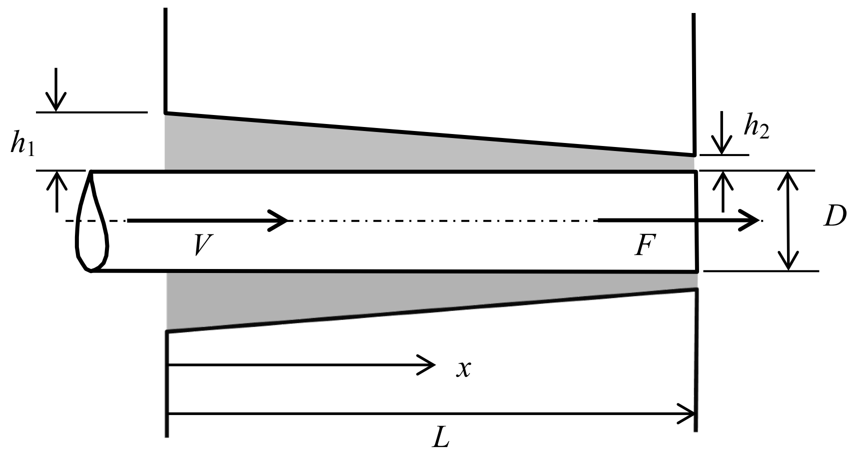
LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Primeira Prova - 2015

1. (3 pontos) Um mancal de translação de diâmetro D se desloca com velocidade constante V. Devido a uma defeito no processo de usinagem, a superfície exterior fixa varía sua espessura na direção axial de manera linear entre os valores h_1 e h_2 ao longo do comprimento L, como mostra a figura. Se a espessura está preenchida com um líquido de viscosidade μ, determinar a força F e a potência W no mancal.

Lei de viscosidade de Newton: $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$

Ajuda para o cálculo: $\int \dfrac{dx}{a+b\,x} = \dfrac{1}{b}\ln(a+b\,x) + cte$



Solução:
A tensão de cisalhamento (na direção axial) resulta:

$$\tau = \mu \frac{V}{h(x)}$$

onde $h(x) = h_1 + \dfrac{h_2 - h_1}{L} x = h_1 + m\,x$ é a espessura local, e $m = \dfrac{h_2 - h_1}{L}$. O elemento de força dF resulta o produto da tensão de cisalhamento vezes o elemento de área:

$$dF = \tau\,(\pi\,D\,dx) = \pi\,\mu V\,D \frac{dx}{h(x)} = \pi\,\mu V\,D \,\frac{dx}{h_1 + m\,x}$$

Integrando, o torque resulta:

$$F = \pi\,\mu V\,D \int_0^L \frac{dx}{h_1 + m\,x} = \pi\,\mu V\,D \left[\frac{1}{m}\ln(h_1 + m\,x)\right]\Bigg|_0^L = \pi\,\mu V\,D \frac{1}{m} \ln\left(\frac{h_1 + m\,L}{h_1}\right)$$

Como $h_1 + m\,L = h_2$, resulta finalmente:

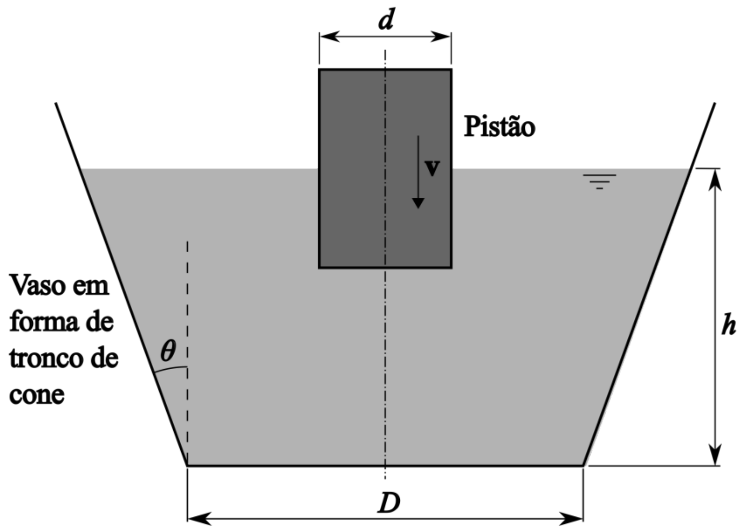
$$F = \frac{\pi\,\mu V\,D\,L}{h_2 - h_1} \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{\pi\,\mu V\,D\,L}{h_1 - h_2} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

A potência resulta:

$$W = F\,V = \frac{\pi\,\mu V^2\,D\,L}{h_1 - h_2}\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

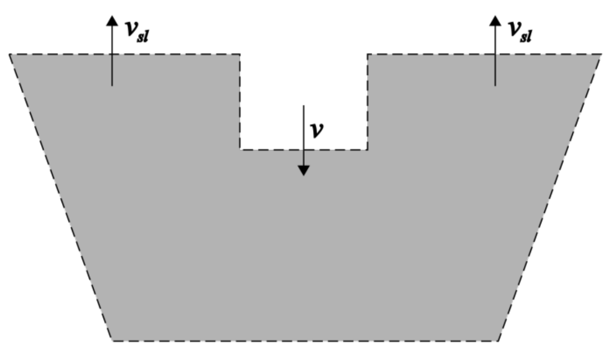
2. (3 pontos) O tronco de cone da figura contém líquido incompressível com profundidade h. Um pistão sólido de diâmetro d penetra pela superfície, à velocidade v. Definir um volume de controle conveniente e deduzir uma expressão analítica para a taxa de elevação $\dfrac{dh}{dt}$ da superfície do líquido.

Conservação da massa: $0 = \int_{\upsilon}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\upsilon + \int_A \rho\,(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})dA$ ou $0 = \frac{d}{dt}\int_{\upsilon}\rho\,d\upsilon + \int_A \rho\,(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}})dA$



Solução:

Considerando um volume de controle fixo:



o primeiro termo da equação da conservação de massa $0 = \int_{\upsilon}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\upsilon + \int_A \rho\,(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}})dA$ é nulo. Só há fluxo na superfície livre e na base do pistão e o fluido é incompressível. Assim:

$$\int_{\text{sup. livre}} v_{sl}\,dA - \int_{\text{base do pistão}} v\,dA = 0$$

Mas $v_{sl} = dh/dt$, então:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\int dA_{\text{sup. livre}} - v\int dA_{\text{base do pistão}} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\pi}{4}\left[(D + 2h\,\mathrm{tg}\,\theta)^2 - d^2\right] - v\frac{\pi d^2}{4} = 0$$

Que resulta em: $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{vd^2}{\left(D + 2h\text{tg}\,\theta\right)^2 - d^2} = \dfrac{v}{\left(\dfrac{D + 2h\text{tg}\,\theta}{\text{d}}\right)^2 - 1}$

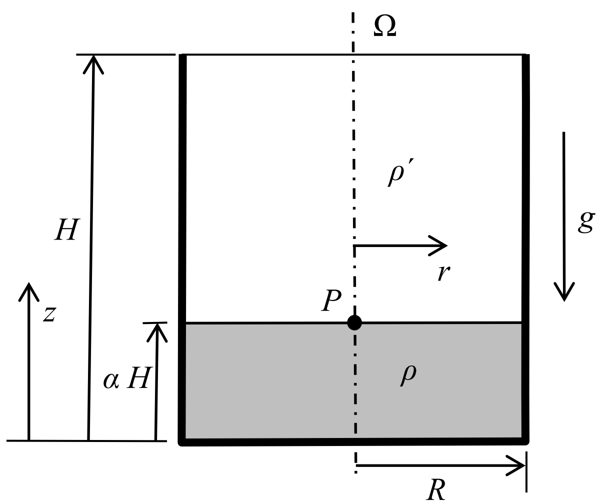
3. (4 pontos) Um tanque cilíndrico vertical de raio R e altura H está preenchido por um líquido de massa específica ρ até um nível αH inferior à metade ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) e depois por outro líquido de massa específica $\rho' < \rho$ desde o nível anterior até o topo, como mostra a figura. Seguidamente o tanque é girado em torno do eixo central aumentando a velocidade angular gradualmente até chegar a uma velocidade angular Ω com uma condição de rotação de sólido rígido.

a) Desenhar um esquema qualitativo desta situação e determinar a velocidade angular para quando o nível mínimo da interfase (ponto *P*) chega ao fundo do tanque.
b) Para esta condição, determinar o volume de líquido derramado.

Dica: o volume de líquido de massa específica ρ permanece constante nas condições inicial e final.

Distribuição de pressão, rotação de sólido rígido: $p - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \rho g z = cte$

Volume υ do sólido de revolução da curva $z = z(r) \geq 0$ ao redor do eixo z, entre a e $b > a$: $\upsilon = 2\pi \int_a^b z(r) r\, dr$.



Solução:

a) Para determinar Ω, sabemos que o volume de líquido da camada inferior permanece constante nas condições inicial e final. O volume na condição inicial vale $\upsilon = \pi R^2 \alpha H$, enquanto o volume na condição final pode ser calculado aplicando a distribuição de pressão na interfase entre o fundo do tanque e uma posição qualquer na superfície:

$$p_i = p_i - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \rho g z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

O volume no estado final resulta:

$$\upsilon = 2\pi \int_0^R z(r) r\, dr = \frac{\pi\,\Omega^2}{g}\int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\,\Omega^2 R^4}{4g}$$

Igualando os volumes, resulta $\pi R^2 \alpha H = \dfrac{\pi\,\Omega^2 R^4}{4g} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \dfrac{2(\alpha g H)^{1/2}}{R}$

Substituindo a velocidade angular, vemos que a altura que trepa a interfase é

$$z(R) = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} = \frac{4\alpha g H}{R^2}\frac{R^2}{2g} = 2\alpha H$$

Como $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, resulta $z(R) < H$; em consequênça, existirá uma camada de espessura $H - 2\alpha H = (1-2\alpha)H$ de líquido da camada superior, sendo esta a altura do líquido no centro (mínimo).

b) O volume total de líquido da camada superior no estado final resulta, então:

$$(1-2\alpha)\pi R^2 H$$

O volume do líquido da camada superior derramado υ_d resulta, finalmente:

$$\upsilon_d = [(1-\alpha)H - (1-2\alpha)]\pi R^2 H = \alpha\,\pi R^2 H$$

Como o volume inicial de líquido da camada superior é $\alpha\,\pi R^2 H$, resulta $\upsilon_d > 0$ para $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.