1. Problema 11, cap. 4 de HMN. Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m. Na outra extremidade B, há uma massa de 0,5 kg suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (figura), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1s.

   (a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$. (**R:** $z(t) = a[\sin(\omega t) - (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)]$, com $\omega = 2\pi$ rad/s, $\omega_0 = 4\sqrt{10}$ rad/s e $a = \omega_0^2 A/(\omega_0^2 - \omega^2) = 0,066$ m, com z apontando para cima).

   (b) Calcule a força total $\vec{F}(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$. (**R:** $\vec{F} = mg\hat{z} - k[z - A\sin(\omega t)]\hat{z}$), com $A = 0,05$ m.

SOLUÇÃO COMENTADA

(a) O primeiro passo nesse tipo de exercício, e em muitos outros, é definir o(s) sistema(s) de coordenadas de interesse e, em seguida, escrever as forças que agem no sistema físico de interesse. Nesse problema, em particular, há dois sistemas de coordenadas naturais: um com origem na posição relaxada da mola e outro com origem na posição de equilíbrio. Ainda que o exercício faça menção explícita ao último, incluir no seu esboço o primeiro, ajuda a compreender melhor a geometria do problema, bem como calcular a deformação da mola.

A figura a seguir mostra os sistemas de coordenadas e as respectivas coordenadas do bloco. A partir da segunda lei de Newton, temos

$$\vec{F}_R = \vec{F}_k + m\vec{g} = m\vec{a},$$

onde a força elástica da mola depende de sua deformação. A coordenada dependente do tempo $y(t)$ introduzida na figura representa a posição da mão (extremidade A) com respeito à posição inicial. Do enunciado podemos concluir que

$$y(t) = A\sin(\omega t),$$

com $A = 0,05$ m e $\omega = 2\pi/T = 2\pi$ rad/s. Podemos então escrever no sistema Oz

$$k[y - z]\hat{z} - mg\hat{z} = m\ddot{z}\hat{z}$$

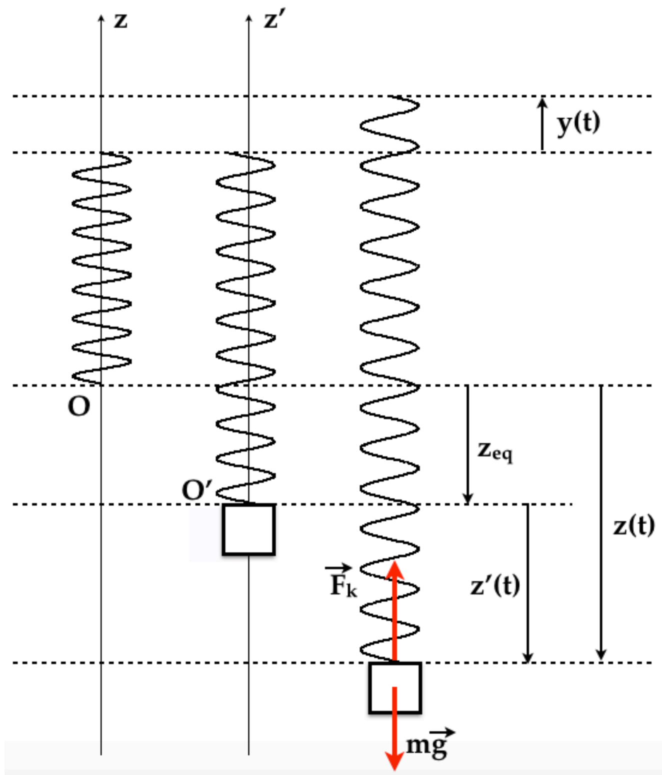
> Certifique-se de que em qualquer instante de tempo t, a deformação da mola é, de fato, $y(t) - z(t)$.

A equação diferencial para $z(t)$ é então

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + g = \frac{kA}{m}\sin(\omega t),$$

onde introduziu-se a frequêcia natural do sistema $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 4\sqrt{10}$ rad/s. A mudança para o sistema de coordenadas com origem na posição de equilíbrio $z_{eq} = -mg/k$ pode ser feita percebendo que

$$z(t) = z'(t) + z_{eq} = z'(t) - \frac{mg}{k},$$



e que pelo fato de diferirem apenas por um termo constante z_{eq}, as derivadas com respeito ao tempo de ordem maior ou igual a um (1) de z e z' são todas iguais. Logo

$$\ddot{z}' + \omega_0^2 z' = \frac{kA}{m}\sin(\omega t),$$

que é a equação diferencial para um oscilador de frequência natural ω_0 sob a ação de uma força externa

$$F_{ext} = F_0 \sin(\omega t), \quad F_0 = kA.$$

A solução geral dessa equação deve então ser a superposição da solução geral da equação homogênea associada

$$\ddot{z}_1' + \omega_0^2 z_1' = 0,$$

com uma solução particular da equação não-homogênea, que chamaremos z_2'. Se promovida a uma equação para uma função complexa $w(t) = u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$, com parte real u e parte imaginária v, satisfazendo

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad \text{e} \quad \ddot{v} + \omega_0^2 v = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t),$$

vemos que a parte imaginária de $w(t)$ é exatamente a solução particular que procuramos. Combinando linearmente as equações diferenciais para u e v com coeficientes 1 e i, respectivamente, e usando a fórmula de Euler ($e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$), temos para w

$$\ddot{w} + \omega_0^2 w = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

cuja candidata natural a solução seria $w(t) = Ce^{i\omega t}$. As derivadas primeira e segunda de $w(t)$ com respeito ao tempo satisfazem

$$\dot{w} = i\omega w, \quad \ddot{w} = -\omega^2 w.$$

Substituindo w e $\ddot{w}$ na equação diferencial

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) Ce^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t},$$

de forma que

$$C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

e a solução particular é então

$$z_2'(t) = v(t) = \mathrm{Im}\left[\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}\right] = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

A solução geral fica então

$$z'(t) = z_1'(t) + z_2'(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

Como era de se esperar também, a solução geral possui duas constantes arbitrárias B e φ, vindas da solução geral da equação homogênea associada.

Utilizemos agora as condições iniciais do problema para fixar B e φ. A velocidade do bloco pode ser obtida derivando $z'(t)$ com respeito ao tempo

$$\dot{z}'(t) = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

então

$$\begin{cases} z'(0) & = 0 = B\cos\varphi \\ \dot{z}'(0) & = 0 = -\omega_0 B \sin\varphi + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

Concluímos então que

$$\varphi = \pm\pi/2 \Longrightarrow B = \pm\frac{\omega}{\omega_0} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

de forma que a solução final (para qualquer escolha de φ) é

$$z'(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\right],$$

e lembrando que $F_0 = kA$ e que $k = m\omega_0^2$, temos também

$$z'(t) = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\right].$$

ATENÇÃO: o fato de ambas as escolhas de φ levarem à mesma solução final é uma característica particular válida somente para as condições iniciais do problema (repouso na origem). Em geral, a análise conjunta de ambas as condições (posição e velocidade iniciais) fixam φ sem ambiguidades.

(b) A força $\vec{F}(t)$ está aplicada não no bloco, mas na extremidade A da mola. Dessa forma, para determiná-la, é preciso redefinir o sistema físico de interesse. Englobando a mola, nosso sistema massa-mola passa a ter o diagrama de corpo livre da figura a seguir, onde apenas as forças externas estão representadas:

Perceba que ao incluir a mola como parte do novo sistema físico, a força $\vec{F}_k$ aplicada pela mola no bloco (no ponto B) passa a ser uma força interna ao sistema. Essa força deve ser cancelada pela reação do bloco na mola, também interna.

Aplicando a segunda lei de Newton a esse novo sistema, temos:

$$\vec{F}_R = \vec{F}(t) + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM},$$

onde $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa do sistema bloco-mola. Como a mola tem massa desprezível, o CM do sistema bloco-mola é idêntico ao do sistema formado somente pelo bloco. Logo

$$F(t) = mg + m\ddot{z}'$$

E usando a equação diferencial para z', temos que $m\ddot{z}' = kA\sin(\omega t) - kz'$. Logo

$$F(t) = mg - k\left[z' - A\sin(\omega t)\right]$$