

Ondas eletromagnéticas em meio condutor

Quando existe uma onda eletromagnética no interior de um condutor, o campo elétrico da onda age sobre os portadores de carga existentes no interior do material, fazendo com que eles se movam. Como há resistência a esse movimento, parte da energia da onda é dissipada por efeito Joule. Desse modo, podemos esperar que a propagação de ondas eletromagnéticas em condutores seja substancialmente diferente da que se dá no vácuo. O comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de condutores é determinado pelas equações de Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Qualquer substância condutora é formada por partículas positivas e negativas, que podem se deslocar umas relativamente às outras, suporemos que esse deslocamento não acarreta concentrações de carga no interior da substância, em outras palavras, todas as cargas que circundam no interior do condutor advêm do próprio condutor, acarretando uma densidade de carga nula no interior do condutor:

$$\rho = 0$$

Para prosseguirmos precisamos determinar a expressão da densidade de corrente elétrica em função do campo elétrico \vec{E} . Para muitos condutores sujeitos a campos elétricos constantes, é válida a lei de Ohm microscópica, expressa por

$$\vec{j} = g_0 \vec{E}$$

Onde a constante g_0 é a condutividade da substância. Essa lei, que foi obtida no caso da corrente contínua, deve ser modificada quando o campo elétrico depende do tempo, como ocorre na onda eletromagnética. Para determinarmos a nova relação entre o campo elétrico da onda e a densidade de corrente elétrica vamos supor, que o condutor seja um metal.

A densidade de corrente está relacionada à velocidade dos elétrons dada por:

$$\vec{j} = -e N \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Para encontrar a relação entre \vec{j} e \vec{E} , é necessário obter a expressão $\vec{S}(t)$. Para tanto, utilizaremos o modelo de Drude. De acordo com esse modelo, o elétron livre está sujeito a duas forças: elétrica $\vec{F}_E = -e \vec{E}$ e resistiva $\vec{F}_R = -b \vec{v}$.

Supondo que a onda se propague na direção y , podemos escrever:

$\vec{E} = \vec{E}^* \cos(\omega t - ky - \phi) = \vec{E}^* \cos(\omega t - \phi^*)$, onde $\phi^* = (ky + \phi)$ e \vec{E}^* é a amplitude da onda na posição do elétron.

Escrevendo $S(t) = A \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$ e substituindo na lei de Newton $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2}$, obtemos

$$A = \frac{e \vec{E}^*}{\omega \sqrt{m^2 \omega^2 + b^2}}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{b}{m\omega}$$

$$\vec{S} = \frac{e \vec{E}^*}{\omega \sqrt{m^2 \omega^2 + b^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$$

Sendo $\vec{S}(t)$ o vetor posição da carga de deslocamento do condutor e $\vec{j}(\omega)$ o vetor densidade de corrente relacionado ao campo elétrico.

$$\vec{j} = \frac{N e^2 \vec{E}^*}{(m^2 \omega^2 + b^2)} \left[b \cos(\omega t - \phi^*) + m \omega \text{sen}(\omega t - \phi^*) \right]$$

$$\vec{j}(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \vec{E} - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ao relacionar a densidade de correntes ao campo elétrico e sua derivada podemos reescrever a lei de Ampère-Maxwell em função do campo elétrico e de sua derivada e ficamos com:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \vec{E} + \mu_0 \left(\epsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

que pode ser descrita como

$$= \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \epsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Onde

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2}$$

Desta forma, ao analisar como se obtém a equação de onda para os campos temos que o campo elétrico pode ser expresso como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi)$$

Onde β e κ são descritos, respectivamente, como

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2k}$$

$$k = \pm \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}$$

β deve ser positivo porque a onda é amortecida ao longo do eixo y e κ é um número real;

E o campo Magnético da onda se propagando no condutor pode ser expresso a partir da lei de Faraday como sendo

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi + \eta)$$

Onde:

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} (\hat{j} \times \vec{E}_0)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{\kappa}$$

Conseqüentemente, os resultados acima nos mostram que o campo magnético no interior de um condutor é, como no caso do vácuo, simultaneamente ortogonal ao campo elétrico e a direção de propagação. Entretanto, os campos de \vec{E} e \vec{B} não estão em fase, sendo η o ângulo de defasagem.

Questão 1: Sabendo que a função $\beta(\omega)$ caracteriza o amortecimento dos campos e a função $\kappa(\omega)$ expressa a sua propagação esboce os gráficos de \vec{E} e \vec{B} . Discuta os resultados;

- Para $\kappa > \beta$
- Para $\beta > \kappa$

Questão 2: Discuta os fatores que causam η de defasagem entre os campos de \vec{E} e \vec{B} ;

Exemplo da prata:

O modelo de Drude prevê o comportamento dos campos elétrico e magnético de uma onda no interior de um condutor e permite distinguir duas situações: em que a onda pode ou não se propagar. Para tal, vamos analisar como se dá a propagação de ondas eletromagnética no interior da prata, precisamos então considerar que capacidade que uma onda tem de se propagar em um meio condutor é representado pela grandeza δ . Esta grandeza δ possui dimensão de comprimento e é denominada "espessura de penetração"

$$\delta = \frac{1}{\beta}$$

Esta pode ser compreendida como a distância ao longo da qual a amplitude dos campos elétrico e magnético da onda se reduzem a $\frac{1}{e}$ do seu valor. Assim, δ representa a capacidade que uma onda eletromagnética tem de se propagar em um meio condutor:

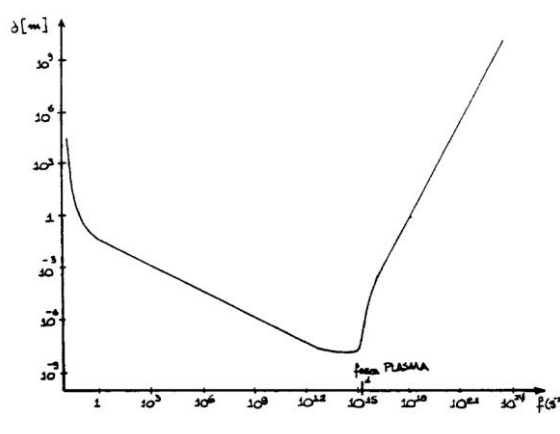
O modelo de Drude nos permite expressar a espessura de propagação a partir da seguinte expressão:

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\mu_0 g(\omega)}} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}$$

A partir da equação apresentada, a tabela abaixo expressa a espessura de penetração na prata em função frequência da onda, juntamente com os valores das funções de $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$.

Região do espectro	f (s ⁻¹)	g (ω) (Ω ⁻¹ .m ⁻¹)	ε (ω) (C ² .s ² .kg ⁻¹ .m ³)	δ (m)
-	0	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	∞
Ondas longas	1	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	6,36X10 ⁻²
Ondas longas	10 ³	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	2,01X10 ⁻³
AM	10 ⁶	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	6,36X10 ⁻⁵
FM, TV	10 ⁹	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	2,01X10 ⁻⁶
Infravermelho	10 ¹¹	6,25X10 ⁷	-2,00 X10 ⁻⁶	2,01X10 ⁻⁷
Infravermelho	10 ¹²	6,01X10 ⁷	-1,92X10 ⁻⁶	5,76X10 ⁻⁸
Infravermelho	10 ¹³	1,24X10 ⁷	-3,97X10 ⁻⁷	4,53X10 ⁻⁸
Visível	10 ¹⁴	1,54X10 ⁵	-4,95X10 ⁻⁹	2,02X10 ⁻⁸
Visível	10 ¹⁵	1,55X10 ³	-4,07X10 ⁻¹¹	2,23X10 ⁻⁸
Ultravioleta	10 ¹⁶	1,55X10 ¹	8,347X10 ⁻¹²	3,33X10 ⁻⁴
Raios-X	10 ¹⁸	1,55X10 ⁻³	8,842X10 ⁻¹²	3,42X10 ⁰
Raios δ	10 ²¹	1,55X10 ⁻⁹	8,842X10 ⁻¹²	3,42X10 ⁶
Raios δ	10 ²⁴	1,55X10 ⁻¹⁵	8,842X10 ⁻¹²	3,42X10 ¹²
	∞	0	8,842X10 ⁻¹²	∞

Gráfico log-log de δ (m) X f(s⁻¹)



Em relação ao Modelo de Drude precisamos destacar que este nos oferece mecanismos para determinar as regiões de frequência em que haverá amortecimento da onda ou propagação. Em outras palavras o modelo permite-nos concluir que a propagação ocorre quando κ é maior que β . Se considerarmos as informações apresentadas na tabela e no gráfico, a propagação da onda se dará nos casos onde os valores $\varepsilon(\omega)$ forem positivos, enquanto que seus valores negativos correspondem ao amortecimento da onda. A transição entre essas duas regiões ocorre na frequência de plasma ω_p , em que a função $\varepsilon(\omega)$ se anula.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{e^2 N / m \varepsilon_0}{\omega^2 + b^2 / m^2} \right) = 0$$

E a conseqüentemente a frequência de plasma dos elétrons de um metal é dada pela equação:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \varepsilon_0}}$$

Para o caso da prata (Ag), ao substituirmos os valores, temos que:

$$\omega_{p(Ag)} = 14,85 \times 10^{15} \text{ Hz.}$$

$$\omega_{p(Ag)} = 2 \pi f_{p(Ag)}$$

$$f_{p(Ag)} = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2,36 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

As ondas eletromagnéticas de frequência abaixo da f_p (Ag), $\sim 10^{15}$ Hz, praticamente não penetram no condutor, sendo refletidas. Esta reflexão ocorre na grande maioria dos metais nas frequências do espectro visível dando a eles a aparência incolor ou "prateada". Existem situações em que ondas eletromagnéticas podem atravessar corpos metálicos, como por exemplo, os raios X podem penetrar em vários metros corpos de prata.

3. Qual a distância ao longo de uma placa de prata para a qual a energia de uma onda eletromagnética de 10^{12} Hz caiu para um centésimo de seu valor inicial?
4. Num universo fictício, onde os elétrons tivessem massa cem vezes maior que os do nosso universo, seriam os metais transparentes à luz visível?
5. Um espelho é feito depositando-se uma fina camada de prata sobre uma placa de vidro. Que espessura deve ter essa camada para que o espelho seja bom e, ao mesmo tempo, não muito caro?
6. Como funciona um semi-espelho?
7. Por que os óculos espelhados funcionam como óculos "escuros" para quem os usa e como espelhos para as demais pessoas?
8. Um aparelho de TV é colocado no interior de uma caixa de vidro espelhada, sendo 10^{-7} m a espessura da camada de prata do espelho. Será possível que a televisão mostre alguma imagem ao ser ligada? Será possível que alguém no exterior da caixa veja essa imagem?
9. Como é possível blindar uma região do espaço contra ondas eletromagnéticas?

Ondas eletromagnéticas em dielétricos

Substâncias dielétricas são formadas por moléculas eletricamente neutras. Essa neutralidade das moléculas não impede, entretanto, que elas sintam campos elétricos e magnéticos externos, uma vez que elas são constituídas por partículas carregadas, tais como prótons e elétrons. Quando existir uma onda eletromagnética no interior de uma substância dielétrica, as suas moléculas vão reagir à presença dos campos da onda. O campo elétrico da onda vai tender a deslocar as partículas carregadas de suas posições de equilíbrio, sendo os efeitos maiores devido ao movimento dos elétrons, que são muito mais leves que os núcleos atômicos. Ao contrário dos condutores, os elétrons não estão livres, mas sim, presos aos núcleos. Quando o campo elétrico da onda puxa o elétron numa direção, essa força que prende o elétron ao núcleo também passa a agir, tentando manter a estabilidade da molécula.

Em relação ao modelo de Drude, partiremos das mesmas condições empregadas para os condutores para a densidade de carga e para as equações de Maxwell, entretanto no que concerne às forças que atuam sobre os elétrons na situação do dielétrico, teremos a seguinte configuração:

$$\vec{F}_1 = -e \vec{E}(x, y, z, t)$$

(Campo elétrico da onda eletromagnética);

$$\vec{F}_2 = -K \vec{S}$$

(Ligação do elétron ao núcleo)

$$\vec{F}_3 = -b \vec{v}$$

(“amortecimento”: os átomos absorverem e irradiarem uma parte da energia da onda eletromagnética; diminui a energia da onda).

Como no caso de condutores, usando novamente a lei de Newton $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2}$, e $S(t) = A \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$, obtemos que a oscilação do elétron pode ser descrita como

$$S = \frac{eE^*}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi^* + \delta)$$

E a defasagem entre a posição e o campo pode ser caracterizada como

$$\text{tg } \delta = \frac{b \omega}{m \omega^2 - K}$$

Em relação ao modelo de Drude para o dielétrico outra questão importante concentra-se no fato de que a força de ligação entre o elétron e o núcleo pode ser tida como uma analogia da força elástica, resultando em um sistema que depende não apenas da frequência de oscilação ω mas também de uma frequência natural de oscilação ω_0 . Esta frequência pode ser interpretada como a frequência na qual o elétron oscilaria se as forças devidas ao campo da onda (\vec{F}_1) e de amortecimento (\vec{F}_3) não existissem, dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Considerando que a relação entre o campo elétrico e a densidade de corrente, que está relacionada com a velocidade dos elétrons $\vec{j} = -N e \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$ a mesma pode ser descrita como:

$$\vec{j} = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \vec{E} - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Esta expressão determina o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de dielétricos. Consideremos, portanto, a lei de Ampère-Maxwell que é dada por:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \vec{E} + \mu_0 \left[\varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \right] \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A partir das quais são dadas $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2} \quad g(\omega) = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2}$$

Precisamos destacar que as equações de $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ descritas para a propagação da onda eletromagnética no dielétrico são distintas das explicitadas para o condutor. Dentre as inúmeras diferenças entre $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$ no caso do dielétrico na presença da frequência natural de oscilação ω_0 em ambas as equações. No que se refere às equações de Maxwell, estas são descritas da mesma forma tanto para dielétricos como para condutores o que conseqüentemente resulta em equações de onda para \vec{E} e \vec{B} idênticos para ambos os casos, diferindo apenas quanto na forma das funções $g(\omega)$ e $\varepsilon(\omega)$. Desta forma, o amortecimento de uma onda eletromagnética é caracterizada pela função $\varepsilon(\omega)$, que, por sua vez está relacionada a $g(\omega)$, que terá seu valor máximo quando ω for igual a ω_0 .

Como no caso dos metais, as ondas eletromagnéticas em dielétricos também são compostas por termos correspondentes a amortecimento e a oscilação.

$$k = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad \beta = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2k} \omega$$

Existem importantes diferenças entre as funções $k(\omega)$ e $\beta(\omega)$ descritas para os dielétricos em comparação às mesmas equações descritas para os condutores. A primeira diferença é que as funções são responsáveis pela propagação e pelo amortecimento, têm características diferentes para condutores e dielétricos. A segunda diferença importante refere-se à causa do amortecimento em cada um dos casos. O amortecimento da onda no caso de metais é devido à dissipação de energia por efeito Joule, causada pelo "atrito" entre as partículas que constituem o meio, enquanto que no caso de dielétricos o amortecimento deve-se ao fato de os átomos da substância poderem absorver e re-irradiar a energia da onda.

10. Discuta sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em condutores e dielétricos tendo como parâmetros:

- as principais diferenças observadas e suas causas e/ou conseqüências
- as principais semelhanças observadas e suas causas e/ou conseqüências