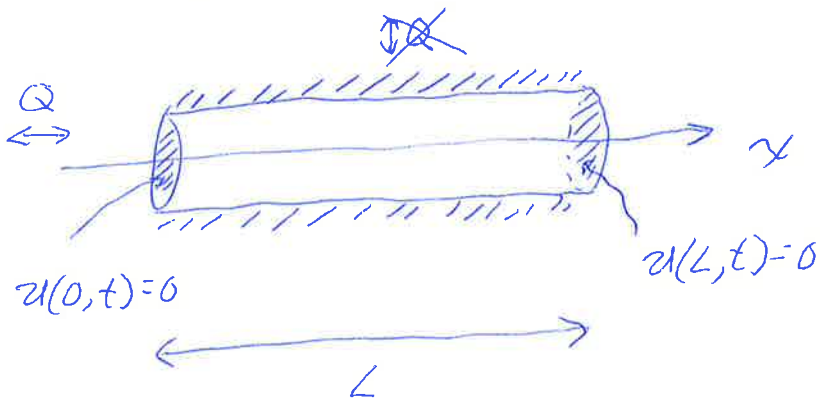
Outros Problemas de Condução de Calor

Aula 10.

Na aula anterior estudamos o problema de condução do calor homogêneo



$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} - u_t = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \text{ e } u(L,t) = 0, \quad t > 0 \leftarrow \text{condições de contorno em } x \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \; t = 0 \leftarrow \text{condição inicial em } t \end{cases}$$

Em que a solução é

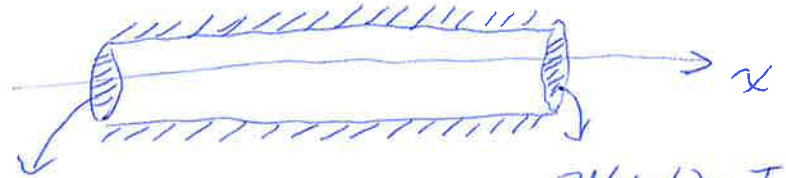
$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}_{\text{Exponencial Decrescente}} \overbrace{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}^{\text{Termo Oscilatório}} \\ \text{e } C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$$

A presença do fator exponencial com potência negativa em cada termo da série garante que

$$\lim_{t\to\infty}\left[u(x,t)\right] = 0, \quad \forall x, \text{ independentemente de } f(x)$$

Este é o resultado esperado do ponto de vista da intuição da Física. A temperatura $u(x)$ quando $t\to\infty$ é chamada de temperatura estacionária.

Condições de Contorno Não Homogêneas



As extremidades da barra são mantidas as temperaturas T_1 (em $x=0$) e T_2 (em $x=L$).

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} - u_t = 0 \\ u(0,t)=T_1 \text{ e } u(L,t)=T_2 \,, \; t>0 \\ u(x,0)=f(x) \,, \; 0\leq x\leq L \,, \; t=0 \end{cases}$$

← Somente muda esta linha

Neste problema anticipamos que após muito tempo, quando $t\to\infty$, será alcançada uma temperatura estacionaria. Isto é:

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t)] = v(x)$$

← A temperatura v não depende de t, somente de x. Tambem não depende da condição inicial.

A eq. do calor para este estado estacionário é

$$\begin{cases} \alpha^2 v_{xx}(x) - \cancel{v_t}^{\,0}(x) = 0 \\ v(0)=T_1 \text{ e } v(L)=T_2 \end{cases} \longrightarrow v''(x)=0$$

$$\downarrow$$

$$v(x) = Ax + B$$

Usando $v(0)=T_1$

$v(0)=T_1 = 0 + B$, logo $B=T_1$

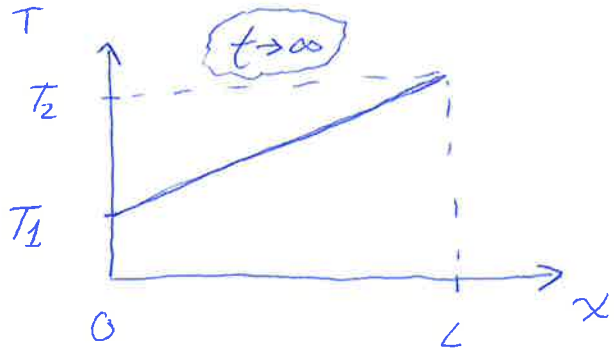
Usando $v(L)=T_2$

$v(L)=T_2 = A\cdot L + T_1$, logo $A = \dfrac{T_2-T_1}{L}$

Consequentemente,

$$\boxed{v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} \cdot x + T_1}$$

Distribuição Estacionária de Temperaturas na Barra após muito tempo ($t \to \infty$)



Com isto podemos propor uma solução para a temperatura (não estacionária) $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \underbrace{v(x)}_{\substack{\text{Temperatura} \\ \text{Estacionária} \\ \text{(Não depende de } t)}} + \underbrace{w(x,t)}_{\substack{\text{Transiente} \\ \text{de Temperatura} \\ \text{(depende de } t)}}$$

Colocando na eq. do calor

$$\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0$$

$$\alpha^2 \left[v(x) + w(x,t) \right]_{xx} - \left[v(x) + w(x,t) \right]_t = 0$$

mas $v_t(x) = 0$ e consequentemente $v_{xx}(x) = 0$

$$\alpha^2 w_{xx}(x,t) - w_t(x,t) = 0$$

Analizando agora as condições de contorno

$$u(0,t) = T_1 \longrightarrow u(0,t) = \underbrace{v(0)}_{T_1} + w(0,t) = T_1$$

logo $\boxed{w(0,t) = 0}$, $t > 0$

$$u(L,t)=T_2 \rightarrow u(L,t)=\underbrace{v(L)}_{T_2}+w(L,t)=T_2$$

$$\text{logo } \boxed{w(L,t)=0}, \quad \forall t>0$$

Considerando a condição inicial:

$u(x,0)=f(x)$, $0\leq x\leq L$ mas

$$u(x,0)=v(x)+w(x,0)=f(x)$$

logo $w(x,0)=f(x)-v(x)$ ou

$$w(x,0)=f(x)-\left[\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1\right], \quad 0\leq x\leq L,\ t=0.$$

Resumindo, para a solução transiente $(w(x,t))$ temos o problema

$$\begin{cases} \alpha^2 w_{xx}=w_t \\ w(0,t)=0 \quad w(L,t)=0, \quad t>0 & \leftarrow \text{Condição de Contorno em } x \\ w(x,0)=f(x)-\underbrace{\left[\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1\right]}_{v(x)}, \quad t=0, \ 0\leq x\leq L & \leftarrow \text{Condição Inicial em } t \end{cases}$$

Problema Homogêneo já resolvido se trocamos

$$f(x)\longrightarrow f(x)-\left[\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1\right]$$

Isto é, a solução de:

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \,, & 0 < x < L \,, \; t > 0 \\ u(0,t) = T_1 \,, \; u(L,t) = T_2 \,, & t > 0 \quad \leftarrow \text{Não Homogêneo} \\ u(x,0) = f(x) \,, & 0 \le x \le L \,, \; t = 0 \end{cases}$$

é $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

onde $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \frac{(T_2 - T_1)}{L} x - T_1 \right] \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$

Exemplo: Considere o problema de condução de calor

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t \,, & 0 < x < 30 \,, \; t > 0 \\ u(0,t) = 20 \text{ e } u(30,t) = 50 \,, & t > 0 \quad \leftarrow \text{Não Homogêneo} \\ u(x,0) = 60 - 2x \,, & 0 < x < 30 \end{cases}$$

Encontre a solução estacionária e transiente para a temperatura $u(x,t)$.

Sol.: $u(x,t) = \underbrace{v(x)}_{\text{estacionária}} + \underbrace{w(x,t)}_{\text{transiente}}$

$T_1 = 20 \quad T_2 = 50$
$\alpha^2 = 1 \,, \; L = 30$
$f(x) = 60 - 2x$

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 = \frac{50 - 20}{30} x + 20$$

$\boxed{v(x) = x + 20}$ ← Solução Estacionária

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - v(x)\right] \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$C_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} \left[60-2x-x-20\right] \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx$$

$$C_n = \frac{1}{15}\left[\int_0^{30} 40 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx - 3\int_0^{30} x \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx\right]$$

$$C_n = \frac{8}{3}\int_0^{30} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx - \frac{1}{5}\boxed{\int_0^{30} x \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx}\ I$$

Integração por partes

$u = x$

$dv = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)$

$du = dx$

$v = -\frac{30}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)$

$$C_n = -\frac{8}{\cancel{3}}\,\frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\Big|_0^{30} - \frac{1}{5}I$$

$$C_n = -\frac{80}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] - \frac{1}{5}I$$

$$C_n = \frac{80}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{1}{5}I$$

$$I = -\frac{30}{n\pi}x\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\Big|_0^{30} - \left(-\frac{30}{n\pi}\right)\int_0^{30}\cos\left(n\frac{\pi}{30}x\right)dx$$

$$I = -\frac{30^2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{30}{n\pi}\cdot\frac{30}{n\pi}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{30}x\right)\Big|_0^{30}$$

$$I = -\frac{30^2}{n\pi}(-1)^n + \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2 \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}}$$

$$\boxed{I = -\frac{30^2}{n\pi}(-1)^n}$$

$$C_n = \frac{80}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{1}{5}\,\frac{30^2}{n\pi}(-1)^n$$

- Se n é par

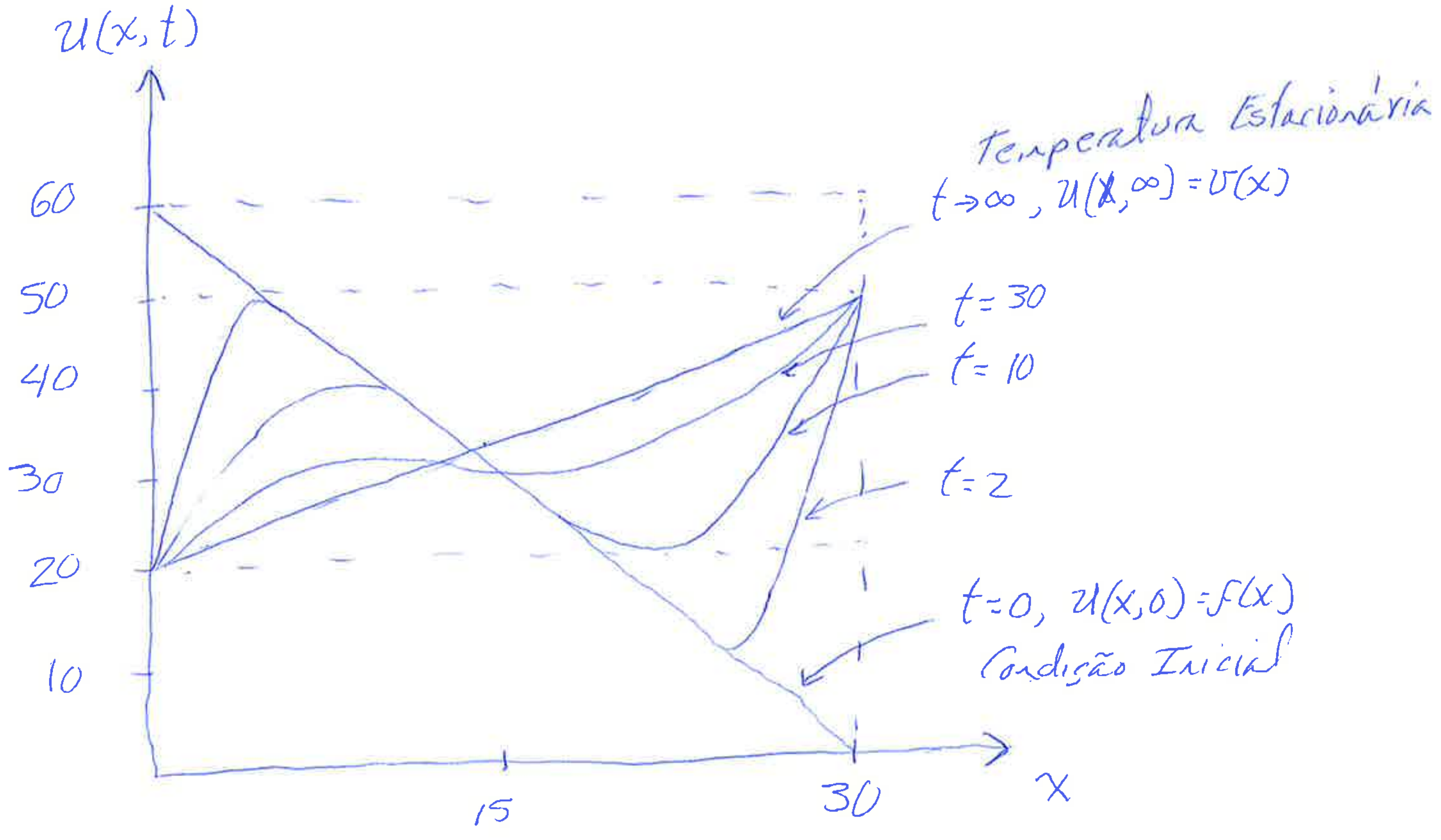
$$C_n = \frac{1}{5}\,\frac{30^2}{n\pi} = \frac{180}{n\pi}$$

- Se n é ímpar

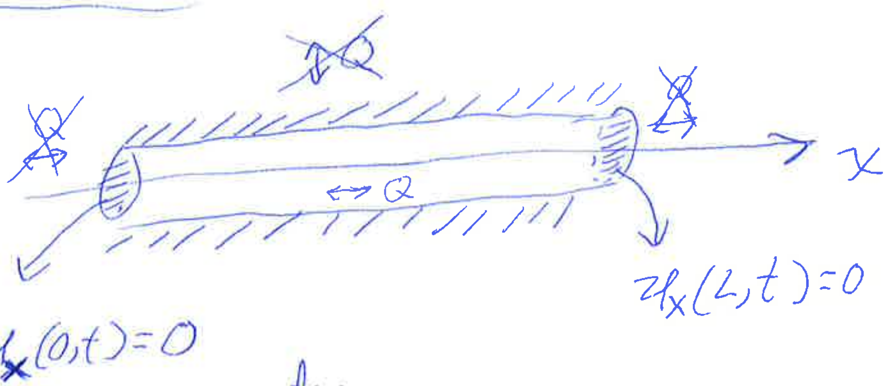
$$C_n = \frac{160}{n\pi} - \frac{1}{5}\,\frac{30^2}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}\left(160 - 180\right) = -\frac{20}{n\pi}$$

logo, $u(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\, \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$

$$u(x,t) = \underbrace{x+20}_{v(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{n\pi}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t}\, \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{15}x\right)}_{\text{pares}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-20}{(2n-1)\pi}\, e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{30}\right]^2 t}\, \operatorname{sen}\left[(2n-1)\frac{\pi}{30}x\right]}_{\text{ímpares}}$$



Barra com Extremidades Isoladas



Variação de Temperatura na direção do eixo x em x=0 ~~não~~ é zero e, em x=L → Não circula calor pelos extremos. Superfície lateral continua insulada termicamente

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) & , t>0,\ 0<x<L \\ u_x(0,t)=0 \quad e \quad u_x(L,t)=0 & , t>0 \\ u(x,0)=f(x) & , 0<x<L,\ t=0 \end{cases}$$

← Condições de Contorno em X sobre as derivadas em relação a X.

Usando o Método de Separação de Variáveis: $u(x,t) = X(x)T(t)$ encontramos novamente que

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

→ Sistema de Eq. Dif. Ordinárias

Usando as condições de Contorno

$$u_x(0,t)=0 \longrightarrow u_x(0,t)=X_x(0)\,T(t)=0$$

Se $T(t)=0 \;\; \forall t$ então teremos a solução trivial

$u(x,t)=X(x)\,T(t)=X(x)\cdot 0=0$ e queremos outras soluções além da trivial. Logo, $\boxed{X_x(0)=0}$.

De forma análoga $\boxed{X_x(L)=0}$.

- Agora temos que resolver um problema de autovalores e autofunções

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0 \text{ e } X'(L)=0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 \\ y'(0)=0 \text{ e } y'(L)=0 \end{cases}$$

usando a notação mais familiar

- Se $\lambda<0$, $\lambda=-\mu^2$

$y''(x)-\mu^2 y(x)=0$

$r^2-\mu^2=0$ Eq. Característica

$r_{I,II}=\pm\mu \to$ Tipo I

$y_{gh}(x)=C_1 e^{\mu x}+C_2 e^{-\mu x}$

$y'_{gh}(x)=\mu C_1 e^{\mu x}-C_2\mu e^{-\mu x}$

Em $x=0 \to y'_{gh}(0)=0$

$y'_{gh}(0)=0=\mu C_1-\mu C_2$

$\boxed{C_1=C_2}$

Em $x=L$

$y'(L)=0=\mu C_1 e^{\mu L}-\mu C_2 e^{-\mu L}=0$

mas $C_1=C_2=C$

$\mu C\left[e^{\mu L}-e^{-\mu L}\right]=0$

como $e^{\mu L}\neq e^{-\mu L}$

$C=0 \to C_1=C_2=0$

e somente existe a solução trivial

$y(x)=0.$

- Se $\lambda = 0$

$$y''(x) = 0$$

$$y_{gh}(x) = Ax + B \cdot 1$$

$$y'_{gh}(x) = A$$

Usando as condições de contorno

$$y'(0) = y'(L) = \boxed{0 = A}$$

mas B está livre para variar. Então $\lambda = 0$ é um autovalor com $y(x) = 1$ como autofunção.

- Se $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \longrightarrow r^2 + \mu^2 = 0 \quad \text{Eq. Caraterística}$$

$$y'(0) = 0 \quad e \quad y'(L) = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i\mu \quad \text{Tipo III}, \ \alpha = 0, \ \beta = \mu$$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$

$$y'_{gh}(x) = -\mu C_1 \operatorname{sen}(\mu x) + \mu C_2 \cos(\mu x)$$

Usando $y'(0) = 0$

$$y'(0) = 0 = -\mu C_1 \overbrace{\operatorname{sen}(0)}^{0} + \mu C_2 \underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Usando $y'(L) = 0$

$$y'(L) = 0 = -\mu C_1 \operatorname{sen}(\mu L) + \mu \cancel{C_2}^{0} \cos(\mu L)$$

Como não queremos que $C_1 = 0$ (somente existe a solução trivial)

$$\operatorname{sen}(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_n = \mu^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \leftarrow \text{Autovalores}$$

Os autofunções são

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Retornando a notação da eq. dif. de partida

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \text{ e } X'(L) = 0 \end{cases}$$

tem como soluções, além da trivial $X(x) = 0$,

Autovalores	Autofunções (ou soluções fundamentais)
$\lambda = 0$	$X(x) = 1$
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, $n \in \mathbb{N}$	$X_n(x) = C_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$

caso particular para $n=0$

Resolvendo a eq. dif. em relação a t

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0$$

$$T(t) = C e^{-\alpha^2 \lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

e colocando os valores de λ encontrados anteriormente

Autovalores	Autofunções
$\lambda = 0$	$T(t) = C_0 e^0 = C_0$ ou $T(t) = 1$ (com uma constante multiplicativa)
$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, \dots$	$T_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

caso particular

Para $u(x,t) = X(x)T(t)$

Autovalores

$\lambda = 0$

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Autofunções

$u_0(x,t) = 1$ (com uma constante multiplicativa)

$u_n(x,t) = C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$

A solução geral será uma combinação linear de todas as soluções fundamentais

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{C_0}{2}}_{\text{cte}} \cdot \underbrace{1}_{\text{autofunção}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)}_{\text{autofunções}}$$

coeficientes

Mas a solução deve satisfazer a condição inicial

$$u(x,0) = f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \overbrace{e^{0}}^{1} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)}$$

Expansão Periódica Par de $f(x)$ ou Série de Fourier em Cossenos

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx}$$

$n = 0, 1, \ldots$

$n \in \mathbb{N}$

Resumindo...

A solução do problema

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) & , 0<x<L , t>0 \\ u_x(0,t)=0 \text{ e } u_x(L,t)=0 & , t>0 \\ u(x,0)=f(x) & , 0<x<L , t=0 \end{cases}$$

← Barra com Extremidades Isoladas.

é

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

onde $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$, $n=0,1,\ldots$ $n \in \mathbb{N}$

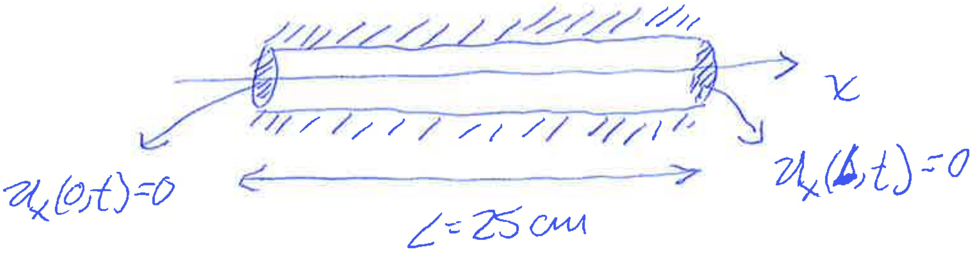
A solução pode ser lida como a soma de um termo estacionário ($\frac{c_0}{2}$, não depende de t) e outro transiente (somatoria). Quando $t \to \infty$ as exponenciais decrescentes anulam os termos da somatoria. Como o calor não pode escapar da barra após muito tempo a temperatura em todos os pontos será constante e

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

← será o valor médio da distribuição de temperaturas inicial.

Exemplo: Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra metálica com 25 cm de comprimento isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja distribuição inicial de temperatura é $u(x,0)=x$ para $0<x<25$.

Sol.:



$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) \quad , \; 0<x<25 \; , \; t>0 & \leftarrow \text{Eq. Dif.} \\ u_x(0,t)=0 \;\; \text{e} \;\; u_x(L,t)=0 \quad , \; t>0 & \leftarrow \text{Condição de Contorno em } x \\ u(x,0)=x \quad , \; 0<x<25 \quad , \; t=0 & \leftarrow \text{Condição Inicial em } t \end{cases}$$

a solução é

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{c_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) & \text{onde} \\ c_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx & n=0,1,\dots \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{2}{25} \int_0^{25} x \cos\left(n \frac{\pi}{25} x\right) dx = \frac{2}{25} \left[\frac{25x}{n\pi} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{25} x\right) \Big|_0^{25} - \frac{25}{n\pi} \int_0^{25} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{25} x\right) d\dots \right.$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos\left(n \frac{\pi}{25} x\right) dx \end{cases} \to \quad du = dx \qquad v = \frac{25}{n\pi} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{25} x\right)$$

$$C_n = \frac{2}{\cancel{25}}\left[\frac{(25)^2}{n\pi}\, \cancel{\operatorname{sen}}(n\pi)^{0} + \frac{25}{n\pi}\frac{25}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{25}x\right)\Big|_0^{25}\right]$$

$$C_n = \frac{50}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Se n é par $\rightarrow C_n = 0$

Se n é ímpar $\rightarrow C_n = \dfrac{-100}{n^2\pi^2}$

$$C_0 = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\,dx = \frac{\cancel{2}}{25}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^{25} = \frac{1}{25}\left[25\right]^2 = 25$$

$$\boxed{C_0 = 25}$$

Portanto,

$$u(x,t) = \frac{25}{2} + \sum_{\substack{n=1,3,5,\dots \\ \text{ímpares}}}^{\infty} \frac{-100}{n^2\pi^2}\, e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{25}\right)^2 t}\cos\left(n\frac{\pi}{25}x\right)$$

$\alpha^2 = 1$