

# Multiplicadores de Lagrange

ou

## Como lidar com vínculos implícitos

Vito R. Vanin, setembro de 2015

### 1. Introdução

Quando é necessário descobrir os valores de grandezas que minimizam uma certa quantidade, é comum que existam vínculos entre elas. Embora muitas vezes seja possível eliminar algumas variáveis usando as relações de vínculo, é também frequente que os vínculos sejam representados por funções complicadas, e a eliminação não seja possível ou conveniente. O método alternativo é o dos *multiplicadores de Lagrange*. Vamos desenvolver o cálculo no caso em que há duas variáveis e um vínculo, que já contém todos os elementos necessários para resolver o problema geral, com qualquer número de variáveis e vínculos.

Ilustraremos o método com o *problema da embalagem*, que é simples do ponto de vista da álgebra e do cálculo, embora seja mais fácil de resolver por redução de variáveis. Esse exemplo, entretanto, evita adicionar a dificuldade de compreender um problema de minimização intrincado, que nos desviaria do objetivo de apresentar o assunto.

### 2 O Problema da Embalagem

Quando é necessário embalar um volume conhecido e fixo de um líquido, é econômico minimizar a quantidade de embalagem usada, que é proporcional à sua área. Embora a esfera seja a forma mais econômica, frequentemente ela não é conveniente. Por exemplo, latas de tinta são cilíndricas, pois permitem construir tampas grandes numa das extremidades. Assim, vamos enunciar o problema da embalagem como:

Encontre a proporção entre o diâmetro  $D$  e a altura  $H$  do cilindro de volume  $V$  que tenha a menor superfície possível.

O volume de um cilindro é

$$V = \pi \frac{D^2}{4} H \quad (1)$$

e a área total da sua superfície é

$$S = \pi DH + \pi \frac{D^2}{2} \quad (2)$$

O problema pode, então, ser reformulado como:

Encontre  $\hat{D}$  e  $\hat{H}$  tais que  $S(\hat{D}, \hat{H}) = \text{mínimo}$  quando  $V = \pi \frac{\hat{D}^2}{4} \hat{H}$  é o volume que se deseja embalar.

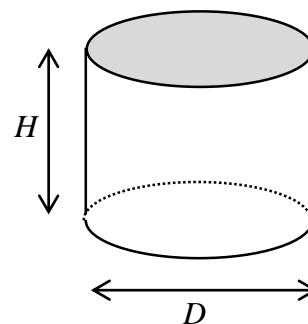


Figura 1. Definição dos parâmetros geométricos da embalagem.

### 3. Solução do problema da embalagem por eliminação de variáveis

Da equação (1), que representa o vínculo entre as variáveis neste problema, isola-se  $H$ ,

$$H = \frac{4V}{\pi D^2}$$

que, substituído em (2), dá

$$S = \frac{4V}{D} + \pi \frac{D^2}{2} \quad (3)$$

O mínimo ocorre em  $\hat{D}$  tal que

$$\left. \frac{dS}{dD} \right|_{\hat{D}} = 0 \rightarrow -\frac{4V}{\hat{D}^2} + \pi \hat{D} = 0 \rightarrow \hat{D} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Substituindo esse resultado em (1), obtemos

$$\hat{H} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \hat{D} \quad (4)$$

e, portanto,

$$\frac{\hat{D}}{\hat{H}} = 1 \quad (5)$$

### 4. Os multiplicadores de Lagrange

Considere uma função  $f$  de duas variáveis

$$f(x, y)$$

e que essas variáveis estão relacionadas de modo que

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (6)$$

$\varphi$  é a função de vínculo entre as variáveis  $x$  e  $y$ , que determinam a grandeza de interesse,  $f$ .

Se  $f$  é mínimo no ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$ , então  $\delta f(x, y)_{\hat{x}, \hat{y}} = 0$ , significando que o ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$  é um ponto estacionário da função, no sentido que estudamos no capítulo 6 do Marion e com a mesma notação. Essa condição de mínimo exige

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}, \hat{y}} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\hat{x}, \hat{y}} = 0 \quad (7) \quad \text{quando } x \text{ e } y \text{ são independentes}$$

de modo que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \text{em } (\hat{x}, \hat{y}) \quad (8)$$

Quando  $x$  e  $y$  não são independentes, também  $dx$  e  $dy$  estão relacionados, de modo que da equação (8) não podemos deduzir a equação (7) – por causa do vínculo, as duas diferenciais se compensam, ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$  e não  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , independentemente. A relação entre  $dx$  e  $dy$  é obtida derivando a equação de vínculo, eq. (6),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (9)$$

Note que (9) é nula não por que os valores representam um extremo, mas sim por que  $\varphi = 0$ , sempre – acabamos de calcular a diferencial de um zero. Dessa relação, deduzimos

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \quad (10)$$

que mostra como as *variações* em  $x$  e  $y$  se relacionam. A ideia básica dos multiplicadores de Lagrange é não usar a relação (10) de forma explícita, mas sim implícita. O truque é perceber que qualquer combinação linear de (8) e (9)

$$df + \lambda d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy \quad (11)$$

é nula quando  $df = 0$ . A fim de zerar a relação (11), escolhemos o valor  $\hat{\lambda}$  de  $\lambda$  que anula os dois termos entre parênteses do membro direito,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\hat{x}, \hat{y}} + \hat{\lambda} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{\hat{x}, \hat{y}} = 0 \quad (12)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\hat{x}, \hat{y}} + \hat{\lambda} \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{\hat{x}, \hat{y}} = 0 \quad (13)$$

Assim, resolvendo o sistema das 3 equações: (6), (12) e (13) nas 3 incógnitas  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , minimizamos a função  $f$  com variáveis que obedecem o vínculo, sem ter usado a relação  $\varphi(x, y) = 0$  para eliminar uma das variáveis no processo de cálculo.

Às vezes, elimina-se  $\hat{\lambda}$  ao resolver o sistema de equações, o que dá origem ao nome “multiplicador indeterminado de Lagrange”. Note que *indeterminado* não significa *indefinido*, ou seja, o multiplicador de lagrange tem um valor bem definido, apenas não é necessário calculá-lo para resolver o problema de mínimo. Aliás, quando usado para impor um vínculo a uma lagrangiana, o multiplicador de lagrange é proporcional à força de vínculo, de modo que não só é bem determinado como pode ser a quantidade de interesse no problema.

## 5. Problema da embalagem com multiplicadores de Lagrange

Nesse problema, a equação (1) corresponde à (6) (vínculo) e  $S$  da equação (2) corresponde à função  $f$ . Assim,  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $D$  e  $H$ . As equações (12) e (13) nessas variáveis ficam

$$\pi \hat{D} + \hat{\lambda} \frac{\pi \hat{D}^2}{4} = 0 \quad (12')$$

$$\pi \hat{H} + \pi \hat{D} + \hat{\lambda} \frac{\pi \hat{D} \hat{H}}{2} = 0 \quad (13')$$

Qualquer estratégia é válida para resolver o sistema de equações (1), (12') e (13'), mas aqui vamos *determinar* o multiplicador de lagrange da equação (12'),

$$\hat{\lambda} = - \frac{4}{\hat{D}}$$

Que, substituído em (13'), dá

$$\widehat{D} = \widehat{H}$$

em acordo com o resultado que já havíamos obtido por eliminação de variável, fórmula (5).

## 6. Considerações sobre os multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange é poderoso e simplifica a solução de muitos problemas, mas não é sempre que ele conduz a um sistema de equações mais fácil de resolver do que as que se obtém por eliminação de variáveis. Assim, ao enfrentar um problema de minimização, se as equações (6), (12) e (13) formarem um sistema muito difícil de resolver, vale a pena tentar outro caminho, antes de insistir em usar os multiplicadores.

## 7. Considerações sobre o problema da embalagem

Sugiro que experimente medir a razão  $D/H$  das embalagens que encontrar. Eu verifiquei que a proporção era próxima de 1 para muitas delas, enquanto, para outras, essa proporção era muito diferente. Há pelo menos dois motivos para essa diversidade.

O primeiro é que, frequentemente, há outros vínculos a obedecer. Por exemplo, uma lata de tinta necessita de uma tampa que feche bem e de preferência não encoste na tinta, por isso é muito frequente que esse tipo de produto venha em latas um pouco mais altas que o diâmetro – é o *líquido* dentro da lata que ocupa um volume com  $D/H$  muito próximo.

O outro motivo tem a ver com a finalidade. Uma lata de refrigerante é segura pela mão, e uma vez que é um produto desnecessário, considerações econômicas ficam para segundo plano e o conforto (além da propaganda, convencimento para consumo, etc.) predominam. Claro que a finalidade também pode trazer outras questões de física ao problema, e o caso do refrigerante com gás pode servir de exemplo. A lata precisa resistir à pressão interna, e um cilindro de menor diâmetro resista melhor à pressão interna e isso permita afinar a parede lateral; que esse problema é significativo percebe-se ao examinar a tampa inferior, que não é plana e sim côncava.

Enfim, a regra geral de aplicação da física e da matemática aos produtos tecnológicos é que elas contêm *propostas* para a solução dos problemas, mas *não determinam* o produto final, que tem outros requisitos simultâneos para sua realização.