Gabarito – Exercício 1

1) Temos o gráfico de velocidade por tempo do qual podemos escrever as equações das 3 retas que o compõe. Então usando a equação de reta

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

podemos a partir de dois pontos da reta determinar os coeficientes a e b de cada reta.

Para o intervalo $0s \leq t \leq 8s$:

$$f(0) = 0 \; e \; f(8) = 12$$
$$\alpha = \frac{3}{2} \; e \; \beta = 0$$

Para o intervalo $8s \leq t \leq 12s$

$$f(8) = 12 \; e \; f(12) = -12$$
$$\alpha = -6 \; e \; \beta = 60$$

Para o intervalo $12s \leq t \leq 16s$

$$f(12) = -12 \; e \; f(16) = -12$$
$$\alpha = 0 \; e \; \beta = -12$$

Então temos que

$$v(t) = \begin{cases} \frac{3t}{2}; \; para \; 0s \leq t \leq 8s \\ -6t + 60; \; para \; 8s \leq t \leq 12s \\ -12; \; para \; 12s \leq t \leq 16s \end{cases}$$

Podemos agora a partir das equações acima encontrar as funções da aceleração dos intervalos correspondentes, pois

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{d\,t}$$

Então temos que:

Para o intervalo $0s \leq t \leq 8s$:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Para o intervalo $8s \leq t \leq 12s$

$$\frac{d}{d\,t}(-6t + 60) = -6$$

Para o intervalo $12s \leq t \leq 16s$

$$\frac{d}{d\,t}(-12) = 0$$

Então temos que

$$a(t) = \begin{cases} \frac{3}{2};\ para\ 0s \leq t \leq 8s \\ -6;\ para\ 8s \leq t \leq 12s \\ 0;\ para\ 12s \leq t \leq 16s \end{cases}$$

Agora a partir das equações de v(t) podemos encontrar as funções da posição dos intervalos correspondentes, pois

$$x(t) = \int v(t)\, dt$$

Então temos que:

Para o intervalo $0s \leq t \leq 8s$:

$$\int_0^t \frac{3t}{2}\, dt = \frac{3t^2}{4}$$

Para o intervalo $8s \leq t \leq 12s$

$$\int_0^8 \frac{3t}{2}\, dt + \int_8^t -6t + 60\, dt = 48 + (-3t^2 + 60t)_8^t =$$
$$= 48 - 3t^2 + 60t + (3.64) - 60.8 = -240 + 60t - 3t^2$$

Para o intervalo $12s \leq t \leq 16s$

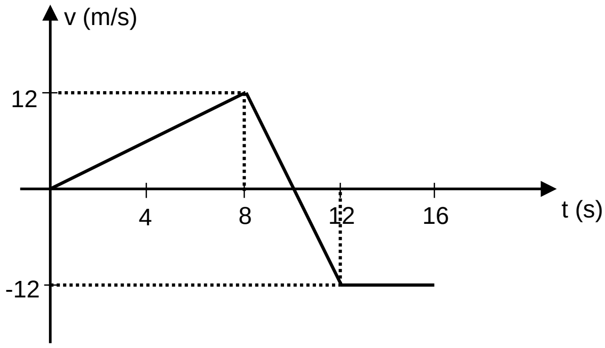
$$\int_0^8 \frac{3t}{2}\, dt + \int_8^{12} -6t + 60\, dt + \int_{12}^t -12\, dt = 48 + 0 + (-12t)_{12}^t =$$
$$= 48 - 12t + (12.12) = 192 - 12t$$

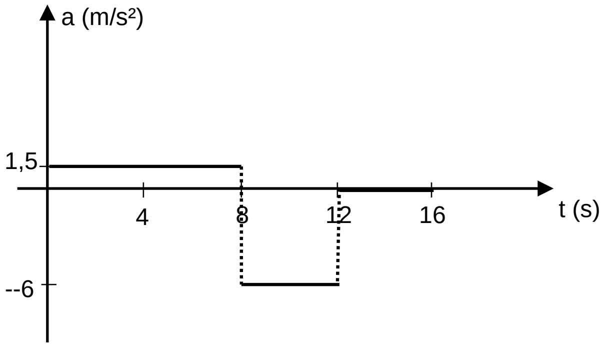
Então temos que

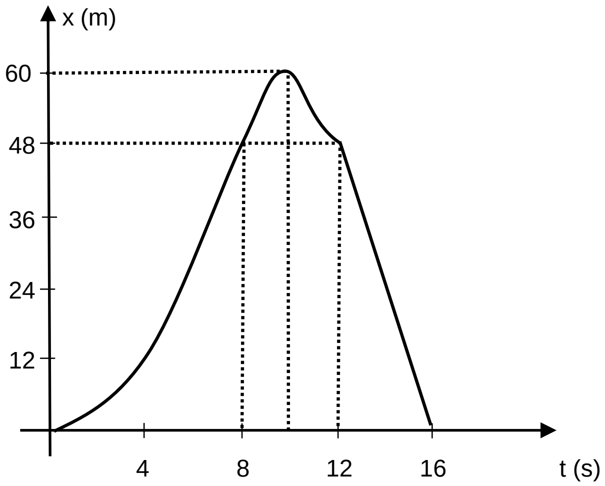
$$x(t) = \begin{cases} \frac{3t^2}{4};\ para\ 0s \leq t \leq 8s \\ -240 + 60t - 3t^2;\ para\ 8s \leq t \leq 12s \\ 192 - 12t;\ para\ 12s \leq t \leq 16s \end{cases}$$

Note que apesar das equações acima terem a mesma forma da equação de movimento $x = x_0 + v_0t + at^2/2$ nas equações acima para os intervalos de tempo maiores que 8s, os termos não representam exatamente os valores de x_0, pois o real x_0 desse movimento é na verdade a posição final da equação anterior, garantindo a continuidade das equações.

a) Agora podemos traçar os gráficos pedidos. Então:







b) Observando o gráfico de velocidade versus tempo, no intervalo entre 0 e 12 segundos, a distância percorrida pela partícula corresponde à área sob a curva, com o detalhe que no intervalo de 10s a 12s a área sob a curva é negativa, então deve ser levada em consideração com o valor positivo. Então:

$$\int_0^8 \frac{3t}{2}\, dt + \int_8^{10} -6t + 60\, dt + \left| \int_{10}^{12} -6t + 60\, dt \right| = 48 + 12 + |-12| = 72$$

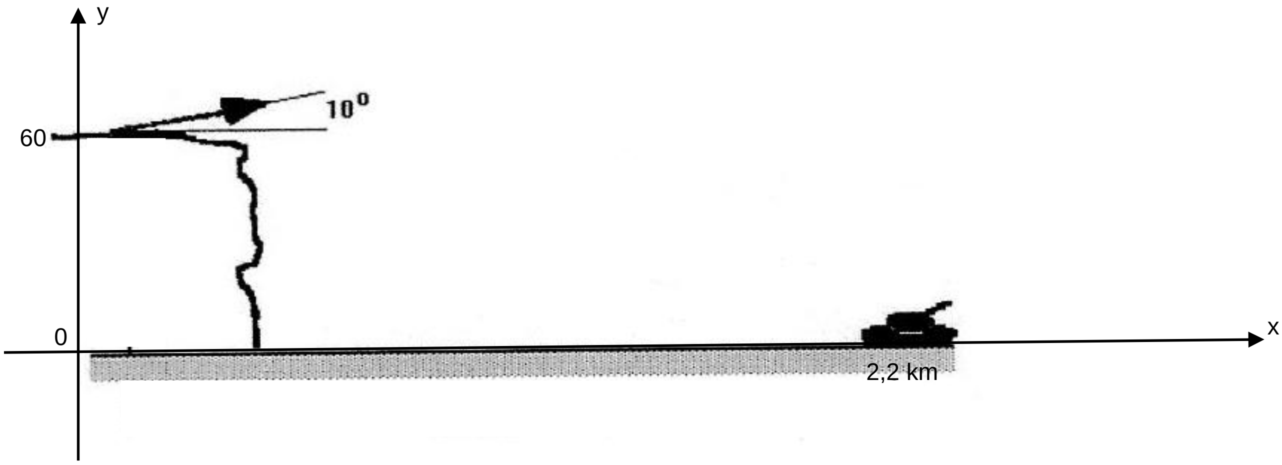
Logo a partícula percorre 72 m ao todo.

c) A posição da partícula em 12 segundos pode ser obtida das duas equações: $-240 + 60t - 3t^2$ ou $192 - 12t$, pois pela continuidade delas, no instante de 12s o valor é o mesmo. Então

$$x(12) = -240 + 60.12 - 3.12^2 = -240 + 720 - 432 = 48$$
$$x(12) = 192 - 12.12 = 192 - 144 = 48$$

Portanto a posição da partícula no instante12s é 48m.

2) Temos a seguinte situação



Em um determinado instante, o tanque começa a se afastar do canhão com uma aceleração de 0,9 m.s^{-2}, partindo do repouso.

Para que o canhão acerte o tanque, precisamos calcular o ponto de encontro deles, que será em algum x>2,2km e ainda precisamos saber quanto tempo o canhão deve esperar para disparar a fim de acertá-lo.

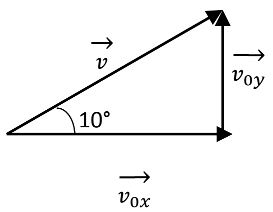
Vamos em primeiro lugar usar as equações do movimento horizontal e vertical do canhão para que possamos saber quanto tempo a bala leva para cair e em qual posição horizontal ela alcança.

As equações são:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \qquad x = x_0 + v_{0x}t$$

Nessa caso temos que:

$y_0 = 60\ m$
$a = -9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}$
$v_{0y} = v \sin 10°\ \ m/s$



$x_0 = 0\ m$
$v_{0x} = v \cos 10°\ \ m/s$

Com isso as equações ficam assim:

$$y = 60 + 240\ \sin 10°\, t - \frac{9{,}8t^2}{2} \qquad x = 240 \cos 10°\, t$$

Vamos calcular o tempo de queda da bala do canhão, ou seja, quando a posição y for zero. Então:

$$0 = 60 + 240\ \sin 10°\, t - \frac{9{,}8t^2}{2}$$
$$9{,}8t^2 - 480\ \sin 10°\, t - 120 = 0$$
$$t = \frac{480\ \sin 10°\ \pm \sqrt{(480\ \sin 10°)^2 - 4.9{,}8.(-120)}}{2.9{,}8}$$
$$t_1 \cong 9{,}8s\ e\ t_2 \cong\ -2{,}5s$$

Então o tempo de queda vale 9,8 segundos, já que o tempo negativo não faz sentido nesse problema.

Agora que sabemos que a bala do canhão leva esse tempo para cair, vamos descobrir com a segunda equação a distância que ela alcança. Então:

$$x = 240.\cos 10°\,.\,9{,}8 \cong 2306{,}8\ m$$

Obs.: Você só chegará nesse resultado se usar o valor não truncado de tempo encontrado anteriormente, ou seja, use 9,759837903.... e não 9,8. A sugestão é sempre fazer os cálculos numa planilha ou salvar os valores intermediários com todas as casas e arredondar apenas a resposta final.

Em segundo lugar vamos escrever a equação do movimento do tanque. Então:

$$x = x_0 +\ v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Nesse caso temos que:

$x_0 = 2200\ m$ $\qquad$ $v_0 = 0\ {}^{m}/_{s}$ $\qquad$ $a = 0{,}9\ m/s^2$

Então

$$x = 2200 + \frac{0{,}9\ t^2}{2}$$

Vamos calcular o tempo que o tanque leva para atingir a posição 2306,8 m. Logo

$$2306{,}8 = 2200 + \frac{0{,}9\ t^2}{2}$$
$$t = \ \pm\sqrt{2.\frac{(2306{,}8 - 2200)}{0{,}9}}$$

Como novamente não faz sentido pensar num tempo negativo temos que:

$$t \cong 15,4\ s$$

a) Então o tempo que o artilheiro deve esperar para atirar com o canhão para atingir o tanque deve ser de

$$15{,}4 - 9{,}8 \cong 5{,}6\ s$$

b) A distância percorrida pelo tanque foi de

$$2306{,}8 - 2200 \cong 106{,}8\ m$$