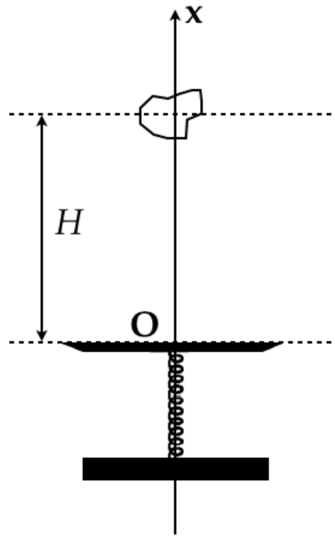


1. Um corpo de massa $m = 1000$ kg cai de uma altura $H = 1$ m sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2$ m abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

   (a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento ρ do amortecedor.

   (b) Obtenha a função horária que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

SOLUÇÃO COMENTADA

(a) A figura acima ilustra a situação, bem como define o sistema de coordenadas do problema. Nele, a origem O foi tomada como a posição da extremidade de mola relaxada.

> Lembre-se sempre de apresentar explicitamente em suas soluções o sistema de coordenadas sendo adotado.

A constante k da mola pode ser obtida usando-se a condição de equilíbrio final em que a deformação da mola (nesse caso, idêntica à coodenada de posição da massa) é $x_{eq} = -2$ m:

$$\vec{F}_R = m\vec{g} + \vec{F} = -mg\,\hat{x} - kx\,\hat{x} \Longrightarrow k = -\frac{mg}{x} = 5 \times 10^3 \text{ N/m}.$$

(b) Do enunciado, podemos concluir que o regime de amortecimento em que o sistema deve operar é o crítico, já que é aquele de maior intensidade de amortecimento, independente das condições iniciais, no sentido de que fornece a solução que vai mais rápido a zero com o tempo. Isso pode ser visto por exemplo, analisando-se o comportamento para tempos grandes ($t \to \infty$) da razão entre as solução crítica e super-crítica para condições iniciais arbitrárias

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{\text{critico}}(t)}{x_{\text{super}}(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\gamma t/2}(a+bt)}{e^{-\gamma t/2}\left(ce^{-\beta t} + de^{-\beta t}\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{a+bt}{ce^{-\beta t} + de^{-\beta t}} = 0,$$

onde usou-se a regra de L'Hospital para chegar ao resultado final.

A solução para a posição $x(t)$ da massa é então

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(a + bt) + x_{eq},$$

com constantes a e b a serem determinadas a partir das condições iniciais. Veja que o termo x_{eq} foi somado à solção de amortecimento crítico, já que para tempos grandes, ela deve ir a zero, sobrando apenas a posição de equilíbrio desejada.

A velocidade da massa é obtida derivando-se $x(t)$ com respeito ao tempo

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\gamma t/2}(a + bt) + be^{-\gamma t/2},$$

de forma que

$$\begin{cases} x(0) & = x_0 = a - 2 \\ \dot{x}(0) & = v_0 = -\frac{\gamma}{2}a + b \end{cases}$$

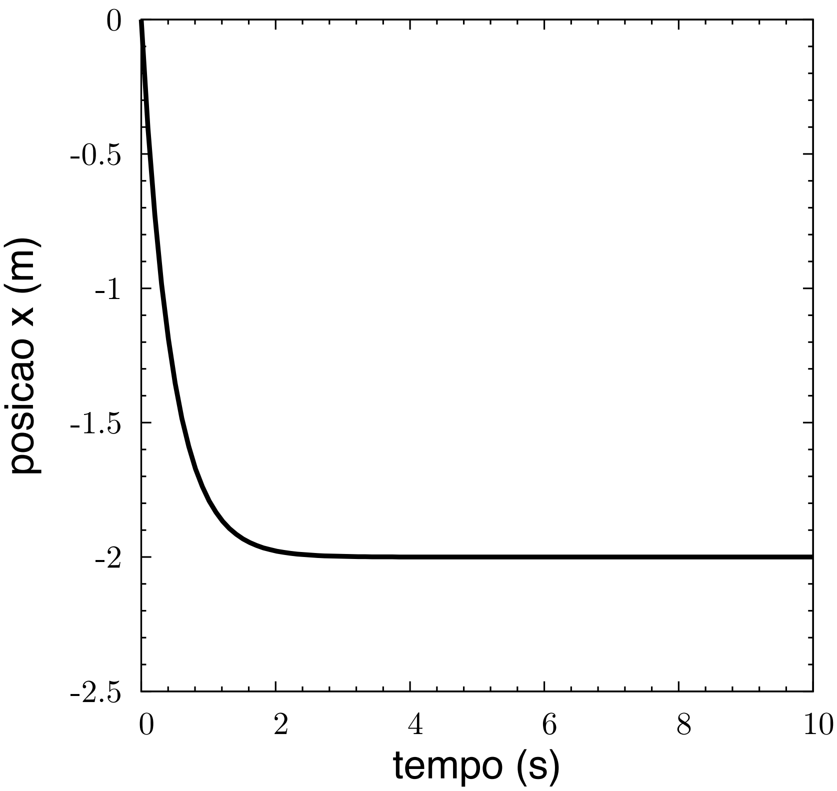
com $x_0 = 0$ m e $v_0 = -\sqrt{2gH} = -2\sqrt{5}$ m/s, logo $a = 2$ m e $b = 0$. Falta determinar ainda o valor da constante de amortecimento γ. Como estamos na condição de amortecimento crítico, há uma relação bem definida entre γ e a frequência natural do sistema $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, mais precisamente, $\gamma = 2\omega_0$, logo

$$\gamma = 2\sqrt{\frac{5 \times 10^3}{10^3}} = 2\sqrt{5}\ \text{s}^{-1}.$$

Temos então, finalmente

$$x(t) = 2\left(e^{-\sqrt{5}t} - 1\right),$$

em metros. Perceba que para tempos grandes ($t \to \infty$), a exponencial $e^{-\sqrt{5}t}$ vai a zero, de modo que a solução vai de fato para a posição de equilíbrio $x(t \to \infty) = -2$ m $= x_{eq}$. A figura seguinte mostra o comportamento da solução final em função do tempo.


0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
2
4
6
8
10
posicao x (m)
tempo (s)