# Eletromagnetismo I

*Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015*

*Preparo: Diego Oliveira*

# Aula 13

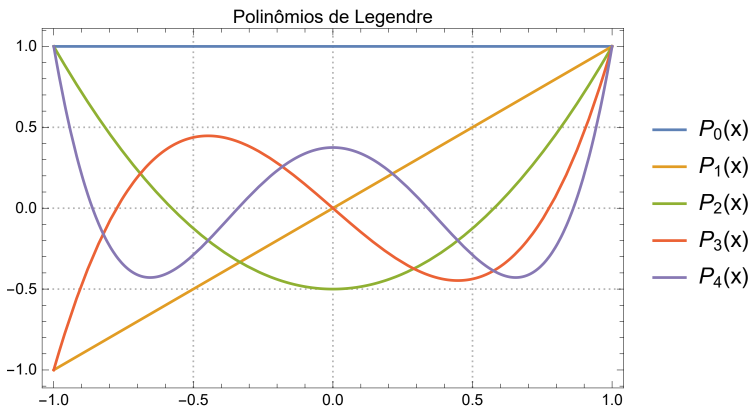
## Equação de Laplace em Simetria Azimutal

Na última aula deduzimos a solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal. Nesse caso, o potencial dependerá apenas da distância radial $r$ e do ângulo azimutal $\theta$ e podemos escrever a solução geral como:

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)}$$

onde $A_l$ e $B_l$ são coeficientes a serem determinados pelas condições de contorno do problema, e $P_l(\cos\theta)$ são os polinômios de Legendre de grau $l$,

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \\
P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d^l}{dx^l}\right)\left(x^2 - 1\right)^l
\end{aligned}$$



Duas importantes propriedades dos polinômios de Legendre são a relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

e de paridade:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

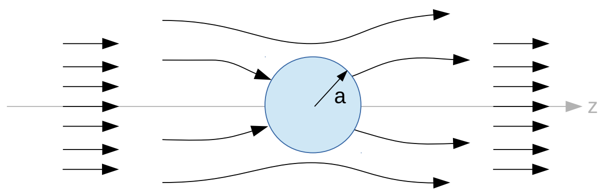
Note que a condição de ortogonalidade, quando os polinômios de Legendre são funções de $\cos\theta$, podem ser escritos como :

$$\int_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)\, \text{sen}\,\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

pois $x = \cos\theta$, $dx = d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$ e para os limites de integração $x = -1 \to \theta = \pi$ e $x = 1 \to \theta = 0$.

# Esfera condutora em campo elétrico uniforme

Considere um campo elétrico uniforme (de $-\infty$ a $+\infty$) $\vec{E} = E_0\hat{e}_z$ aplicado por todo o espaço. Agora, vamos inserir uma esfera condutora de raio $a$, dando origem a situação mostrada na figura ao lado. Como os campos eletrostáticos são nulos dentro de um condutor, uma distribuição de carga $\sigma(a,\theta)$ deve ser induzida na superfície da esfera condutora afim de blindar seu interior do campo elétrico externo.




As condições de contorno nesse caso são:

$$r \leq a \;\Rightarrow\; \vec{E} = 0 \quad \therefore\; \phi(r \leq a, \theta) = V = \text{ constante}$$

$$r \to \infty \;\Rightarrow\; \vec{E} = E_0\hat{e}_z$$

Primeiro, vamos transformar a condição de contorno do campo elétrico em termos do potencial:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad r \to \infty \quad \Rightarrow \quad E_0\vec{z} = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z \qquad \therefore \frac{\partial\phi}{\partial z} = -E_0$$

$$\therefore \phi(r,\theta)\big|_{r\to\infty} = -E_0 z + c \qquad \therefore \boxed{\phi(r,\theta)\big|_{r\to\infty} = C - E_0 r\cos\theta}$$

## Solução Geral

Explicitamente, os primeiros termos da solução geral são:

$$\phi(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + A_2 r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{B_2}{r^3}\left(3\cos^3\theta - 1\right) + \ldots$$

Impondo a condição de contorno dada por $r \to \infty$:

$$\underline{r\to\infty}: \qquad \phi(r,\theta) \to A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + A_2 r^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots = C - E_0 r\cos\theta$$

$$\therefore A_0 = C; \qquad A_1 = -E_0; \qquad A_j = 0,\ \forall j > 1.$$

Então a solução fica:

$$\phi(r,\theta) = C + \frac{B_1}{r} + \left[-E_0 r + \frac{B_1}{r^2}\right]\cos\theta + \frac{B_2}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots$$

$$\underline{r=a}: \qquad C + \frac{B_0}{a} + \left(\frac{B_1}{a} - E_0 a\right)\cos\theta + \frac{B_2}{a^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots = V$$

$$\therefore \quad C + \frac{B_0}{a} = V; \qquad B_1 = E_0 a^3; \qquad B_j = 0,\ \forall j > 1.$$

$$\therefore \boxed{\phi(r,\theta) = C + (V - C)\,\frac{a}{r} + E_0\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)\cos\theta}$$

Com esta solução, podemos calcular a distribuição de carga espacial da densidade de carga na superfície da esfera:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad \therefore \; \vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

$$E_r = (V-C)\,\frac{a}{r^2} + E_0\left(\frac{2a^3}{r^3}+1\right)\cos\theta$$

$$E_\theta = E_0\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right)\operatorname{sen}\theta$$

Na superfície da esfera, o vetor normal é $\hat{n} = \hat{e}_r$; portanto, utilizando a relação:

$$E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \therefore \sigma = \epsilon\left[\frac{V-C}{a} + 3E_0\cos\theta\right]$$

onde $V-C$ é uma diferença de potencial entre a esfera e seu valor quando $r\to\infty$. Para determinar esta diferença, notamos que a esfera condutora não está inicialmente carregada. Então:

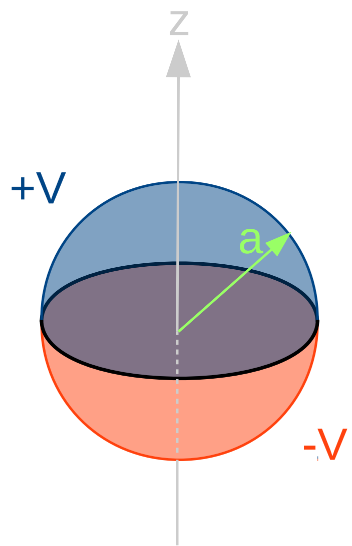
$$\begin{aligned} Q = \int \sigma\, dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\left[\epsilon_0\left(\frac{V-C}{a}\right) + 3E_0\cos\theta\right] a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0 \\ &= \epsilon_0\left(\frac{V-C}{a}\right)4\pi a^2 + 3\epsilon_0 E_0 a^2 2\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0 \\ \therefore\;\; & 4\pi\left(\frac{V-C}{a}\right)a^2 + 3\pi E_0 a^2\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi} = 0 \qquad \therefore V = C. \end{aligned}$$

Portanto, a solução final é:

$$\boxed{\phi(r,\theta) = E_0\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)\cos\theta}$$

## Casca esférica condutora com 2 potenciais

Suponha uma casca esférica condutora de raio $a$, cujos hemisférios são separados no plano equatorial por um anel isolante. Desta forma, o hemisfério norte é mantido em potencial $V$, enquanto o hemisfério sul é mantido a um potencial $-V$. Desejamos encontrar o potencial na região interna da casca esférica. Inicialmente, aplicamos a condição de regularidade na origem:




$$\begin{aligned} \phi(r \to 0, \theta) &= \text{finito} \qquad \Rightarrow B_l = 0 \quad \forall l \\ \therefore \quad & \phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

Devemos agora aplicar as condições de contorno, que para este problema são:

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} +V & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$$

Para determinar os coeficientes $A_l$, usaremos as condições de contorno e a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre. Para isso, multiplicaremos o potencial elétrico em $r = a$ por uma polinômio de Legendre arbitrário, de grau $l'$, e o integraremos ao longo de $\theta$:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta P_{l'}(\cos\theta) \left[\phi(a,\theta)\right] = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta P_{l'}(\cos\theta) \left[\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta)\right]$$

Note que se definimos $u = \cos\theta$, então $d(\cos\theta) = -du$, e $\theta = 0 \to u = 1$ e $\theta = \pi \to u = -1$, de modo que podemos escrever

$$\int_{-1}^{1} \phi(a,u) P_{l'}(u)\, du = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \underbrace{\int_{-1}^{1} P_{l'}(u) P_l(u)\, du}_{= \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2l'+1}A_{l'}a^{l'} &= \int_{-1}^{1}\phi(a,u)\,P_{l'}(u)\,du \\
\therefore A_l &= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{a^l}\int_{-1}^{1}\phi(a,u)\,P_l(u)\,du \\
&= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{a^l}\left[\int_{0}^{1}VP_l(u)\,du-\int_{-1}^{0}VP_l(u)\,du\right]
\end{aligned}$$

pois $\phi(a,u)=-V$ se $-1\le u\le 0$ e $\phi(a,u)=V$ se $0\le u\le 1$. Escrevendo a segunda integral com o mesmos limites de integração da primeira (isto é, fazendo $u\to -u$ na segunda integral):

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\frac{1}{a^l}V\int_0^1\left[P_l(u)-P_l(-u)\right]du$$

E aplicando a relação de paridade citada no início do capítulo: $P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$:

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\frac{1}{a^l}V\int_0^1\left[P_l(u)-(-1)^l P_l(u)\right]du$$

Portanto,

$$A_l=\begin{cases}0 & l \quad \text{par}\\ (2l+1)\,\frac{1}{a^l}V\int_0^1 P_l(u)\,du & l \quad \text{ímpar}\end{cases}$$

Assim, os dois primeiros termos não nulos serão explicitamente

$$\begin{aligned}
A_1 &= 3\frac{V}{a}\int_0^1 u\,du=\frac{3}{2}\frac{V}{a} \\
A_3 &= 7\frac{V}{a^3}\int_0^1\frac{1}{2}\left(5u^3-3u\right)du=-\frac{7}{8}\frac{V}{a^3}
\end{aligned}$$

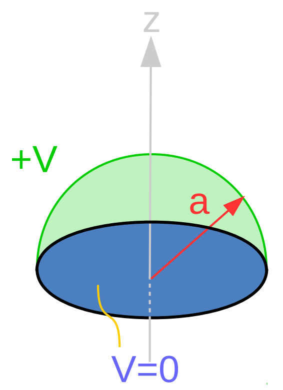
e

$$\boxed{\phi(r,\theta)=\frac{3}{2}V\left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}V\left(\frac{r}{a}\right)^3P_3(\cos\theta)+\ldots}$$

**Exercício:** Resolva o potencial do problema anterior na região fora da casca esférica.

## Semiesfera condutora com potencial fixo

Suponha uma semiesfera condutora de raio $a$, mantida sobre um potencial $V$, e um disco condutor região equatorial aterrado. Na interface entre os dois condutores é colocado um anel isolante, como mostrado na figura.




Pela simetria do problema, notamos que o potencial no interior dessa semiesfera deve ser igual ao obtido no exercício anterior.

Para demonstrar isso matematicamente, devemos repetir o mesmo procedimento do exercício anterior, ou seja, após exigir regularidade na origem, teremos que

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

onde a condição de contorno é $V(r=a,\theta) = V$, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Multiplicando os dois lados da equação do potencial por $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ e integrando em $\theta$ na região $0 \leq \theta \leq \pi/2$ com $r \to a$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \phi(a,\theta) P_{l'}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_0^{\pi/2} P_{l'}(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta \\
\therefore V \int_0^1 P_{l'}(u)\, du &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_0^1 P_{l'}(u) P_l(u)\, du
\end{aligned}$$

Vamos analisar com cuidado a integral do lado direito da equação, para $l \neq l'$, temos a seguinte identidade:

$$\int_0^1 P_{l'}(u) P_l(u)\, du = \frac{P_l(0) P_{l'}(0)' - P_{l'}(0) P_l'(0)}{l'(l'+1) - l(l+1)}$$

onde $(')$ nos polinômios indica derivada com relação à $x$. (**Cuidado!** O apóstrofo no índice $l$ não indica derivada alguma!).

Substituindo essa relação na nossa expressão integral, encontramos:

$$V\int_0^1 P_{l'}(u)\,du \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{P_l(0)P_{l'}(0)' - P_{l'}(0)P_l'(0)}{l'(l'+1) - l(l+1)}$$

Com mais a seguinte relação:

$$\int_0^1 P_m(x)dx = \frac{1}{m(m+1)}\frac{dP_m(x)}{dx},$$

encontramos:

$$V\int_0^1 P_{l'}du = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{P_l(0)\left[l'(l'+1) + l(l+1) - l(l+1)\right]\int_0^1 P_{l'}'du - P_{l'}(0)\,l(l+1)\int_0^1 P_l'du}{l'(l'+1) - l(l+1)},$$

onde e os polinômios $P_n$, com $n = l, l'$, são funções de $u$. Doravante, a menos de explicita menção, os polinômios dependem sempre e apenas de $u$. Ainda é importantíssimo mencionar que o termo $l(l+1) - l(l+1)$ é adicionado a posteriori sem qualquer alteração do resultado.

Utilizando a expressão geral do nosso potencial, especificando o ponto $(r,\theta) = (a,0)$, a equação acima se simplifica para:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l (l+1)\frac{P_l(0)\int_0^1 P_{l'}(u)'du - P_{l'}(0)\int_0^1 P_l'(u)du}{l'(l'+1) - l(l+1)} = 0.$$

Como $l \neq l'$, a única forma dessa expressão se cancelar é se $l$ e $l'$ forem ímpares. Com o auxílio em um livro de tabelas e relações de polinômios de Legendre [1], a integral do produto dos $P_n$ para índices ímpares é não nula apenas se $l = l'$, resultando em um simples fator $1/(2l+1)$. Com isso o somatório do lado esquerdo se reduz à um único termo, e é fácil encontrar:

$$\boxed{A_l = (2l+1)\frac{V}{a^l}\int_0^1 P_l(u)\,du \qquad \forall\, l \text{ ímpar}}$$

isto é, a mesma relação para os coeficientes da solução geral de Laplace do problemas anterior.

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9ª Edição, New York: Dover, 1972; em "Legendre Functions"and "Orthogonal Polynomials."Cap. 22.

# Casca esférica com distribuição de carga

Tomemos uma casca esférica de raio $a$ com uma certa distribuição de cargas dada por $\sigma = \sigma(\theta)$. Desejamos resolver o potencial elétrico originário dessa distribuição de cargas em todo espaço. É claro que em eletrostática sempre podemos calcular

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{casca}} \frac{\sigma\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS$$

mas resolver por separação de variáveis costuma ser mais simples. Para tanto, precisamos inicialmente, resolver em duas regiões separadamentes: dentro e fora da casca esférica. Utilizando a solução geral do potencial para o caso de simetria azimutal, e aplicando as condições de regularidades (em $r \to 0$ para o potencial dentro da casca, e $r \to \infty$ para o potencial fora da casca), obtemos

- Dentro da casca: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$
- Fora da casca: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$

Da exigência que o potencial precisa ser contínuo em $r = a$, podemos relacionar os valores de $A_l$ e $B_l$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

e da ortogonalidade dos polinômios de Legendre, obtemos diretamente que

$$A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}} \quad \therefore B_l = A_l a^{2l+1}$$

Alem disso, devemos aplicar a condição de contorno que relaciona o potencial com a densidade de carga. Como a normal da nossa superfície é o próprio versor radial, temos

$$\left(E_{\perp\text{fora}} - E_{\perp\text{dentro}}\right)\big|_{r=a} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

então

$$\left(-\frac{\partial V_{\text{fora}}}{\partial r} + \frac{\partial V_{\text{dentro}}}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{A_l a^{2l+1}}{a^{l+2}}P_l(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty} l A_l a^{l-1}P_l(\cos\theta) &= \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}\\
\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l a^{l-1}P_l(\cos\theta) &= \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

E para encontrar os coeficientes $A_l$, aplicamos a relação de ortogonalidade, como feito anteriormente:

$$
\boxed{A_l=\frac{1}{2\epsilon_0 a^{l-1}}\int_0^{\pi}\sigma(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta}
$$

**Exercício:** Resolva o problema da casca esférica carregada com uma distribuição superficial de cargas $\sigma(\theta)=3E_0\cos\theta$.