

**MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I**

**1º Semestre de 2017 - Prof. Nelson Kuhl**

**PREC - Data de entrega: 01/08/2017**

**Questão 1** Obtenha a solução geral de

$$\text{a) } x' - 2tx = t, \quad \text{b) } x' - (\operatorname{tg} t)x = \cos t.$$

**Questão 2** Para as equações da questão anterior, determine a solução do problema de valor inicial  $x(0) = 1$ . Apresente os intervalos maximais das soluções.

**Questão 3** A equação

$$x' + P(t)x + Q(t)x^2 = f(t)$$

é conhecida como a Equação de Ricatti.

- a) Mostre que se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções da Equação de Ricatti, então a função  $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$  é solução da Equação de Bernoulli

$$y' + (P + 2x_2Q)y - Qy^2 = 0.$$

- b) Sabendo que  $x(t) = t$  é solução da Equação de Ricatti

$$x' + t^3x - t^2x^2 = 1$$

determine as demais soluções.

**Questão 4** Obtenha a solução geral de

$$x' - (\operatorname{tg} t)x - (\cos t)x^2 = -\frac{1}{\cos t}$$

sabendo que  $x_1 = 1/\cos t$  e  $x_2 = -1/\cos t$  são soluções.

**Questão 5** Considere o problema de valor inicial

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1,$$

cuja solução exata é  $x(t) = 1/(1 - t)$ . Calcule as aproximações para  $x(0.5)$  pelos métodos de Euler e de Heun com  $h = 0.25$  e compare os erros obtidos com os dois métodos.

**Questão 6** Determine uma solução geral para as seguintes equações

a)  $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

b)  $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$

**Questão 7** Obtenha soluções particulares das equações

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^2 e^{2t}, \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2te^{-t}.$$

**Questão 8** Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\ddot{x} + x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

é dada por

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s) ds + x_0 \cos t + v_0 \sin t.$$

**Questão 9** Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Ache as soluções gerais quando  $\alpha = 1/2$  e  $\alpha = 2$  e classifique o equilíbrio em cada caso.

b) Discuta o comportamento do sistema quando  $1/2 < \alpha < 2$ .

**Questão 10** Calcule  $e^{tA}$  onde a matriz  $A$  é dada por

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ,      b)  $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ .