LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Prova Substitutiva - 2015

1. (3,0 pontos) Uma bomba centrífuga operando com água (massa específica ρ_w) e com uma rotação N_w tem a seguinte curva de potência mecânica no eixo W_w:

$$W_w = A_w + B_w\, Q_w$$

onde A_w e B_w são constantes dimensionais de ajuste e Q_w é a vazão volumétrica de água.

a) Encontrar os parâmetros adimensionais dos quais depende o problema, supondo que as variáveis envolvidas são a potência W, vazão Q, massa específica ρ, diâmetro D e rotação N.

b) Demonstrar que uma bomba geometricamente semelhante com $k_D = \dfrac{D_o}{D_w}$ conhecido que utilizará óleo (massa específica ρ_o) e terá uma rotação N_o possui uma curva de altura de de potência mecânica no eixo W_w da forma:

$$W_o = A_o + B_o\, Q_o$$

onde Q_o é a vazão volumétrica de óleo. Supondo que, como estabelecido no item anterior, a viscosidade dinâmica não seja uma variável do problema, determinar as constantes A_o e B_o em função das constantes A_w e B_w e os fatores de escala das diferentes variáveis $k_\varphi = \dfrac{\varphi_o}{\varphi_w}$.

c) Determinar os fatores de escala de pressão $k_{\Delta P} = \dfrac{\Delta P_o}{\Delta P_w}$ e de torque no eixo $k_T = \dfrac{T_o}{T_w}$.

d) Supondo que para a bomba com água a vazão para o ponto de melhor eficiência (*bep* ou *best efficiency point*) resulta $(Q_w)_{bep}$, achar a vazão $(Q_o)_{bep}$ para o *bep* correspondente à bomba com óleo.

e) A hipótese de independência da viscosidade, realizada nos pontos anteriores, é válida para altos números de Reynolds. Para baixos Reynolds, a viscosidade deve ser acrescentada como variável envolvida na descrição do problema. Neste caso, é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo? Por quê?

Solução:

a) Por análise dimensional (ou aplicando o teorema Pi, ou da experiência de bombas), considerando que μ (ou seja o número de Reynolds) não é uma variável do problema, resulta $C_W = C_W\left(C_Q\right)$, onde:

$$C_W = \frac{W}{\rho\, N^3\, D^5} \qquad \text{(coeficiente de potência)}$$

$$C_Q = \frac{Q}{N\, D^3} \qquad \text{(coeficiente de vazão)}$$

b) Da igualdade dos números adimensionais para as bombas com água e óleo:

$$\frac{W_w}{\rho_w\, N_w^3\, D_w^5} = \frac{W_o}{\rho_o\, N_o^3\, D_o^5} \quad \Rightarrow \quad W_w = W_o \left(\frac{\rho_o}{\rho_w}\right)^{-1} \left(\frac{N_o}{N_w}\right)^{-3} \left(\frac{D_o}{D_w}\right)^{-5} = W_o\, k_\rho^{-1}\, k_N^{-3}\, k_D^{-5}$$

$$\frac{Q_w}{N_w\, D_w^3} = \frac{Q_o}{N_o\, D_o^3} \quad \Rightarrow \quad Q_w = Q_o \left(\frac{N_o}{N_w}\right)^{-1} \left(\frac{D_o}{D_w}\right)^{-3} = Q_o\, k_N^{-1}\, k_D^{-3}$$

onde $k_N = \dfrac{N_o}{N_a}$ e $k_D = \dfrac{D_o}{D_a}$. Substituindo na curva da bomba de água, resulta:

$$W_o\, k_\rho^{-1}\, k_N^{-3}\, k_D^{-5} = A_w + B_w\, Q_o\, k_N^{-1}\, k_D^{-3} \quad \Rightarrow \quad W_o = k_\rho\, k_N^3\, k_D^5\, A_w + k_\rho\, k_N^2\, k_D^2\, B_w\, Q_o^2$$

Comparando com a curva característica da bomba de óleo, resultam: $A_o = k_\rho\, k_N^3\, k_D^5\, A_w$ e $B_o = k_\rho\, k_N^2\, k_D^2\, B_w$.

c) Os incrementos de pressão se adimensionalizam como $\dfrac{\Delta p}{\rho\, N^2\, D^2}$, resultando:

$$\frac{\Delta P_w}{\rho_w\, N_w^2\, D_w^2} = \frac{\Delta P_o}{\rho_o\, N_o^2\, D_o^2} \quad \Rightarrow \quad k_{\Delta P} = \frac{\Delta P_o}{\Delta P_a} = k_\rho\, k_N^2\, k_D^2$$

onde $k_\rho = \dfrac{\rho_o}{\rho_a}$. Os torques se adimensionaliza como $\dfrac{T}{\rho\, N^2\, D^5}$, resultando:

$$\frac{T_w}{\rho_w\, N_w^2\, D_w^5} = \frac{T_o}{\rho_o\, N_o^2\, D_o^5} \quad \Rightarrow \quad k_T = \frac{T_o}{T_w} = k_\rho\, k_N^2\, k_D^5$$

d) Da igualdade do coeficiente de vazão para a *bep*, resulta:

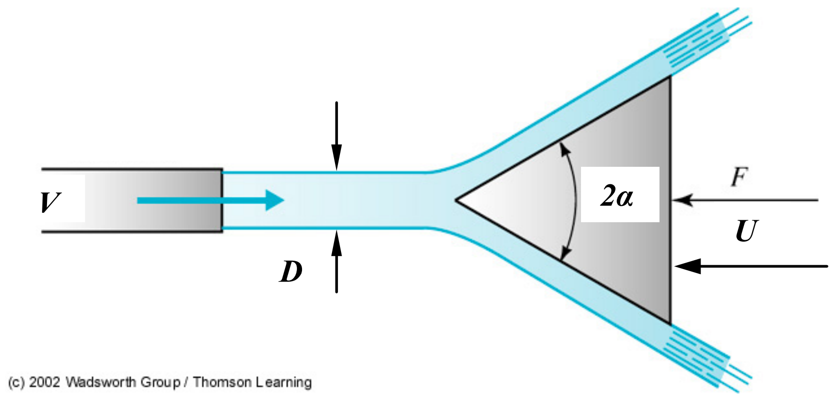
$$\frac{(Q_w)_{bep}}{N_w\, D_w^3} = \frac{(Q_o)_{bep}}{N_o\, D_o^3} \quad \Rightarrow \quad (Q_o)_{bep} = k_N\, k_D^3\, (Q_w)_{bep}$$

e) Se a viscosidade é acrescentada como variável envolvida na descrição do problema, não é possível escolher de maneira independente a rotação e o diâmetro na bomba de óleo, pois deve ser satisfeita a igualdade de número de Reynolds $\dfrac{\rho\, N\, D^2}{\mu}$ para modelo e protótipo:

$$\frac{\rho_w\, N_w\, D_w^2}{\mu_w} = \frac{\rho_o\, N_o\, D_o^2}{\mu_o} \quad \Rightarrow \quad k_\rho\, k_N\, k_D^2\, k_\mu^{-1} = 1$$

2. (3,5 pontos) Um jato de líquido de massa específica ρ, diâmetro D e velocidade de saída V descarga na atmosfera e incide centrado em um cone de ángulo 2α, como mostra a figura. Desprezando forças volumétricas e perdas, determinar a força F necessária para aproximar o cone com uma velocidade constante U.

Dica: considerar um sistema solidário ao cone e observar que os módulos das velocidades relativas de entrada e saída não mudam (por que?)



Conservação de massa: $0 = \int_{VC} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon + \int_{SC} \rho (\boldsymbol{V} . \breve{\boldsymbol{n}}) dA = \dfrac{d}{dt} \int_{VC} \rho\, d\upsilon + \int_{SC} \rho (\boldsymbol{V}_r . \breve{\boldsymbol{n}}) dA$

Conservação do momento linear:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{V}) d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{V} (\boldsymbol{V} . \breve{\boldsymbol{n}}) dA = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \boldsymbol{V}\, d\upsilon + \int_{SC} \rho \boldsymbol{V} (\boldsymbol{V}_r . \breve{\boldsymbol{n}}) dA$$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, M. C. Potter & D. C. Wiggert, Thomson, 2004)

Solução:

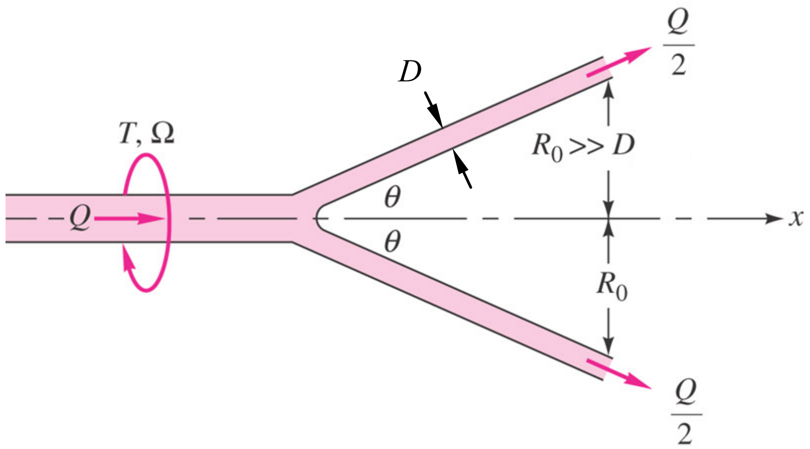
No sistema solidário ao cone, o jato está a pressão atmosférica constante. Como não existem perdas, vale a equação de Bernoulli; desprezando as forças volumétricas, deve ser então o módulo da velocidade relativa $c = V + U = cte$. O cone desvia o jato em um ângulo α. Da equação de continuidade, resulta:

$$\dot{m} = \rho\, c \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{4} \rho (V + U) \pi D^2 = cte$$

Da equação de conservação do momento linear na direção do escoamento, resulta:

$$-F = \dot{m}\left(c\cos\alpha - c\right) = -\dot{m}\,c\left(1-\cos\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{4}\rho\,\pi\,D^2\left(V+U\right)^2\left(1-\cos\alpha\right)$$

3. (3,5 pontos) A junta em Y da figura divide a vazão de líquido no tubo em partes iguais $\frac{Q}{2}$ que saem de forma suave com um ângulo θ à distância R_0 do eixo e descarregam na pressão atmosférica, como mostra a figura. Desprezar as forças volumétricas e o atrito e considerar que os diâmetros dos dutos D são muito pequenos, isto é $R_0 >> D$. Se ρ é a massa específica do líquido, encontrar uma expressão para o torque T em torno do deixo x necessário para manter o sistema girando com velocidade angular Ω.
Dica: escolha um volume de controle que gire solidário à junta mas meça as velocidades em um sistema de referência absoluto em repouso. Quais são as vantagens desta escolha? Considere as componentes da velocidade absoluta na direção x, na direção radial (perpendicular a x, no papel) e na direção tangencial (perpendicular ao plano do papel) na contabilidade do fluxo de momento angular e justifique quais têm contribuição.



Conservação do momento angular:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \int_{VC} \boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\boldsymbol{V}\right)d\upsilon + \int_{SC}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA = \frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\,d\upsilon + \int_{SC}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA$$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, F. M. White, McGraw-Hill, 2011)

Solução:
Consideramos um volume de controle que gira solidário à junta mas medimos as velocidades em um sistema absoluto em repouso. As vantagens são: a) o impulso angular não muda nesse volume de controle; b) as direções e velocidades relativas de saída são conhecidas; c) o sistema de referência é inercial. A velocidade absoluta na junta pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{V} = \frac{Q}{2\,S}\cos\theta\,\breve{\boldsymbol{x}} + \frac{Q}{2\,S}\sin\theta\,\breve{\boldsymbol{r}} + \Omega\,r\,\breve{\boldsymbol{t}}$$

onde S é a área de passagem. Da conservação do momento angular:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \frac{d}{dt}\int_{VC}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\,d\upsilon + \int_{SC}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA$$

O momento angular integrado no volume de controle não varia no tempo. Por outro lado o fluxo de momento angular entrante é zero por simetria, de maneira que:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = \int_{A_{up}}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA + \int_{A_{down}}\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right)dA = \rho\frac{Q}{2}\left(\boldsymbol{r}_{up}\times\boldsymbol{V}_{up}\right) + \rho\frac{Q}{2}\left(\boldsymbol{r}_{down}\times\boldsymbol{V}_{down}\right)$$

As contribuições do impulso angular correspondentes às componentes da velocidade em $\breve{\boldsymbol{x}}$ e em $\breve{\boldsymbol{r}}$ se anulam entre a parte superior e inferior, restando a contribuição da componente tangencial:

$$\boldsymbol{r}_{up}\times\boldsymbol{V}_{up} = \boldsymbol{r}_{down}\times\boldsymbol{V}_{down} = R_0\left(\Omega\,R_0\right)\breve{\boldsymbol{x}} = \Omega\,R_0^2\,\breve{\boldsymbol{x}}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext} = T\,\breve{\boldsymbol{x}} = \rho\,Q\,\Omega\,R_0^2\,\breve{\boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \quad T = \rho\,Q\,\Omega\,R_0^2$$