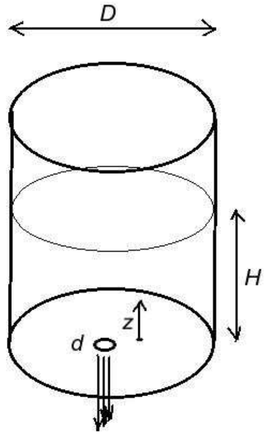
2ª Prova de PME3332 - Mecânica dos Fluidos

1ª Questão (4,0 pontos): Um reservatório cilíndrico de diâmetro D tem seu topo aberto à atmosfera. A aceleração da gravidade é g. No instante $t = 0$ o nível de líquido de peso específico γ está na cota $z = H$, quando um orifício de diâmetro d é aberto no fundo. Desprezando perdas de carga e considerando movimento lento da superfície livre, deduza:

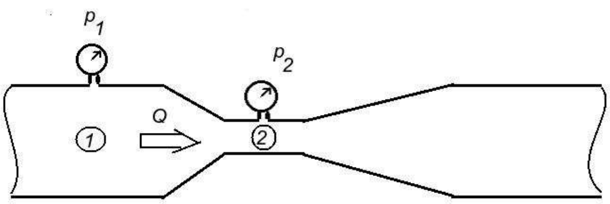
a)Uma expressão para a variação da altura da superfície livre $\frac{dz}{dt}$ (2,0 pontos);

b)Uma expressão para a altura $z(t)$ da superfície livre, lembrando que $z(t=0)=H$ (1,0 ponto);

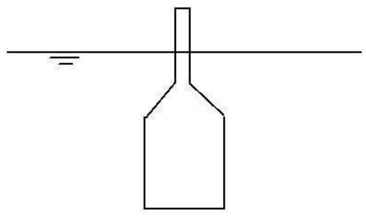
c)Uma expressão para o tempo t_f necessário para esvaziar completamente o reservatório(1,0 ponto).



2ª Questão (3,0 pontos): Um medidor de vazão do tipo tubo de Venturi consiste numa garganta de área de seção A_2 que segue um trecho de conduto de área A_1 como na figura. O fluido tem peso específico γ e a aceleração da gravidade é g. As pressões nas seções (1) e (2) são respectivamente p_1 e p_2. Deduza uma expressão para a vazão volumétrica Q desprezando perdas de carga. Considere um conduto horizontal.



3ª Questão (3,0 pontos): Deseja-se projetar uma bóia que deve conter instrumentação para estudos oceanográficos de forma a que não entre em ressonância com as ondas. A frequência natural de oscilação vertical da bóia f_n é função de sua massa m, de sua área de seção transversal A na superfície livre e do peso específico do fluido γ. Um modelo da bóia passa por ensaios e sua frequência f_n é determinada. O que acontecerá com a frequência f_n se fizermos um protótipo geometricamente semelhante dividindo por quatro a área mantendo os outros parâmetros iguais? E se por outro lado fizermos o protótipo geometricamente semelhante multiplicando por nove a massa mantendo os outros parâmetros iguais?



Dados:

$$\frac{dm_{VC}}{dt} + \int_{SC} \rho \vec{v}.\vec{n}\, dS = 0 \qquad \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + H_{\text{máquina}} - \text{perdas}$$

1ª Questão (4,0 pontos): Solução

Se considerarmos um ponto (1) na superfície livre e um ponto (2) no jato da saída que se forma junto ao orifício no fundo do tanque, como não temos máquina ou perda de carga:

$$\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2=\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1$$

Ambos os pontos estão na atmosfera, logo $p_1 = p_2$. Como o movimento da superfície livre é lento, podemos considerar a energia cinética desprezível, $V_1^2 \cong 0$. Como $z_2 = 0$, $z_1 = z$, temos:

$$V_2=\sqrt{2gz}$$

Essa é a velocidade com que o reservatório se esvazia. A qualquer instante, a massa de líquido contida no reservatório é dada por:

$$m_{\text{reservatório}}=\rho\frac{\pi D^2}{4}z$$

Aplicando a equação da continuidade para um volume de controle ao redor do reservatório de modo que $m_{VC} = m_{\text{reservatório}}$ e notando que o único fluxo de massa através da superfície de controle é dado pelo jato que escapa pelo orifício do fundo:

$$\frac{dm_{VC}}{dt}+\int_{SC}\rho\,\vec{v}.\vec{n}\,dS=0\;\Rightarrow\;\rho\frac{\pi D^2}{4}\frac{dz}{dt}+\rho V_2\frac{\pi d^2}{4}=0$$

Obtemos então:

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=-\sqrt{2gz}\left(\frac{d}{D}\right)^2}$$

Podemos escrever:

$$z^{-\frac{1}{2}}\,dz=-\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2 dt$$

integrando:

$$2\,z^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2 t+\text{const}$$

Como para $t = 0$ temos $z = H$, resulta:

$$\boxed{z=\left(\sqrt{H}-\sqrt{\frac{g}{2}}\left(\frac{d}{D}\right)^2 t\right)^2}$$

Um tempo t_f é necessário para que $z = 0$, logo:

$$\sqrt{\frac{g}{2}}\left(\frac{d}{D}\right)^2 t_f = \sqrt{H}$$

Isso resulta:

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{D}{d}\right)^2}$$

2ª Questão (3,0 pontos): Solução

Aplicando a equação da energia entre (1) e (2) e lembrando que não há máquinas ou perda de carga:

$$\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2=\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1$$

Da equação da continuidade, temos que:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Aplicando esse resultado na equação da energia e lembrando que $z_1 = z_2$:

$$\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}=\frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2+\frac{p_1}{\gamma}$$

Reordenando:

$$\frac{V_2^2}{2g}\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$$

Resulta a velocidade V_2:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g\left(p_1 - p_2\right)}{\gamma\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

E a vazão é dada por:

$$\boxed{Q = A_2\sqrt{\frac{2g\left(p_1 - p_2\right)}{\gamma\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}}$$

3ª Questão (3,0 pontos): Solução

Temos um problema envolvendo 4 grandezas físicas dimensionais:

$$f_n = f\left(m, A, \gamma\right)$$

Usando *M*,*L*,*T* como grandezas fundamentais obtemos a matriz dimensional:

	f_n	m	A	γ
M	0	1	0	1
L	0	0	2	-2
T	-1	0	0	-2

Usando *F*,*L*,*T* como grandezas fundamentais obtemos a matriz dimensional:

	f_n	m	A	γ
F	0	1	0	1
L	0	-1	2	-3
T	-1	2	0	0

Usando qualquer um dos dois conjuntos de grandezas fundamentais é fácil ver que resulta um único adimensional:

$$\boxed{\Pi_1 = f_n\sqrt{\frac{m}{\gamma A}}}$$

Como não há outros adimensionais como os quais formar uma relação funcional, temos que:

$$\Pi_1 = f_n\sqrt{\frac{m}{\gamma A}} = \text{constante}$$

Aplicando a semelhança:

$$f_{nM}\sqrt{\frac{m_M}{\gamma_M\ A_M}} = f_{nP}\sqrt{\frac{m_P}{\gamma_P\ A_P}}$$

Assim, se $A_P = A_M/4$:

$$\boxed{f_{nP} = \frac{1}{2} f_{nM}}$$

Se $m_P = 9\ m_M$:

$$\boxed{f_{nP} = \frac{1}{3} f_{nM}}$$