Eletromagnetismo I

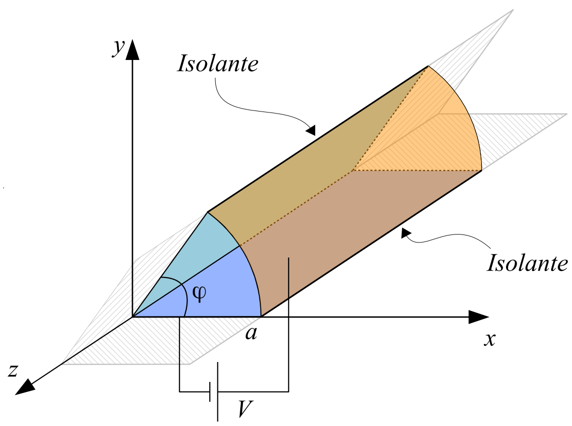
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 10

Solução da Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Vamos ver como a Equação de Laplace pode ser resolvida em sistemas de coordenadas não cartesianos. Comecemos por coordenadas cilíndricas, vendo uma aplicação de interesse prático.



Consideremos a "cunha cilíndrica" mostrada na figura, formada por dois planos condutores aterrados em $\varphi = 0$ e $\varphi = \beta$ e uma superfície cilíndrica em $r = a$ polarizada com potencial $\phi = V$. A cunha é infinita na direção z, de forma que o potencial não deve depender da coordenada z. Naturalmente a simetria do problema indica que devemos resolver a *Equação de Laplace* em coordenadas cilíndricas. Assim o problema é especificado como

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0; \qquad \phi(r,\varphi)$$

$$\phi(r,0) = \phi(r,\beta) = 0 \qquad ; \qquad \phi(a,\varphi) = V$$

Novamente vamos utilizar o método de separação de variáveis, supondo

$$\phi(r,\varphi) = R(r)T(\varphi)$$

Substituindo na Equação de Laplace, temos

$$\frac{T}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2T}{d\varphi^2} = 0$$

ou

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\varphi^2} = 0$$

O primeiro termo da equação é função só de r, enquanto que o segundo é função só de φ. Como os dois termos têm que se anular para qualquer valores de r e φ, a única possibilidade é que cada termo seja igual a uma constante

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \alpha^2; \qquad \frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\varphi^2} = -\alpha^2$$

Equação para R(r)

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \alpha^2 R$$

É fácil de ver que a solução desta equação é

$$R(r) = A_1 r^{\alpha} + B_1 r^{-\alpha} \quad \left[\text{basta derivar } Cr^{\alpha} \text{ e substituir na equação}\right]$$

Como α ainda é arbitrário, é necessário considerar também a possibilidade de $\alpha = 0$, que levaria a $R = const$, que é uma solução trivial. Mas existe uma solução não trivial para este caso, como podemos ver diretamente

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \quad \therefore r\frac{dR}{dr} = B_0 \quad \therefore \quad \frac{dR}{dr} = \frac{B_0}{r}$$

$$\therefore R(r) = A_0 + B_0 \ln r$$

Então a solução geral da equação para $R(r)$ é

$$R(r) = A_0 + B_0 \ln r + A_1 r^{\alpha} + B_1 r^{-\alpha}$$

[O aparecimento do termo ln r é uma característica do sistema de coordenadas cilíndricas].

Equação para $T(\varphi)$

$$\frac{d^2 T}{d\varphi^2} = -\alpha^2 T \qquad \therefore T(\varphi) = C_1 \cos(\alpha\varphi) + D_1 \operatorname{sen}(\alpha\varphi)$$

Neste caso temos que também considerar o caso espacial $\alpha = 0$.

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{d\varphi^2} = 0 \quad \therefore T(\varphi) = C_0 + D_0 \varphi$$

Então a solução geral para $\phi(r, \varphi)$ é

$$\phi(r,\varphi) = \underbrace{(A_0 + B_0 \ln r)(C_0 + D_0\varphi)}_{\alpha = 0} + \underbrace{(A_1 r^{\alpha} + B_1 r^{-\alpha})[C_1 \cos(\alpha\varphi) + D_1 \operatorname{sen}(\alpha\varphi)]}_{\alpha \neq 0}$$

Condição de Regularidade

Tanto no sistema de coordenadas cilíndricas como esféricas, além das condições de contorno, temos que considerar com cuidado o comportamento da solução quando $r \to 0$, se este ponto fizer parte do domínio onde queremos a solução.

De fato, no limite $r \to 0$, ln $r \to \infty$; $r^{-a} \to \infty$ $(\alpha > 0)$; então, para evitar a divergência do potencial em $r = 0$, especificamos

$$B_0 = 0; \quad B_1 = 0$$

e o potencial fica

$$\phi(r,\varphi) = C_0 + D_0\varphi + A_1 r^{\alpha}\left[C_1\cos(\alpha\varphi) + D_1\,\mathrm{sen}(\alpha\varphi)\right]$$

Condições de Contorno

$$\underline{\varphi = 0} \quad \Rightarrow \qquad \phi(r,0) = C_0 + D_1 r^{\alpha} C_1 = 0 \quad \therefore C_0 = C_1 = 0$$

$$\therefore \phi(r,\varphi) = D_0\varphi + A_1 r^{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha\varphi)$$

onde combinamos D_1 na constante A_1.

$$\underline{\varphi = \beta} \;\; \Rightarrow \;\; \phi(r,\beta) = D_0\beta + A_1 r^{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha\beta) = 0$$

Fazemos então $D_0 = 0$; se fazermos também $A_1 = 0$, obtemos a solução trivial $\phi(r,\varphi) = 0$. A outra possibilidade é considerar

$$\alpha\beta = m\pi;\; m = 1,2,3\ldots \;\; \therefore \alpha = \frac{m\pi}{\beta}$$

Então a solução geral fica

$$\phi(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} = A_m r^{\frac{m\pi}{\beta}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)$$

$$\underline{r = a} \;\; \Rightarrow \;\; V = \sum_{m=1}^{\infty} A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)$$

Usando novamente a condição de ortogonalidade das funções trigonométricas, temos

$$V\int_0^{\beta}\mathrm{sen}\left(\frac{m'\pi\varphi}{\beta}\right)d\varphi = \sum_m A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}}\int_0^{\beta}\mathrm{sen}\left(\frac{m'\pi\varphi}{\beta}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)d\varphi$$

Essas integrais já foram feitas anteriormente,

$$\int_0^\beta \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi\varphi}{\beta}\right) d\varphi = \frac{2\beta}{m'\pi}; \quad m' \text{ ímpar};$$

$$\int_0^\beta \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi\varphi}{\beta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right) d\varphi = \frac{\beta}{2}\delta_{m'm}$$

Então

$$\frac{2\cancel{\beta}}{m'\pi} V = \sum_{m=1}^{\infty} A_m a^{\frac{m\pi}{\beta}} \frac{\cancel{\beta}}{2}\delta_{m'm}; \;\; m' \text{ ímpar}$$

e obtemos

$$A_m = \frac{4V}{m\pi} a^{-\frac{m\pi}{\beta}}$$

De forma que o potencial "dentro"da cunha fica

$$\boxed{\phi(r,\varphi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)}$$

Campo Elétrico

Tendo o potencial, podemos calcular diretamente o campo elétrico dentro da cunha

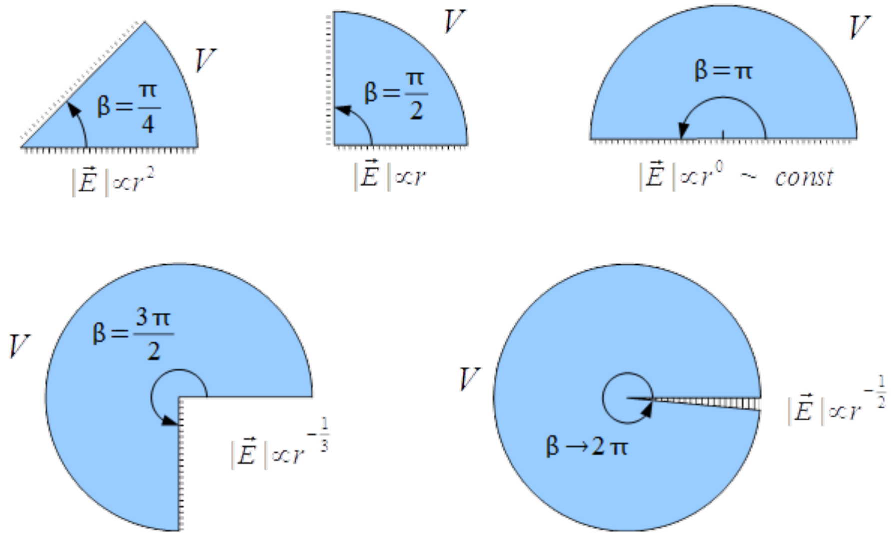
$$\vec{E} = -\nabla\phi \;\; \Rightarrow \qquad E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{4V}{\beta a} \sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\frac{4V}{\beta a} \sum_{\substack{m \\ \text{ímpar}}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)$$

É interessante agra verificar o comportamento do campo próximo da origem, ou seja, quando $r \to 0$. Neste limite o termo dominante no somatório é o com menor potência de r, ou seja, o termo $m = 1$; então temos

$$\left.\begin{array}{l} E_r \approx -\dfrac{4V}{\beta a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi\varphi}{\beta}\right) \\ \\ E_\varphi \approx -\dfrac{4V}{\beta a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{\frac{m\pi}{\beta}-1}\cos\left(\dfrac{m\pi\varphi}{\beta}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \ |E| \approx \frac{4V}{\beta a}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{\beta}-1}$$

O valor do ângulo β da cunha é arbitrário; então vamos ver como se comporta o campo quando variamos o valor de β; isto é indicado nas figuras a seguir



Vemos que quando $\beta > \pi$, o campo tende a divergir na ponta da cunha, ou seja, aumentaria sua intensidade na ponta, o que é denominado "Poder das Pontas" na linguagem popular.

Exercício

Calcular a expressão de densidade de carga σ na superfície $r = a$ e a da capacitância por unidade de comprimento na direção L, ou seja, C/L.