① Relação de Recorrência de Segunda Ordem em $x_0 \neq 0$

Ex. Procure soluções em séries de potências da eq. dif. $y'' - xy' - y = 0$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

Sol.: A eq. dif. é ORDINÁRIA para todo valor de x. O coeficiente que acompanha a segunda derivada é 1.

Vamos propor uma solução em série de potências centrada em $x_0 = 1$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

Colocando y, y' e y'' em $y'' - xy' - y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$x = 1 + (x-1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{\overset{k}{n-2}} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{\overset{k}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} (x-1)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x-1)^{\overset{k}{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{\overset{k}{n}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k\right] (x-1)^k = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-1)^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-1)^k$$

2

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k-1)a_{k+2} - a_k\right](x-1)^k = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)a_{k+1} + k a_k\right](x-1)^k$$

$$2a_2 - a_0 = a_1 \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2}}$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k = (k+1)a_{k+1} + k a_k$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = (k+1)a_{k+1} + (k+1)a_k$$

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + a_k}{k+2}}$$ relação de recorrência de segunda ordem.

Estamos procurando uma solução do tipo

$y_{g.h.}(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ $\quad a_0$ e $a_1 \in \mathbb{R}$

Para encontrar $y_1(x)$: $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$

" " $y_2(x)$: $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$

$a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$k=1 \rightarrow a_3 = \frac{a_2 + \cancel{a_1}^{\,0}}{3} = \frac{a_0}{6}$$

$$k=2 \rightarrow a_4 = \frac{a_3 + a_2}{4} = \frac{a_0}{6}$$

$$k=3 \rightarrow a_5 = \frac{a_4 + a_3}{5} = \frac{a_0}{15}$$

Em geral, é muito difícil encontrar um termo n-ésimo.

Por isso se escrevem somente os primeiros

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^5 + \ldots$$

3

$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 \neq 0$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}$$

$k = 1 \longrightarrow \quad a_3 = \dfrac{a_2 + a_1}{3} = \dfrac{1}{2} a_1$

$k = 2 \longrightarrow \quad a_4 = \dfrac{a_3 + a_2}{4} = \dfrac{1}{4} a_1$

$k = 3 \longrightarrow \quad a_5 = \dfrac{a_4 + a_3}{5} = \dfrac{3}{20} a_1$

$$y_2(x) = 1(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{3}{20}(x-1)^5 + \cdots$$