Mecânica dos Fluidos II (PME 3330) Prova SUBSTITUTIVA - 2017

1. (**4 pontos**) Considere o escoamento com forças de inércia e de volume desprezíveis de um óleo incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ, no espaço entre um disco de raio a e uma superfície paralela separados por uma distância h pequena, conforme mostrado na figura. O disco é deslocado na direção da superfície com uma velocidade V, espremendo o fluido na direção radial. Nestas condições, calcular a força F necessária para deslocar o disco.
Para resolver este problema, considerar que o campo de velocidade (em coordenadas cilíndricas) é da forma $u_r = u_r(r,z)$, $u_z = u_\theta = 0$ e seguir o seguinte roteiro:

a) Demonstrar que a velocidade radial é da forma $u_r(r,z) = \dfrac{f(z)}{r}$. (0.5 pontos)

b) Demonstrar que a distribuição de pressão é puramente radial, isto é $p = p(r)$, assim como que a distribuição de velocidade radial resulta localmente Couette, isto é, $u_r(r,z) = -\dfrac{h^2}{2\mu}\dfrac{dp}{dr}\dfrac{z}{h}\left(1-\dfrac{z}{h}\right)$. (1,0 pontos)

c) Calculando a vazão volumétrica que atravessa a superfície lateral na posição r e aplicando a conservação da massa para um volume de controle do fluido encerrado no espaço interno até a posição r, demonstrar que o gradiente de pressão resulta $\dfrac{dp}{dr} = -\dfrac{6\mu V}{h^3} r$. (1,0 pontos)

d) Considerando como condição de contorno $p(a) = 0$, calcular a distribuição de pressão e demonstrar que a força resulta $F = \dfrac{3\pi\mu a^4 V}{2h^3}$. (1,0 pontos)

e) Considerando como termos representativos da força de inércia e força viscosa respectivamente a $u_r \dfrac{\partial u_r}{\partial r}$ e $\nu \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$, fazer uma análise de ordens de grandeza e demonstrar que a condição para que o escoamento seja considerado de inércia desprezível é $\dfrac{V h}{\nu} << 1$. (0,5 pontos)

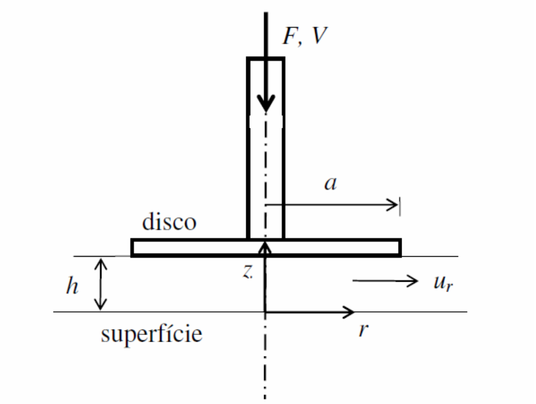
Continuidade: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$

Navier-Stokes, componente r:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + G_r + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]$$

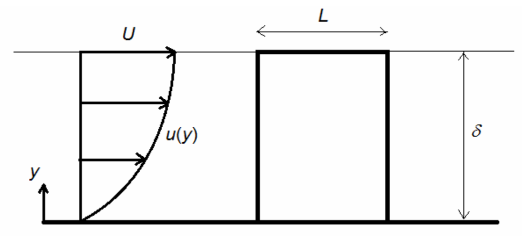
Navier-Stokes, componente z:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + G_z + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$



2 (3 pontos) Uma placa plana de comprimento L e altura δ é soldada numa parede paralelamente a uma camada limite que se aproxima, com um fluido de propriedades ρ e ν. Admita que o escoamento sobre a placa é totalmente turbulento e que o escoamento de aproximação segue a lei de potência $u(y)/U=(y/\delta)^{1/7}$. Deduza uma fórmula para o força de arrasto dessa placa como função de U, L, δ, ρ e ν. Lembre-se que a placa tem os dois lados sujeitos ao arrasto.

Dados: coeficiente de arrasto da camada limite turbulenta para um lado de uma placa plana paralela à corrente: $C_D = \dfrac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}$.



(Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 4ª edição)

3 (3 **pontos**) Considere o escoamento não viscoso em torno de um cilindro sem circulação. Encontre:

a) A posição do ponto sobre a superfície na região frontal frontal ($\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$) onde a aceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (1 pontos)

b) A componente radial da aceleração na superfície do cilindro. É diferente de zero? Por que? (1 ponto)

c) A posição do ponto sobre a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal onde a desaceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (1 ponto)

Formulário:

Função corrente para cilindro de raio a sem circulação mais corrente uniforme, velocidades e Bernoulli:

$$\psi = U_\infty a \,\mathrm{sen}\theta \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) \quad ; \quad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \mathrm{cte}$$

Aceleração da partícula: $a_r = v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta^2}{r} \quad ; \quad a_\theta = v_r \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{v_r v_\theta}{r}$

GABARITO

1. Solução:

a) Da equação de continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)=0 \quad\Rightarrow\quad r\,u_r = f(z) \quad\Rightarrow\quad u_r = \frac{f(z)}{r}$

b) Da equação de Navier-Stokes na componente z, resulta $\frac{\partial p}{\partial z}=0$; como o problema tem simetría de revolução, resulta $p = p(r)$.

Calculamos os termos para substituir na equação de Navier-Stokes, componente r :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{f}{r^2} \quad ; \quad r\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{f}{r} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) = \frac{f}{r^2}$$

Substituindo, com a condição de escoamento de inércia desprezível, resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left(\frac{f}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{f}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r}\frac{d^2 f}{dz^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{d^2 f}{dz^2} = A = cte$$

Para calcular $f(z)$, integramos a expressão anterior, obtendo:

$$f(z) = \frac{1}{2}A\,z^2 + B\,z + C$$

Da condição de contorno $u_r(r,0) = u_r(r,h) = 0$ resulta $f(0) = f(h) = 0$; daqui resultam $C = 0$, $B = -\frac{1}{2}A\,h$. Substituindo, obtemos:

$$f(z) = -\frac{1}{2}A\,h^2\,\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right) = -\frac{1}{2}\frac{r\,h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

$$u_r(r,z) = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

c) Calculamos a vazão volumétrica:

$$Q(r) = \int_0^h u_r\,2\pi\,r\,dz = -\frac{\pi\,h^3\,r}{\mu}\frac{dp}{dr}\int_0^1 z^*\left(1-z^*\right)dz^* = -\frac{\pi\,h^3\,r}{6\mu}\frac{dp}{dr}$$

Aplicando a conservação da massa no volume de controle do fluido até o raio r, temos:

$$Q(r) = V\,\pi\,r^2$$

Eliminando a vazão volumétrica, resulta:

$$-\frac{\pi\,h^3\,r}{6\mu}\frac{dp}{dr} = V\,\pi\,r^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dr} = -\frac{6\mu V}{h^3}r$$

d) Integrando entre r e a, calculamos a distribuição de pressão e a força:

$$p(a) - p(r) = -\frac{3\mu V}{h^3}\left(a^2 - r^2\right) \quad\Rightarrow\quad p(r) = \frac{3\mu V\,a^2}{h^3}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

$$F = \int_0^a p(r)2\pi\,r\,dr = \frac{6\pi\,\mu V\,a^4}{h^3}\int_0^1 r^*\left(1-r^{*2}\right)dr^* = \frac{3\pi\,\mu V\,a^4}{2h^3}$$

e) Fazendo uma análise de ordens de grandeza, temos que:

$$u_r \propto \frac{Q}{r\,h} \quad\Rightarrow\quad \left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right| \propto \frac{Q}{r\,h}\frac{Q}{r\,h\,r} = \frac{Q^2}{r^3\,h^2} \quad ; \quad \left|\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right| \propto \nu\frac{Q}{r\,h\,h^2} = \nu\frac{Q}{r\,h^3}$$

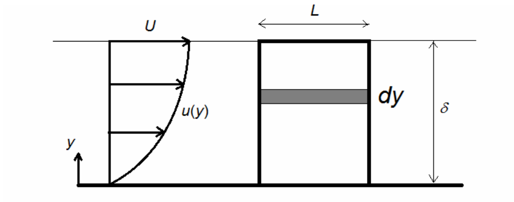
$$\left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right| << \left|\nu\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right| \quad\Rightarrow\quad \frac{Q^2}{r^3\,h^2} << \nu\frac{Q}{r\,h^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{Q}{r^2} << \frac{\nu}{h}$$

Como $Q \propto V\, r^2$, resulta finalmente $\dfrac{V\,h}{\nu} << 1$.

2. Solução:

Uma fatia *dy* sobre a placa vai sofrer um arrasto dado por:

$$dF = \frac{0{,}031\,\nu^{1/7}}{u^{1/7}L^{1/7}}\rho u^2\, L dy = 0{,}31\,\rho\nu^{1/7}\,u^{13/7}\,L^{6/7}\,dy$$



Substituindo o perfil de velocidades:

$$dF = 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}\,L^{6/7}\,\frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\,dy$$

Integrando:

$$F = \int_0^{\delta} 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}\,L^{6/7}\,\frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\,dy$$

Que resulta:

$$F = \frac{49}{62}\times 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}L^{6/7}\delta = 0{,}0245\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}L^{6/7}\delta$$

3. Solução:

a) O campo de velocidade resulta $v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\cos\theta\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)$; $v_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\,\text{sen}\theta\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)$

Na superfície do cilindro, $v_r = 0$. A aceleração tangencial resulta: $a_{\theta s} = \left(\dfrac{v_\theta}{a}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)_{r=a} = 4\dfrac{U_\infty^2}{a}\,\text{sen}\theta\cos\theta$;

como a direção de escoamento é contrária ao versor $\breve{\theta}$, a aceleração na direção do escoamento $a_{\theta e}$ resulta

$a_{\theta e} = -a_{\theta s} = -4\dfrac{U_\infty^2}{a}\,\text{sen}\theta\cos\theta$. Vemos que, para a superfície frontal $\cos\theta \le 0$, de maneira que $a_{\theta e} \ge 0$.

Para um extremo local, deve ser $\left(\dfrac{\partial a_{\theta e}}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_m} = -4\dfrac{U_\infty^2}{a}\left(\cos^2\theta_m - \text{sen}^2\theta_m\right) = -4\dfrac{U_\infty^2}{a}\left(1-2\,\text{sen}^2\theta_m\right) = 0$;

daqui resulta $\text{sen}\theta_m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_m = 135^0 = 3\dfrac{\pi}{4}$. Vemos que $\left(\dfrac{\partial^2 a_{\theta s}}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_m} = 16\dfrac{U_\infty^2}{a}\,\text{sen}\theta_m\cos\theta_m < 0$,

de maneira que o extremo é um máximo local.

A velocidade no ponto vale $V_m = v_{\theta m} = -2\dfrac{\sqrt{2}}{2}U_\infty = -\sqrt{2}\,U_\infty$; por Bernoulli, resulta: $p_m - p_\infty = \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2(1-2) = -\dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2$.

b) Embora a componente radial da velocidade é zero na superfície do cilindro, a componente radial da aceleração é diferente de zero, pois a componente tangencial da velocidade está mudando o módulo e também a direção. Resulta $a_{rs} = -\dfrac{v_{\theta s}^2}{a} = -2\dfrac{U_\infty^2}{a}\,\text{sen}^2\theta \le 0$; para o ponto anterior, resulta $a_{rm} = -\dfrac{U_\infty^2}{a}$.

c) Para a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal é $\theta = \pi$, $v_{\theta\pi} = 0$ e $v_{r\pi} = -U_\infty \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)$. A aceleração é puramente radial, resultando $a_{r\pi} = \left(v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{\theta=\pi} = 2U_\infty^2 \dfrac{a^2}{r^3}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \geq 0$, pois $\dfrac{a}{r} \leq 1$; como a direção de escoamento é contrária ao versor $\breve{r}$, a aceleração na direção do escoamento a_{re} resulta $a_{re} = -a_{r\pi} = -2U_\infty^2 \dfrac{a^2}{r^3}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \leq 0$, isto é, o fluido desacelera.

Para um extremo local, deve ser $\left(\dfrac{\partial a_{re}}{\partial r}\right)_{r=r_m} = 2\dfrac{U_\infty^2}{a^2}\left(3\dfrac{a^4}{r_m^4} - 5\dfrac{a^6}{r_m^6}\right) = 0$; daqui resulta $\dfrac{a}{r_m} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad r_m = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{1/2} a$. Vemos que $\left(\dfrac{\partial^2 a_{re}}{\partial r^2}\right)_{r=r_m} = 2\dfrac{U_\infty^2}{a\, r_m}\left[-12\left(\dfrac{a}{r_m}\right)^4 + 30\left(\dfrac{a}{r_m}\right)^6\right] = \dfrac{108}{25}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{1/2}\dfrac{U_\infty^2}{a^2} > 0$, de maneira que a aceleração na direção do escoamento é um mínimo local; desta maneira, a desaceleração é um máximo local.

A velocidade no ponto vale $v_{rm} = -U_\infty \left(1 - \dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{2}{5}U_\infty$; por Bernoulli, resulta: $p_m - p_\infty = \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(1 - \dfrac{4}{25}\right) = \dfrac{21}{25}\rho U_\infty^2$.