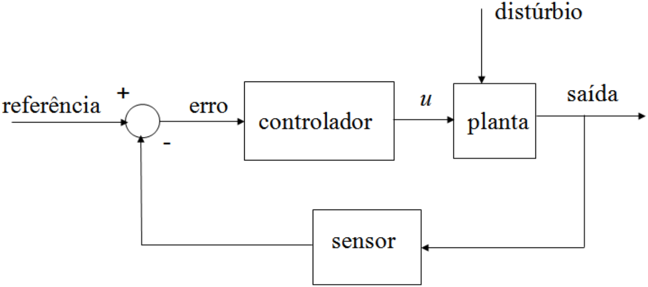
SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 2 - Transformada de Laplace e Função Transferência

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Estrutura básica de um sistema realimentado



Função Impulso Unitário

- Função pulso com área unitária:

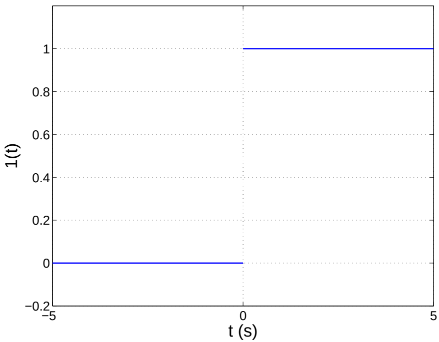
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0} & \text{se } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \ t > t_0 \end{cases}$$

- Se $t_0 \to 0$, temos o *impulso unitário* ou *delta de Dirac*, $\delta(t)$. Propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

- Função Degrau Unitário:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



Transformada de Laplace

- Variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

- Transformada de Laplace de uma função $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- Exemplos:
    - Função impulso unitário: $\delta(t)$
    - Função degrau: $a\mu(t)$
    - Função rampa: bt
    - Função seno: $sen(wt)$

- Propriedades
  - Superposição (linearidade)

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

  - Atraso de tempo: $f_1(t) = f(t - \lambda)$ com $\lambda > 0$

$$F_1(s) = e^{-s\lambda} F(s)$$

- Propriedades
  - Multiplicação por e^{-at}: $f_1(t) = e^{-at}f(t)$

$$F_1(s) = F(s+a)$$

  - Diferenciação

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}[\ddot{f}] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

- Propriedades
  - Multiplicação pelo tempo: $f_1(t) = tf(t)$

$$F_1(s) = \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

- Transformação inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

- Dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- Expansão em frações parciais

$$
\begin{aligned}
F(s) =& \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\
F(s) =& K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}
\end{aligned}
$$

z_i: zeros de $F(s)$
p_i: pólos de $F(s)$

- Expansão em frações parciais

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$
$$(s - p_1)F(s) = C_1 + \frac{(s - p_1)}{s - p_2} C_2 + \cdots + \frac{(s - p_1)}{s - p_n} C_n$$

- Fazendo $s = p_1$

$$C_1 = (s - p_1)F(s)|_{s=p_1}$$

- Expansão em frações parciais

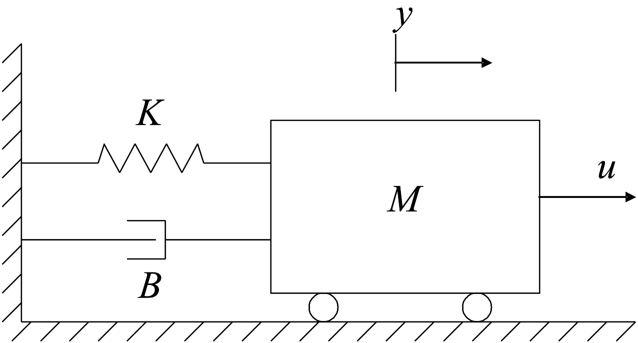
$$C_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i}$$

- Função no tempo

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

- Exemplos

- Considere o seguinte sistema mecânico:



- Equação do movimento

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

sendo M a massa, B a constante do amortecedor, K a constante de rigidez da mola

- Aplicando a propriedade da diferenciação (com condições iniciais nulas)

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s)$$

- Exemplo

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = U(s)$$

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = U(s)$$

- Condições iniciais nulas ($y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$)
- Entrada exponencial: $u(t) = 2e^{-2t}$

$$U(s) = \frac{2}{s+2}$$

- Resolvendo para $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+5s+4)} = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)}$$

- Expansão em frações parciais

$$Y(s) = -\frac{1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

- Resposta no tempo

$$y(t) = -1e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

- Teorema do valor final: se todos os pólos de $sY(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano s, então

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

- Exemplos

- Teorema do valor inicial: para qualquer função Y(s)

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s)$$

- Exemplo

Função Transferência

- Sistema massa-mola-amortecedor:

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s)$$

- Função Transferência, $G(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}U(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$