Cálculo IV. Prof. Juan López

Tópicos

1) Soluções em Série para Eq. Dif. Lineares de 2da ordem

2) Transformada de Laplace

3) Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

Bibliografia

- Boyce e DiPrima, Eq. Dif. ...
- Zill, Eq. Dif. ...
- Stewart, Cálculo, Vol. II, capítulos 11 e 19.4

$\underbrace{11.8, 11.9, 11.10, 11.11, 11.12}_{\text{seriés de potência}}$

Séries de Potências

- Sequência $\rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_n \rightarrow \{a_n\}$ conjunto de valores ordenados.

$$\underset{\text{natural}}{n} \rightarrow \underset{\text{Real}}{a_n}$$

- Série $\rightarrow$ Duas Sequências

$\sum a_n$

Seq. Geradora $\rightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n \rightarrow \{a_n\}$

Seq. das Somas Parciais $\rightarrow \underbrace{a_1}_{S_1}, \underbrace{a_1+a_2}_{S_2}, \ldots, \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{S_n} \rightarrow \{S_n\}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Se $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ (existe como número finito)

$\Downarrow$

A sequência é convergente

- Se $\lim_{n\to\infty}(S_n) = S$ (existe como número finito)

$\Downarrow$

A série é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Série Geométrica

Seq. Geradora ; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$

Seq. das Somas Parciais : $\sum_{n=1}^{n} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}[1-r^n]$

Se $|r|<1$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Vamos trocar $a=1$ e $r=x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x|<1$$

trocando subíndices $j=n-1$

$$\sum^{\infty} x^{j} = \frac{1}{\ldots} \quad \text{se } |x|<1$$

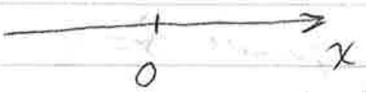
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{função de } x} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots}_{\text{soma infinita de potências de } x.} \qquad |x| < 1$$

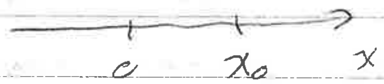
Série de Potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Os a_n são os coeficientes da série.



expansão centrada em 0



expansão centrada em x_0.

Polinômio de "Maclaurin" Polinômio de "Taylor"

Ex. Encontre uma representação em série de potências para a função $x^7/x+5$.

$$\frac{x^7}{x+5} = x^7 \frac{1}{x+5} = x^7 \frac{1/5}{\frac{x}{5}+1} = \frac{x^7}{5} \frac{1}{\frac{x}{5}+1}$$

$$\text{Em } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{troco} \quad (|x|<1)$$

$$x \to -\frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{1+\frac{x}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5^n}$$

$$\frac{x^7}{x+5} = \frac{x^7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^n}{5^n}\right]$$

$$\frac{x^7}{x+5} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{n+7}}{5^n}\right]$$

$$\boxed{\frac{x^7}{x+5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\, x^{n+7}} = \frac{1}{5}x^7 - \frac{1}{25}x^8 + \frac{1}{125}x^9 + \cdots$$

$\rightarrow |x| < 1$

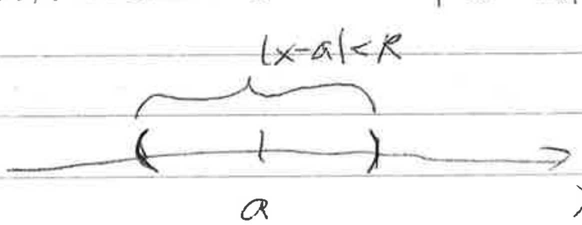
~~Ch da série de potência~~

Teorema: Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$

(ii) " " " para todo x

(iii) Existe um número R (raio de convergência) tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge fora.



Nota: Nos extremos do intervalo a série pode ser convergente ou divergente.

- No caso da série de potências (geométrica)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \rightarrow R = 1 \quad (|x| < 1).$$

- No caso da série $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \rightarrow R = 0$ se $x \neq 0$ diverge

Teorema: Se a série de potências $\sum c_n(x-x_0)^n$ tiver um raio de convergencia $R>0$, então a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ ~~é diferenciável~~ (contínua) no intervalo (x_0-R, x_0+R)

(i) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int c_n(x-a)^n\right]dx + C = \sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right] + C$

Ex. Encontre uma representação em série de potências para a função $\ln(1-x)$ e seu raio de convergência

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{se } |x|<1$$

Qual é a derivada de $\ln(1-x)$?

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x}\cdot(-1)$$

$$\ln(1-x) = -1\int\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$\text{se } |x|<1 \Rightarrow \ln(1-x) = -\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int x^n dx\right]$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] + C \qquad |x|<1$$

$n+1=k$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}\left(\frac{x^k}{k}\right) + C \qquad "$$

$$\text{Se } x=0 \Rightarrow \ln(1) = C \Rightarrow C=0$$

Se $|x| < 1 \Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)$

" $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$

Teorema: Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$

Sugestão de Prova: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$

se $|x-a| < R$

① Se $x = a \Rightarrow f(a) = c_0$

② Podemos derivar $f(x)$ termo a termo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

se $|x-a| < R$

$f'(a) = c_1$

③ Vamos derivar novamente

$$f''(x) = [f'(x)]' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} \qquad \text{se } |x-a| < R$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad "$$

$$f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

④ Derivar mais uma vez

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n (x-a)^{n-3} \qquad \text{se } |x-a| < R$$

$$f'''(a) = 6C_3 \rightarrow C_3 = \frac{f'''(a)}{6} = \frac{f'''(a)}{3!}$$

Temos que

$$C_0 = f(a) = \frac{f(a)}{0!} \qquad 0! = 1$$

$$C_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!} \qquad 1! = 1$$

$$C_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

Por indução pode ser provado que $C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

derivada n-ésima de f em relação a x e avaliada em a.

Expansão em série de potências de $f(x)$.

$\cancel{f(x) \approx f(a)}$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}[x-a] + \frac{f''(a)}{2!}[x-a]^2 + \frac{f'''(a)}{3!}[x-a]^3 + \dots$$

Expansão de Taylor de $f(x)$

Se $a = 0 \Rightarrow$ Expansão de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

Ex. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \longrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

↑ centrada em zero

$f^{(0)}$ = função sem derivar

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^x}{1}\Big|_{x=0} = 1$$

$$c_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = e^x\Big|_{x=0} = 1$$

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^x}{2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{e^x}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^x}{n!}\Big|_{x=0} = \frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad R = \infty \text{ (pode ser provado)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

Em Física é feita a aproximação: se x é pequeno

$$\Downarrow$$

$$e^x \approx 1 + x$$

Ex. (Tarefa) Mostrem que as séries de Maclaurin das funções $f_1(x) = \text{sen}(x)$ e $f_2(x) = \cos(x)$ são ..

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$ ← potências ímpares e série alternada

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$ para todo x $(R = \infty)$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ ← potências pares série alternada

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ para todo x $(R = \infty)$

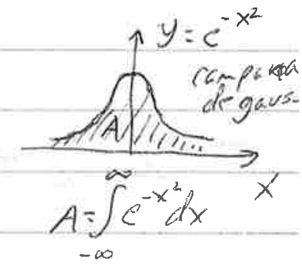
Prova da Fórmula de Euler
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$

Em Física: se x é pequeno

$$\text{sen}(x) \approx x$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ex. Encontre a integral $\int e^{-x^2} dx$ como uma série infinita.



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

troco $x \to -x^2$

alternada ↙ ↙ par

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\int e^{-x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx \right]$$

$$A = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+1} + C$$

Adicionando duas Séries de Potências

Ex. Escreva $\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)c_n x^{n-2}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n x^{n+1}\right]$ como uma única série de potências.

Sol.: Dois passos. A primeira potência de x deve ser a mesma nas duas séries. Na primeira série se $n=2 \longrightarrow x^0$, na segunda série se $n=0 \longrightarrow x^1$. Por isso separamos o somando x^0 da primeira série:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)c_n x^{n-2}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n x^{n+1}\right] =$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)c_n x^{\overset{k}{n-2}}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\overset{k}{n+1}} =$$

Segundo passo: Na primeira série $k=n-2 \rightarrow n=k+2$

" segunda " $k=n+1 \rightarrow n=k-1$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}\right]x^k$$