# Capítulo 3

# Aplicações da derivada e derivadas parciais

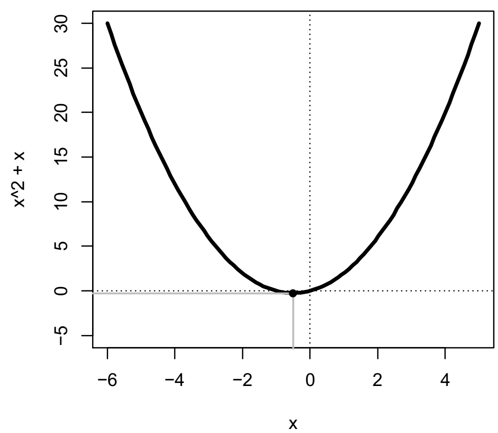
## 3.1 Máximos e mínimos

Como vimos, a derivada, do ponto de vista geométrico, nada mais é do que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto qualquer. Assim, se o seu valor em um ponto $p$ for positivo (isto é, se $f'(p) > 0$), quer dizer que a função neste ponto está crescendo. Se o seu valor for negativo (isto é, se $f'(p) < 0$), então a função neste ponto $p$ está decrescendo. Se o seu valor for igual a zero ($f(p) = 0$) ela não está crescendo e nem decrescendo. Por exemplo, seja $f(x) = x^2 + x$. A inclinação da reta tangente ao gráfico de $f$ é dada pela sua derivada.

$$f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$$

No ponto $x = 1$, $f'(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0$, então a função está em crescimento. No ponto $x = -1$, $f'(-1) = 2(-1)+1 = -1 < 0$, a função está decrescendo neste ponto. Para $f'(x) = 2x+1 = 0$, isto é quando a derivada de $f$ assume o valor zero, $x = -\frac{1}{2}$. Portanto, no ponto $x = -\frac{1}{2}$ a função não está nem crescendo e nem decrescendo.

A segunda derivada da função (isto é, $f''(x)$) também nos dá uma informação sobre a forma do gráfico. Quando $f''(x) > 0$, a concavidade do gráfico está voltada para cima. Quando $f''(x) < 0$, a convavidade está voltada para baixo. No exemplo acima, calculando a segunda derivada da função $f$ temos $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 2$. Portanto, em todos os pontos da função a concavidade está voltada para cima.




**Definição 1**: Sejam $f$ uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $p$ é um ponto de máximo de $f$ em $A$ se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x$ em $A$. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x$ em $A$, dizemos então que $p$ é um ponto de mínimo de $f$ em $A$.

**Definição 2**: Sejam $f$ uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $p$ é um ponto de máximo global de $f$ se, para todo $x$ em $D_f$, $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo $x$ em $D_f$, $f(x) \geq f(p)$, diremos então que $p$ é um ponto de mínimo global de $f$.

**Definição 3**: Sejam $f$ uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $p$ é o ponto de máximo local de $f$ se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x$ em $]p - r, p + r] \cap D_f$. Por outro lado, dizemos que $p$ é ponto de mínimo local de $f$ se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo $x$ em $]p - r, p + r[ \cap D_f$.

Para determinarmos os pontos de máximo e de mínimo de uma função $f$ precisamos estudá-la com relação a crescimento e decrescimento. Sejam $a < c < b$; se $f$ for crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b[$, então $c$ será um ponto de máximo local de $f$; se $f$ for decrescente em $]a, c]$ e crescente em $[c, b[$, então $c$ será um ponto de mínimo local de $f$.

**Teorema 1**: Seja $f$ uma função derivável em $p$, onde $p$ é um ponto interior a $D_f$. Uma condição necessária para que $p$ seja um ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Um ponto $p \in D_f$ se diz ponto crítico de $f$ se $f'(p) = 0$. Uma condição necessária para que $p$ seja ponto de máximo ou de mínimo local de $f$ é que $p$ seja um ponto crítico de $f$. A condição suficiente é dada pelo Teorema 2.

**Teorema 2**: Sejam $f$ uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto $I$ e $p \in I$.

a. $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local.

b. $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local.

Voltando ao nosso exemplo, $x = -\frac{1}{2}$ é o único ponto crítico da função $f(x) = x^2 + 2$. Como a segunda derivada é $f''(x) = 2 > 0$, sabemos que a concavidade está voltada para cima e que o ponto $x = -\frac{1}{2}$ é um ponto de mínimo. Em particular, como é possível observar no gráfico, ele é um ponto de mínimo absoluto.

Essa função, no entanto, não possui ponto de máximo. Como ela está definida para todo $\mathbb{R}$, podemos verificar isso calculando os limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} (x^2 + x) = -\infty$$

Mas se a função estivesse definida no intervalo $]-\infty, 2]$ (é importante notar que o intervalo é fechado no 2), ela teria um ponto de máximo e ele seria o 2.

**Exemplo 1**: Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a. Estude $f$ com relação a máximos e mínimos.

b. Determine os valores máximo e mínimo de $f$ em $[-2, 3]$. Em que pontos estes valores são atingidos.

**Solução**:

a. Em primeiro lugar, vamos calcular a derivada de $f$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

   Agora, vamos igualar $f'(x)$ a zero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$. Vamos achar os valores de $x$ que satisfazem essa equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-6)^2 - 4(3)(0) = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{6 \pm \sqrt{36}}{2(3)} = \frac{6 \pm 6}{6} \Rightarrow x = 0 \quad \textbf{ou} \quad x = 2$$

   Assim, os pontos críticos da função são $x = 2$ e $x = 0$. Calculando esses valores na função $f$ temos:

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 3 = 3$$

$$f(2) = (2)^2 - 3(2)^2 + 3 = -1$$

   Vamos ver o que acontece nas extremidades. Como $\lim_{x \to +\infty}(x^3 - 3x^2 + 3) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty}(x^3 - 3x^2 + 3) = -\infty$, segue que $f$ não assume um valor máximo global, nem valor mínimo global.

Portanto, 0 é ponto de máximo local e 2 é ponto de mínimo local.

b. Como o domínio da função agora é $[-2, 3]$ e não mais o $\mathbb{R}$, precisamos calcular o valor da função nesses pontos extremos.

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 3 = -17$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 + 3 = 3$$

Pelo item anterior sabemos que $f(0) = 3$ e $f(2) = -1$. Portanto, $f(-2) = -17$ é o valor mínimo de $f$ em $[-2, 3]$ e $f(0) = f(3) = 3$ é o valor máximo.

**Exemplo 2**: Estude a função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ com relação a máximos e mínimos locais e globais.

Vamos calcular a derivada de $f$:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

Igualando a zero temos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

Os valores de $x$ que satisfazem a equação são:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-18)^2 - 4(6)(12) = 324 - 288 = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{18 \pm \sqrt{36}}{2(6)} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

Portanto, $x = 2$ ou $x = 1$. Esses são os pontos críticos da função. Calculando o valor da função nesses pontos temos que $f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) + 3 = 8$ e $f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) + 3 = 8$. Como os limites no mais infinito e no menos infinito explodem, concluímos que 1 é ponto de máximo local e 2 é ponto de mínimo local.

## 3.2 Derivadas parciais

Até agora trabalhamos apenas com funções com uma única variável ($f(x)$). Mas muitas vezes estamos diante de funções com mais de uma variável ($f(x,y)$). Para essas funções podemos calcular as derivadas parciais.

Seja $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se derivada parcial de $f$ em relação a $x$ no ponto $(x_0, y_0)$ e indica-se como $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)$.

Para se calcular $\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x,y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$. Da mesma forma, $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)$ é a derivada em relação a $x$ de $f(x,y)$ mantendo-se $y$ constante.

**Exemplo 1**: Seja $f(x,y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a. $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)$

b. $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)$

c. $\frac{\delta f}{\delta x}(1,1)$

d. $\frac{\delta f}{\delta y}(1,1)$

**Solução**:

a. $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \frac{\delta}{\delta x}(2xy - 4y) = 2y$

b. $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \frac{\delta}{\delta y}(2xy - 4y) = 2x - 4$

c. $\frac{\delta f}{\delta x}(1,1) = 2(1) = 2$

d. $\frac{\delta f}{\delta y}(1,1) = 2(1) - 4 = -2$

**Exemplo 2**: Seja $f(x,y) = \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}$. Determine

a. $\frac{\delta f}{\delta x}$

b. $\frac{\delta f}{\delta y}$

**Solução**:

a. $\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

b. $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^3-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y-2y^3-2x^3y+2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}$

## 3.3 Derivadas parciais de ordem superior

Da mesma forma que calculamos $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta f}{\delta y}$ podemos calcular:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta x})$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta y})$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta y})$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta x})$$

**Exemplo 1**: Seja $f(x, y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$. Calcule todas as derivadas parciais de 2ª ordem.

As derivadas são:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = 20x^4y^4 - 12xy$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = 16x^5y^3 - 6x^2$$

Assim, as derivadas parciais de 2ª ordem são:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta x}(x, y)) = \frac{\delta}{\delta x}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x, y) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta x}(x, y)) = \frac{\delta}{\delta y}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x, y) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta f}{\delta y}(x, y)) = \frac{\delta}{\delta y}(16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x, y) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta f}{\delta y}(x, y)) = \frac{\delta}{\delta x}(16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x$$

**Exemplo 2**: Seja a função $z = ln(x^2 + y^2)$. Calcule $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$.

$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$

$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x, y) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \Rightarrow (\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}) + (\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}) = 0$

**Exemplo 3**: Seja $f(x, y) = e^{x^2 y}$. Calcule $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ e $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) = e^{x^2 y} 2xy$

$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = e^{x^2 y} x^2$

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) = (e^{x^2 y} 2xy)x^2 + e^{x^2 y} 2x$

$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x, y) = (e^{x^2 y} x^2)2xy + e^{x^2 y} 2x$

## Exercícios

1. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais.

   a. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

   b. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

2. Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os (a classificação refere-se a ponoto de máximo local, pnto de mínimo local ou ponto de inflexão).

   a. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

   b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

   c. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

3. Determine os valores máximos e mínimos (caso existam) da função dada no intervalo dado.

   a. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$

   b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$

4. Determine as derivadas parciais.

   a. $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

   b. $f(x, y) = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

   c. $f(x, y) = x^2ln(1 + x^2 + y^2)$

   d. $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

   e. $f(x, y) = (x^2 + y^2)ln(x^2 + y^2)$

   f. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

   g. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$

5. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem.

   a. $f(x, y) = x^3y^2$

   b. $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

   c. $f(x, y) = ln(1 + x^2 + y^2)$

   d. $f(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$