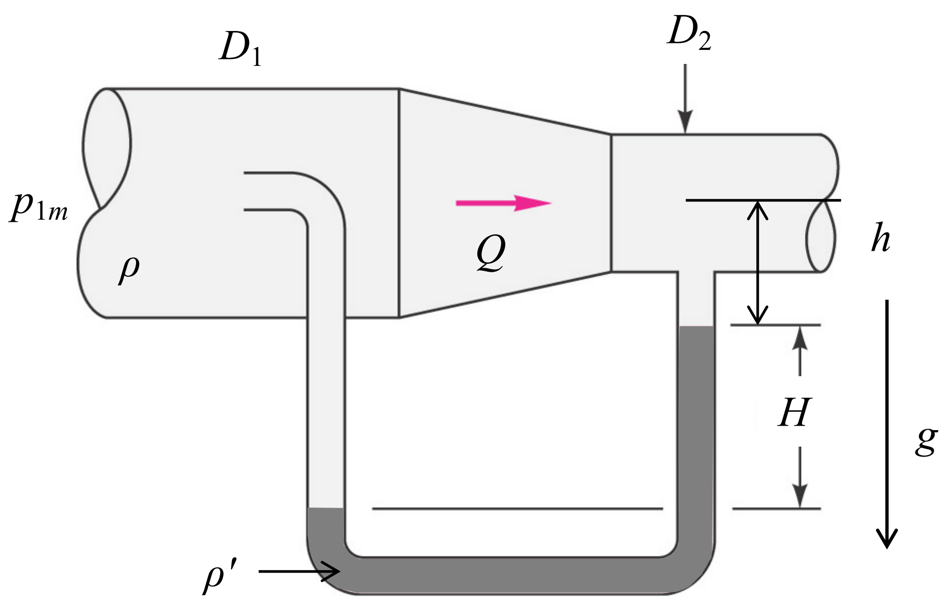
LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Segunda Prova - 2015

1. (3 pontos) Na figura, as massas específicas do fluido circulante no duto e no manômetro são respectivamente ρ e $\rho' > \rho$. Se o jato descarrega na pressão atmosférica e são conhecidos os diâmetros D_1 e D_2, a aceleração gravitacional g e a altura H, calcular a pressão manométrica a montante p_{1m} e a vazão volumétrica Q. Desprezar as perdas.

Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = cte$



Solução:

Da equação de continuidade: $V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = \beta^2$, onde $\beta = \frac{D_2}{D_1}$.

Da equação de Bernoulli para a linha de corrente central, com a mesma cota, entre 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_{1m} = p_1 - p_a = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left(1-\beta^4\right) \qquad (1)$$

Da equação de Bernoulli para a linha de corrente central, com a mesma cota, entre 1 e o ponto de estagnação no tubo:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_s$$

Da relação no manômetro, supondo que h é a distância entre a linha de corrente central e o nível H (ver figura):

$$p_s + \rho g (H+h) = p_a + \rho g h + \rho' g H + \quad \Rightarrow \quad p_s = p_a + (\rho' - \rho) g H$$

Eliminando p_s das relações anteriores, resulta:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_a + (\rho' - \rho) g H \quad \Rightarrow \quad p_{1m} = (\rho' - \rho) g H - \frac{1}{2}\rho \beta^4 V_2^2 \qquad (2)$$

Eliminando p_{1m} entre as Eq. (1) e (2), resulta:

$$\frac{1}{2}\rho V_2^2\left(1-\beta^4\right)=\left(\rho'-\rho\right)g\,H-\frac{1}{2}\rho\,\beta^4\,V_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_2=\left[2\,g\,H\left(\frac{\rho'}{\rho}-1\right)\right]^{1/2} \qquad (3)$$

$$Q=\frac{\pi}{4}\,D_2^2\,V_2=\frac{\pi}{4}\,D_2^2\left[2\,g\,H\left(\frac{\rho'}{\rho}-1\right)\right]^{1/2}$$

Substituindo V_2 da Eq. (3) na Eq. (1), resulta:

$$p_{1m}=\frac{1}{2}\rho\left(1-\beta^4\right)2\,g\,H\left(\frac{\rho'}{\rho}-1\right) \quad \Rightarrow \quad p_{1m}=\left(\rho'-\rho\right)\left(1-\beta^4\right)g\,H$$

2. (3 pontos) A velocidade de propagação V de uma onda superficial em águas profundas depende do comprimento de onda λ, a massa específica ρ, a aceleração gravitacional g e a tensão superficial σ. Sabendo que a dimensão da tensão superficial é força por unidade de comprimento:

a) Achar um conjunto de parâmetros adimensionais e a relação funcional que descreve o fenômeno.
b) Sabendo que a velocidade de propagação é independente da tensão superficial para comprimentos de onda grandes, achar a relação funcional válida para esta condição.
c) Sabendo que a velocidade de propagação é independente da aceleração gravitacional para comprimentos de onda pequenos, achar a relação funcional válida para esta condição.
d) Baseado nos resultados anteriores, graficar em forma qualitativa a relação entre velocidade de propagação e comprimento de onda, permanecendo o resto das variáveis fixas.

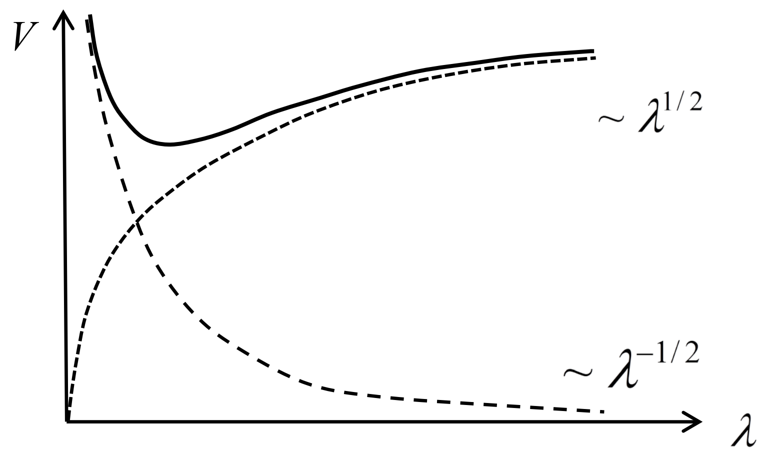
Solução:

a) Existem 5 variáveis dimensionais e 3 dimensões básicas, de maneira que teremos 2 parâmetros adimensionais. Um deles pode ser o Froude $\dfrac{V^2}{g\,\lambda}$, enquanto o outro, sabendo as unidades da tensão superficial, pode ser $\dfrac{\sigma}{\rho V^2 \lambda}$. A relação funcional resulta, em forma implícita, $\phi\left(\dfrac{V^2}{g\,\lambda},\dfrac{\sigma}{\rho V^2\lambda}\right)=0$.

b) Para $\lambda >> 1$, V é independente de σ, de maneira que $\dfrac{V^2}{g\,\lambda}\cong cte=C_g$, onde C_g é uma constante adimensional. Assim, resulta $V\cong\left(C_g\,g\right)^{1/2}\lambda^{1/2}$.

c) Para $\lambda << 1$, V é independente de g, de maneira que $\dfrac{\sigma}{\rho V^2\lambda}\cong cte=C_\sigma$, onde C_σ é uma constante adimensional. Assim, resulta $V\cong\left(\dfrac{\sigma}{\rho\,C_\sigma}\right)^{1/2}\dfrac{1}{\lambda^{1/2}}$.

d) Em forma qualitativa, a relação funcional resulta:



3. (4 pontos) Como é bem conhecido pelos jogadores de futebol, beisebol e golfe, uma bola viajando no ar tende a curvar a trajetória da sua direção primária se estiver girando. Considerar uma esfera de diâmetro D viajando com uma velocidade V através de um fluido incompressível de massa específica ρ e viscosidade μ. A esfera está girando com velocidade angular Ω. Estamos interessados na força F exercida na esfera na direção perpendicular ao seu movimento e ao seu eixo de rotação. Conhecemos um estudo experimental que mostra que, para números de Reynolds elevados, a força F resulta independente da viscosidade μ. Além disto, medições em uma esfera de diâmetro D_m viajando em um fluido de massa específica ρ_m com uma velocidade V_m mostram que a força F_m é proporcional a Ω_m, com a relação:

$$F_m = A_m \, \Omega_m$$

onde A_m é uma constante de proporcionalidade dimensional. A correlação anterior é válida para $\Omega_m \le (\Omega_m)_t$, onde $(\Omega_m)_t$ é a velocidade de transição no modelo.

a) Definir um conjunto de parámetros adimensionais dos quais depende o fenômeno.
b) Baseados na relação dimensional para o modelo, achar a relação universal entre os parámetros adimensionais para todos os problemas semelhantes.
c) Calcular a relação funcional em um protótipo da força F_p em função da velocidade angular Ω_p para uma esfera de diâmetro D_p viajando em um fluido de massa específica ρ_p com uma velocidade V_p.
d) Determinar a velocidade angular de transição para o protótipo $(\Omega_p)_t$.

Onde corresponda, expressar os resultados em função dos fatores de escala $k_\varphi = \dfrac{\varphi_m}{\varphi_p}$.

(Adaptado de *Introduction to Fluid Mechanics*, James E. Fay, MIT Press, 1998)

Solução:

a) Uma relação entre parâmetros adimensionais pode ser $\dfrac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\dfrac{\rho V D}{\mu}, \dfrac{\Omega D}{V}\right)$.

Como o problema é independente da viscosidade, resulta independente do número de Reynolds, isto é:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g\left(\frac{\Omega D}{V}\right) \tag{1}$$

b) Chamando $C_F = \dfrac{F}{\rho V^2 D^2}$ e $St = \dfrac{\Omega D}{V}$, a condição de semelhança entre modelo e qualquer problema semelhante é:

$$C_F = \frac{F_m}{\rho_m V_m^2 D_m^2} \quad \Rightarrow \quad F_m = C_F\, \rho_m V_m^2 D_m^2 \tag{2}$$

$$St = \frac{\Omega_m D_m}{V_m} \quad \Rightarrow \quad \Omega_m = St \frac{V_m}{D_m} \tag{3}$$

Substituindo na relação para o modelo:

$$C_F\, \rho_m V_m^2 D_m^2 = A_m\, St \frac{V_m}{D_m} \quad \Rightarrow \quad C_F = \frac{A_m}{\rho_m V_m D_m^3} St$$

$$C_F = A\, St \tag{4}$$

onde $A = \dfrac{A_m}{\rho_m V_m D_m^3}$ é uma constante adimensional universal.

c) Da igualdade do número de Strouhal:

$$\frac{\Omega_m D_m}{V_m} = \frac{\Omega_p D_p}{V_p} \quad \Rightarrow \quad k_\Omega = \frac{\Omega_m}{\Omega_p} = k_V\, k_D^{-1} \tag{5}$$

onde $k_V = \dfrac{V_m}{V_p}$ e $k_D = \dfrac{D_m}{D_p}$.

Da igualdade da força adimensional, resulta:

$$\frac{F_m}{\rho_m V_m^2 D_m^2} = \frac{F_p}{\rho_p V_p^2 D_p^2} \quad \Rightarrow \quad k_F = \frac{F_m}{F_p} = k_\rho\, k_V^2\, k_D^2 \tag{6}$$

onde $k_\rho = \dfrac{\rho_m}{\rho_p}$.

Substituindo Ω_m e F_m de (5) e (6) na correlação no modelo, resulta:

$$k_\rho\, k_V^2\, k_D^2 F_p = A_m\, k_V\, k_D^{-1}\, \Omega_p \quad \Rightarrow \quad F_p = k_\rho^{-1}\, k_V^{-1}\, k_D^{-3}\, A_m\, \Omega_p = A_p\, \Omega_p \tag{7}$$

onde $A_p = k_\rho^{-1}\, k_V^{-1}\, k_D^{-3}\, A_m$.

d) Da igualdade do número de Strouhal, resulta $\left(\Omega_p\right)_t = k_V^{-1}\, k_D \left(\Omega_m\right)_t$.

IMPORTANTE:

- Escrever de maneira legível.
- Anteceder as expressões matemáticas com um raciocínio ou com uma explicação do que vai ser feito. NÃO SERÃO ACEITAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS SEM UM RACIOCÍNIO!