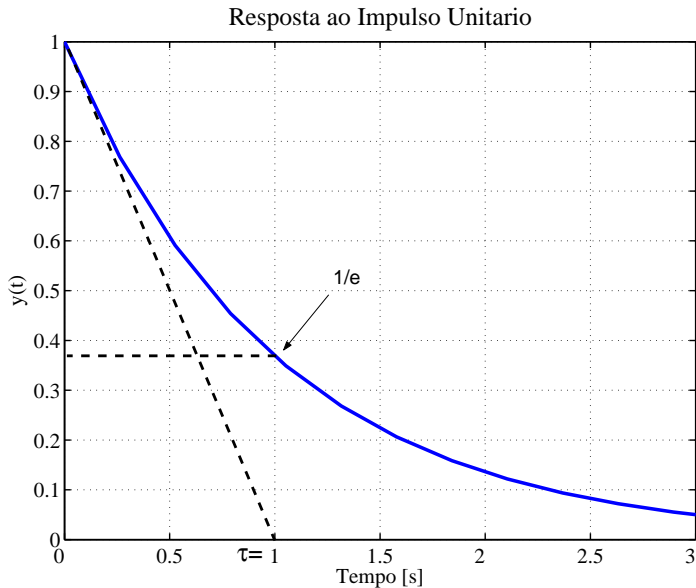
- Se $\sigma > 0$, polo no SPE ($p < 0$) \Rightarrow **estável**
- Se $\sigma < 0$, polo no SPR ($p > 0$) \Rightarrow **instável**

- Constante de tempo:

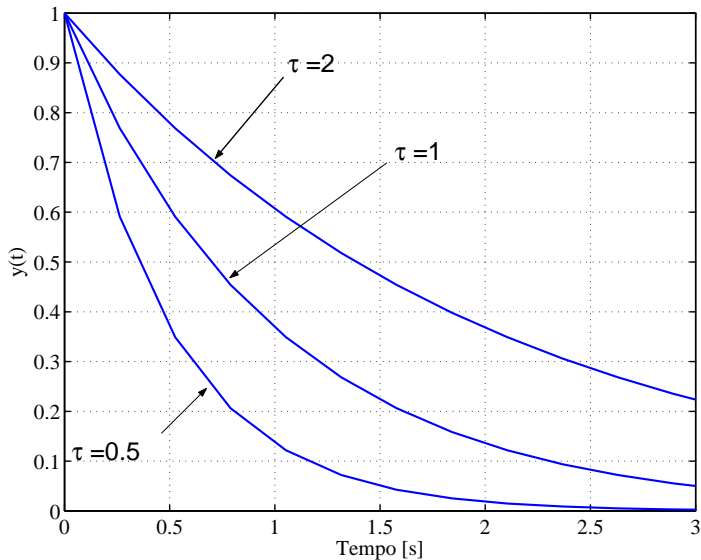
$$\tau = \frac{1}{\sigma}$$

- Instante em que a resposta é $\frac{1}{e}$ vezes o valor inicial.

Resposta ao impulso unitário: $\sigma = 1$



Resposta ao impulso unitário



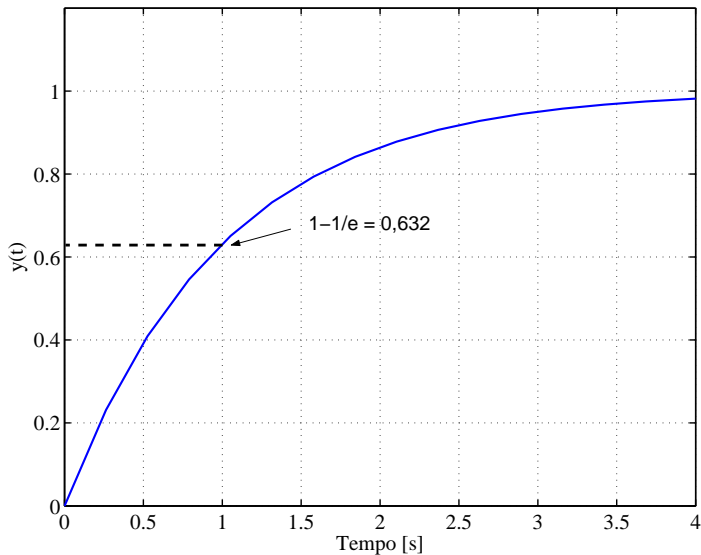
- Função de Transferência:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + \sigma)} = \frac{1/\sigma}{s} - \frac{1/\sigma}{s + \sigma}$$

- Resposta:

$$y(t) = \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})$$

Resposta ao degrau unitário: $\sigma = 1$



- Sistema de segunda ordem padrão:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = K_R\omega_n^2u(t)$$

- ω_n : freqüência natural não amortecida (rad/s)
- ζ : fator de amortecimento
- K_R : ganho de regime

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

- Equação Característica:

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \right) j$$

- Casos:

- $\zeta = 0$, sistema não amortecido
- $0 < \zeta < 1$, sistema subamortecido
- $\zeta = 1$, sistema criticamente amortecido
- $\zeta > 1$, sistema sobreamortecido

Sistema não amortecido ($\zeta = 0$)

- polos: $p = \pm\omega_n j$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R \omega_n \text{sen}(\omega_n t)$$

Sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

- polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_d j$$

com $\omega_d = \omega_n(\sqrt{1 - \zeta^2})$, frequência natural amortecida.

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = \frac{K_R \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)$$

Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$)

- polos: $p = -\omega_n$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$)

- polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Função de Transferência:

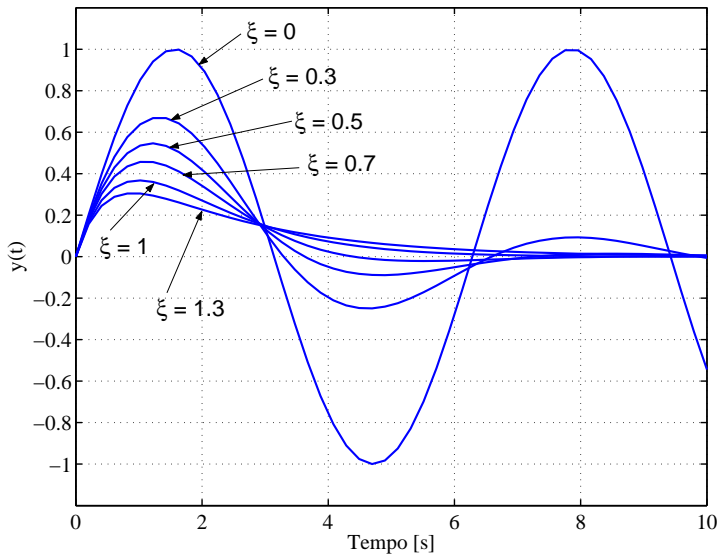
$$G(s) = \frac{K_R\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$)

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = -\frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + \frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

Resposta ao Impulso Unitario



- Função de Transferência:

$$Y(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s [(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2]}$$

- Sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$):

$$y(t) = K_R \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right) \right]$$

- Sistema não amortecido ($\zeta = 0$):

$$y(t) = K_R[1 - \cos(\omega_n t)]$$

- Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$):

$$y(t) = K_R[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)]$$

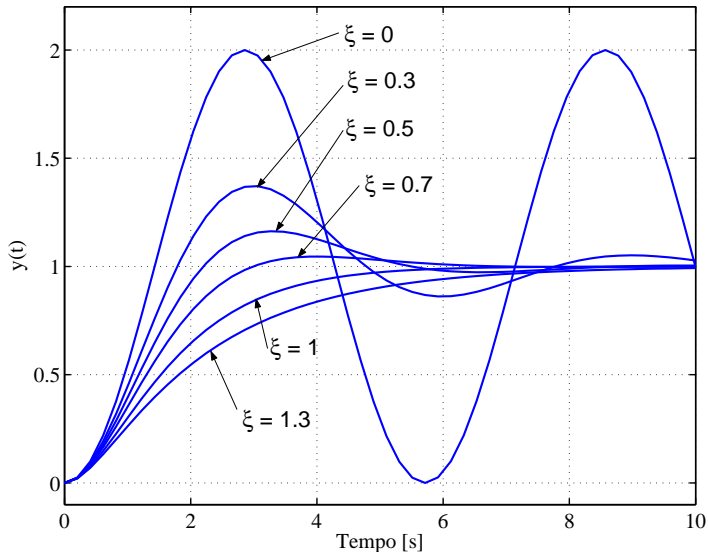
- Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$):

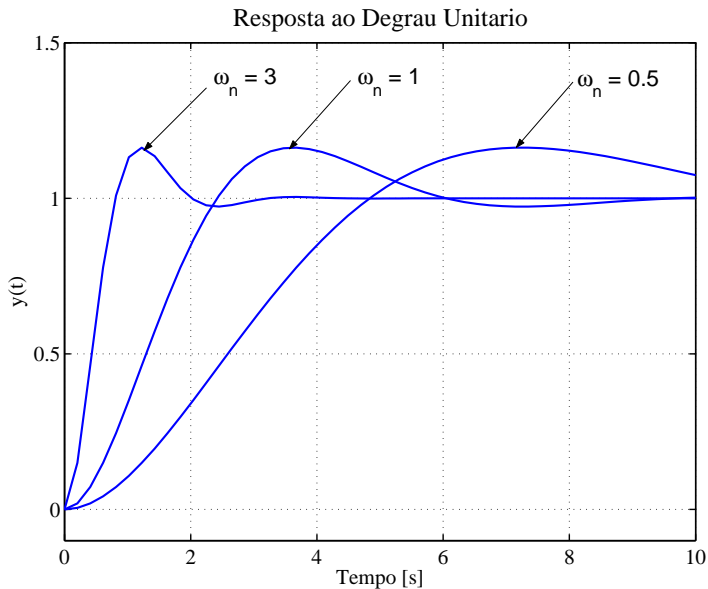
$$y(t) = K_R \left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right]$$

sendo $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ e

$$s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

Resposta ao Degrau Unitario





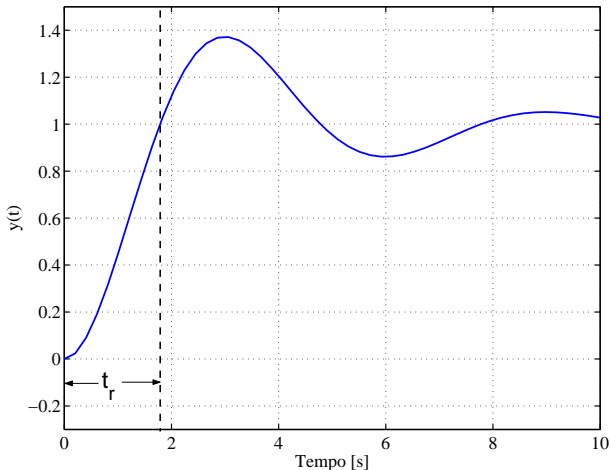
Entrada degrau unitário para um sistema de segunda ordem:

- Tempo de subida
- Sobre-sinal máximo
- Instante de pico
- Tempo de acomodação

Especificações em termos de ζ e ω_n

Especificações de desempenho

Tempo de subida (t_r): tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez o valor de regime.



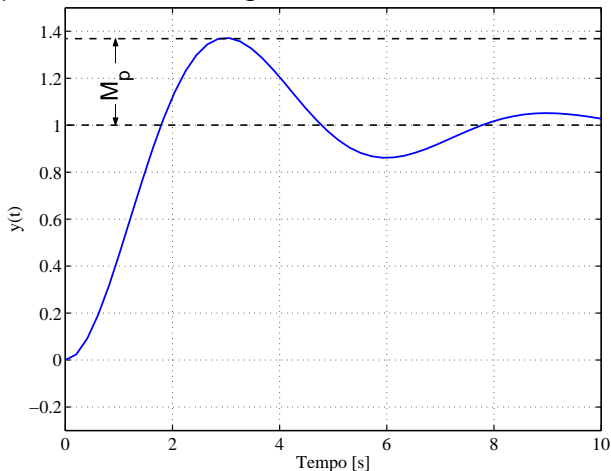
Para sistemas subamortecidos

$$t_r = \frac{1}{\omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n} \right)$$

Para t_r ser pequeno, ω_n deve ser grande e ζ próximo a zero.
Aproximação (de $y = 0,1K_R$ a $y = 0,9K_R$):

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

Sobre-sinal máximo (M_p): valor máximo da resposta medido a partir do valor de regime.



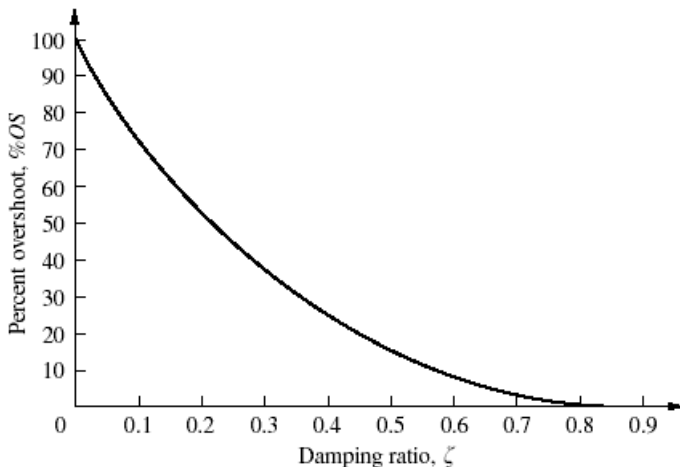
Para sistemas subamortecidos

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Sobre-sinal máximo percentual: $e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%$

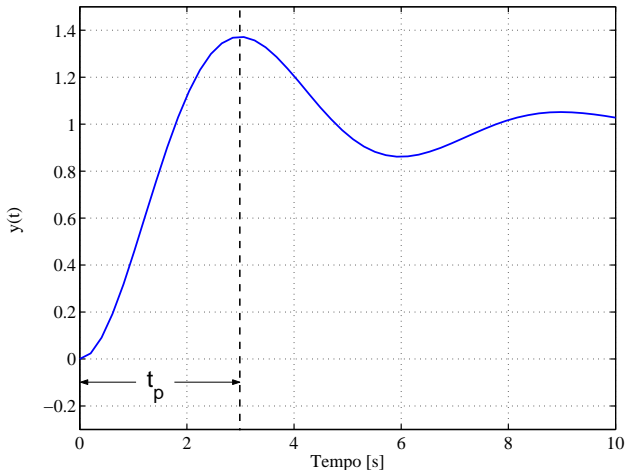
Para M_p ser pequeno, ζ deve ser próximo da unidade

Especificações de desempenho



Especificações de desempenho

Instante de pico (t_p): tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobre-sinal.



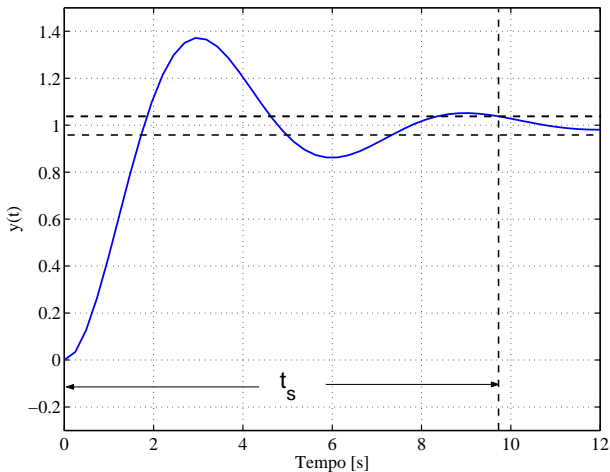
Para sistemas subamortecidos

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n}$$

t_p corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida

Especificações de desempenho

Tempo de acomodação (t_s): tempo necessário para a curva permanecer dentro de uma faixa em torno do valor de regime.



Especificações de desempenho

Para sistemas subamortecidos:

Critério de 1%: $t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n}$

Critério de 2%: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Critério de 5%: $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Exemplo: Encontre a região no plano s para as especificações abaixo:

- $t_r \leq 0,6$ s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$ s para 2%