



7. Análise de tensões em laminados



7.1 Tipos de Laminados



TIPOS DE LAMINADOS

- **existem três tipos básicos de laminados:**
 - 1. Laminados simétricos**
 - 2. Laminados antissimétricos**
 - 3. Laminados assimétricos**

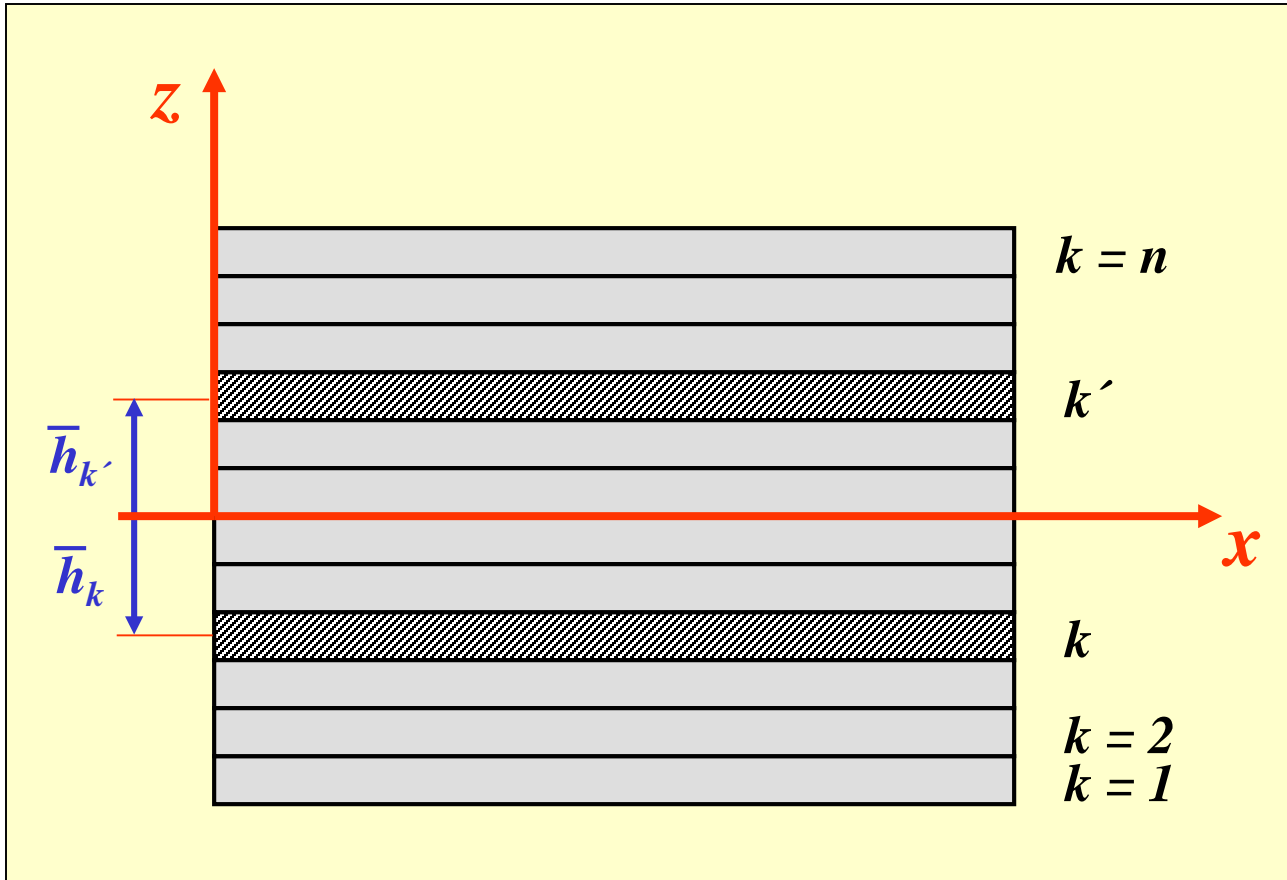


TIPOS DE LAMINADOS

- um laminado é **simétrico** quando para cada camada em um lado do plano de referência há uma outra camada idêntica (mesma espessura, orientação e propriedades mecânicas) no outro lado do plano de referência a uma mesma distância do plano de referência
- o laminado é simétrico em termos de geometria e propriedades mecânicas



TIPOS DE LAMINADOS



$$t_k = t_{k'}$$
$$\bar{h}_k = -\bar{h}_{k'}$$
$$\theta_k = \theta_{k'}$$
$$[\bar{Q}^p]_k = [\bar{Q}^p]_{k'}$$
$$[\bar{Q}^t]_k = [\bar{Q}^t]_{k'}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- a matriz de acoplamento $[B]$ é sempre nula para laminados simétricos

$$[B] = \sum_{k=1}^n t_k \bar{h}_k [\bar{Q}^p]_k = [0]$$

- para cada termo na somatória correspondente a uma camada abaixo do plano de referência existe um termo correspondente à camada simétrica acima do plano de referência que tem a mesma magnitude mas sinal contrário ($h_k = -h_{k'}$)



TIPOS DE LAMINADOS

laminados simétricos



$$[B] = [0]$$

- as relações carga-deformação ficam:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0$$
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- laminados simétricos em que as camadas são especialmente ortotrópicas (isto é, $\theta = 0$ ou $\theta = 90$) são chamados de **laminados simétricos *cross ply*** (ou **laminados simétricos cruzados**)
- os eixos dos sistema de referência têm que coincidir com as direções principais das lâminas
- as lâminas podem ser de tecido ou fita unidirecional
- **exemplos:** $[0/90/0]_T$, $[0/90]_S$, $[(0,90)]_S$, $[0/(0,90)]_S$



TIPOS DE LAMINADOS

cross ply simétrico

- $\theta_k = 0^\circ$ ou $\theta_k = 90^\circ$

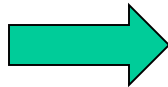


$$Q_{xs_k} = Q_{16_k} = 0$$

$$Q_{ys_k} = Q_{26_k} = 0$$

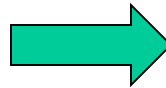
$$Q_{xs_k} = 0$$

$$Q_{ys_k} = 0$$



$$A_{xs_k} = 0$$

$$A_{ys_k} = 0$$



$$D_{xs_k} = 0$$

$$D_{ys_k} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- laminados em que as camadas são orientadas apenas em ângulos $+\theta$ ou $-\theta$ são chamados de **laminados *angle ply***
- esses laminados podem ser simétricos ou não
- as lâminas podem ser de tecido (nesse caso o tecido tem que ser balanceado e $\theta = \pm 45$) ou fita unidirecional
- exemplos: $[\pm 60]_s$, $[45/-45/45]_s$, $[(\pm 45)]_s$, $[45/-45]_T$



TIPOS DE LAMINADOS

- laminados em que para cada camada orientada a um ângulo $+\theta$ existe uma camada de mesma espessura e propriedades orientada a um ângulo $-\theta$ são chamados de **laminados balanceados**
- esses laminados podem ser simétricos ou não
- como $Q_{is}(\theta) = -Q_{is}(-\theta) \longrightarrow A_{is} = 0$ se todas as camadas tiverem a mesma espessura
- por definição, laminados balanceados são tais que $A_{is} = 0$ (note que D_{is} podem ser não nulos)



TIPOS DE LAMINADOS

- uma observação importante é que a definição de **laminados balanceados** depende do sistema de referência adotado
- por exemplo, um laminado $[+45/-45]_s$ é um laminado balanceado. Mas se o sistema de referência é rotacionado de um ângulo $\gamma = 15^\circ$, nesse novo sistema de referência, o laminado é descrito como $[+30/-60]_s$ **que não é balanceado!**



TIPOS DE LAMINADOS

- conseqüentemente, um laminado é balanceado para uma classe de sistemas de referência
- isso significa que o uso do conceito de laminados balanceados pressupõe o conhecimento da orientação da carga no painel



TIPOS DE LAMINADOS

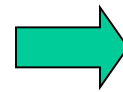
- os laminados balanceados podem ser:
 1. simétricos: $[\pm \theta_1 / \pm \theta_2]_s$
 2. antisimétricos: $[\theta_1 / \theta_2 / -\theta_2 / -\theta_1]_T$
 3. assimétricos: $[\theta_1 / \theta_2 / -\theta_1 / -\theta_2]_T$
- A_{is} são sempre nulos
- D_{is} só são nulos para laminados antisimétricos



TIPOS DE LAMINADOS

- um **laminado antisimétrico** é um caso particular de laminados balanceados
- um laminado antisimétrico tem pares balanceados $+\theta$ e $-\theta$ de camadas de mesma espessura e propriedades posicionadas simetricamente em relação ao plano médio
- os acoplamentos flexão/torção ficam:

$$\begin{aligned} (h_k^3 - h_{k-1}^3) &= (h_{k'}^3 - h_{k'-1}^3) \\ Q_{is_k} &= Q_{is_k}(\theta) = -Q_{is_k}(-\theta) = -Q_{is_{k'}} \end{aligned}$$



$$D_{is} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{is_k} (h_k^3 - h_{k-1}^3) = 0$$



TIPOS DE LAMINADOS

- a matriz de acoplamento $[B]$ para um laminado **antisimétrico** é em geral, não nula
- as relação entre cargas e deformações são:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- um **laminado antisimétrico cross ply** consiste de um arranjo de lâminas a 0° ou 90° de modo que a cada lâmina a 0° a uma distância z do plano médio corresponda uma lâmina a 90° de mesma espessura e material a uma distância $-z$ do plano médio

para cada par k e k' de camadas a 0° e 90° tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{h}_k &= -\bar{h}_{k'} \\ t_k &= t_{k'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{xx_k} &= Q_{yy_{k'}} \\ Q_{yy_k} &= Q_{xx_{k'}} \\ Q_{xy_k} &= Q_{xy_{k'}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{xs_k} &= Q_{xs_{k'}} = 0 \\ Q_{ys_k} &= Q_{ys_{k'}} = 0\end{aligned}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- das equações anteriores resulta:

$$A_{xx} = A_{yy}$$

$$A_{xs} = A_{ys} = 0$$

$$B_{xx} = -B_{yy}$$

$$B_{xy} = B_{xs} = B_{ys} = B_{ss} = 0$$

$$D_{xx} = D_{yy}$$

$$D_{xs} = D_{ys} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- um **laminado antisimétrico *angle ply*** consiste de um arranjo de pares de lâminas com orientações a $+\theta_i$ e $-\theta_i$ ($0^\circ < \theta_i < 90^\circ$) posicionadas simetricamente em relação ao plano médio e que tenham a mesma espessura e propriedades
- devido a anti-simetria: $A_{is} = D_{is} = 0$, onde $i = x, y$



TIPOS DE LAMINADOS

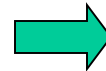
- num laminado antisimétrico *angle ply* para cada par de camadas k e k' balanceadas com orientações θ e $-\theta$.

$$\bar{h}_k = -\bar{h}_{k'}$$
$$t_k = t_{k'}$$

e

$$Q_{xx_k} = Q_{xx_{k'}}$$
$$Q_{yy_k} = Q_{yy_{k'}}$$
$$Q_{xy_k} = Q_{xy_{k'}}$$

$$Q_{xs_k} = -Q_{xs_{k'}}$$
$$Q_{ys_k} = -Q_{ys_{k'}}$$
$$Q_{ss_k} = Q_{ss_{k'}}$$



$$B_{xx} = 0$$
$$B_{yy} = 0$$
$$B_{xy} = 0$$
$$B_{ss} = 0$$



TIPOS DE LAMINADOS

- das equações anteriores resulta para um laminado antisimétrico *angle ply* :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{xs} \\ 0 & 0 & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{xs} \\ 0 & 0 & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- um laminado simétrico e balanceado é um **laminado ortotrópico**
- devido à simetria: $[B] = [0]$
- devido ao balanceamento: $A_{is} = 0$, onde $i = x, y$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{xy} & A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0$$



TIPOS DE LAMINADOS

- um laminado ortotrópico se comporta elasticamente da mesma forma que uma lâmina ortotrópica
- a equação de mudança de coordenadas da matriz $[A]$ de um laminado ortotrópico é análoga a da mudança de coordenadas da matriz $[Q^p]$ de uma lâmina ortotrópica



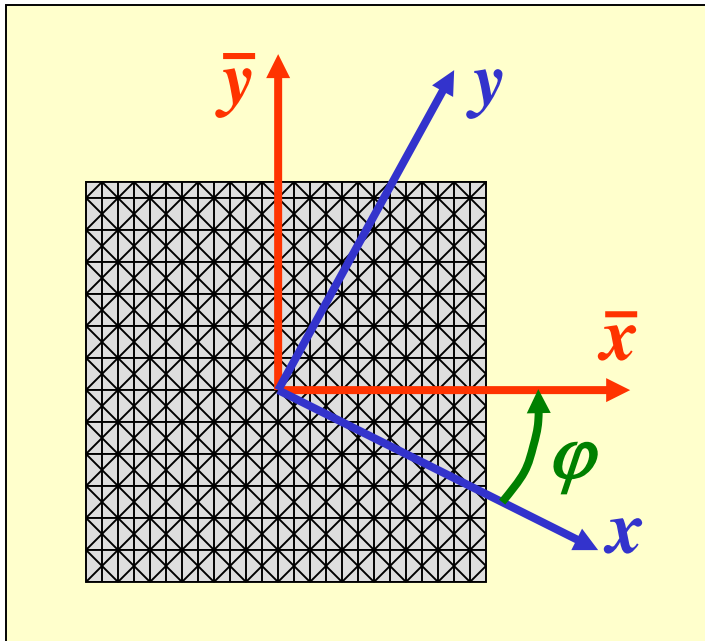
TIPOS DE LAMINADOS

- um **laminado quase-isotrópico** é um laminado ortotrópico cuja matriz $[A]$ é independente de qualquer rotação do sistema de referência
- todas as constantes de engenharia são independentes do sistema de referência
- o material se comporta como um material isotrópico para carregamentos no plano
- só um ensaio de flexão pode distinguir um laminado quase-isotrópico de um material isotrópico



TIPOS DE LAMINADOS

- para um laminado quase-isotrópico:



$$\bar{E}_{\bar{x}} = \bar{E}_x = \text{constante}$$

$$\bar{G}_{\bar{x}\bar{y}} = \bar{G}_{xy} = \text{constante}$$

$$\bar{\nu}_{\bar{x}\bar{y}} = \bar{\nu}_{xy} = \text{constante}$$

$$\bar{\eta}_{\bar{x}\bar{s}} = \bar{\eta}_{\bar{y}\bar{s}} = \bar{\eta}_{xs} = \bar{\eta}_{ys} = 0$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{\bar{E}_x}{2(1 + \bar{\nu}_{xy})}$$



TIPOS DE LAMINADOS

- laminados quase-isotrópicos são do tipo:

$$\left[0 / \frac{\pi}{n} / \frac{2\pi}{n} / \dots / \frac{(n-1)\pi}{n} \right] \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

- exemplos de laminados quase-isotrópicos:

$$[0/60/-60]_s, [0/90/+45/-45]_s$$



7.2 Considerações de projeto



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os termos de acoplamento B_{ij} , A_{is} e D_{is} causam complicações na análise projeto de laminados multidirecionais
- em princípio, esses termos de acoplamento são indesejáveis em aplicações práticas
- em algumas aplicações especiais esses acoplamentos podem ser vantajosos para o projeto



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os termos B_{ij} acoplam carregamentos no plano com flexão e torção da placa
- esses termos causam deformações fora do plano (*warping*) devido a carregamentos térmicos (devido à temperatura de cura) e higroscópicos
- como os efeitos térmicos estão quase sempre presentes é importante eliminar ou reduzir esses termos



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os termos B_{ij} podem ser eliminados usando laminados simétricos
- a não ser que haja alguma restrição de fabricação ou seja vantajoso explorar os termos B_{ij} para o projeto, os laminados devem ser sempre simétricos
- no caso de laminados não simétricos, é possível minimizar os termos B_{ij} selecionando a a seqüência de laminação de forma apropriada



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os termos de **acoplamento de cisalhamento** A_{xs} e A_{ys} causam deformação de cisalhamento no plano sob carregamento normal e deformação normal sob carregamento de cisalhamento no plano
- esses termos são nulos para laminados balanceados ou *cross ply*



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- esses acoplamentos tornam o ensaio desse tipo de laminado bastante difícil
- esses laminados também tem problemas em junções (com materiais metálicos ou compósitos)
- em algumas aplicações pode ser desejável que haja acoplamento A_{xs} ou A_{ys}



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os termos de **acoplamento de torção** D_{xs} e D_{ys} causam torção quando a placa está sujeita à flexão
- esses termos são nulos somente para laminados *cross ply* ou laminados antissimétricos
- esses termos podem ser minimizados pela escolha da seqüência de laminação do laminado
- esses termos podem ser desejáveis em algumas aplicações práticas



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- os únicos laminados para os quais os três tipos de acoplamentos, B_{ij} , A_{is} e D_{is} , são nulos são os laminados simétricos tipo *cross ply*
- laminados simétricos e balanceados tem $B_{ij} = 0$ e $A_{is} = 0$ mas, em geral, $D_{is} \neq 0$; a escolha a escolha adequada da seqüência de laminação pode reduzir os termos D_{is} , por exemplo, aumentando-se o número de camadas para a mesma espessura total do laminado



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

- **se o número de camadas unidirecionais consecutivas com a mesma orientação for grande pode haver tendência à delaminação**
- **em geral, usa-se um limite máximo de três a cinco camadas unidirecionais repetidas**
- **a tendência à delaminação ocorre porque quanto mais espessa for a camada maior a facilidade de trincas transversais crescerem ao longo de toda a espessura**



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

exemplo:

- considere um laminado com 10 camadas a 0° , quatro a 45° e quatro a -45°

seqüência de laminação 1: $[0_5/45_4/-45_4/0_5]_T$

seqüência de laminação 2: $[0_5/45_2/-45_2]_s$

seqüência de laminação 3: $[0_2/45/-45/0_2/-45/45/0]_s$

seqüência de laminação 4: $[0/45/0/-45/0 /-45/0/45/0]_s$



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

seqüência de laminação 1: $[0_5/45_4/-45_4/0_5]_T$

- o laminado é balanceado e assimétrico
- o laminado não é recomendado por ser assimétrico e ter camadas grossas
- os termos A_{is} e D_{is} são nulos mas os acoplamentos B_{ij} são não nulos (deforma sob temperatura)
- camadas grossas favorecem delaminações



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

seqüência de laminação 2: $[0_5/45_2/-45_2]_s$

- o laminado é balanceado e simétrico
- as camadas a $\pm 45^\circ$ são mais finas mas as camadas a 0° continuam grossas
- os termos B_{ij} e A_{is} são nulos mas os acoplamentos D_{is} são não nulos e relativamente altos devido a distribuição grosseira das camadas
- este projeto é adequado mas pode não ser ótimo



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

seqüência de laminação 3: $[0_2/45/-45/0_2/-45/45/0]_s$

- o laminado é balanceado e simétrico
- os termos B_{ij} e A_{is} são nulos; os acoplamentos D_{is} são não nulos e relativamente baixos
- a rigidez à flexão na direção 0° é reduzida em relação aos projetos anteriores
- este projeto é recomendado



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

seqüência de laminação 4: $[0/45/0/-45/0 \ /-45/0/45/0]_s$

- o laminado é balanceado e simétrico
- os termos B_{ij} e A_{is} são nulos; os acoplamentos D_{is} são não nulos mas relativamente baixos
- a rigidez à flexão na direção 0° é reduzida e na direção 90° é aumentada em relação aos projetos 1 e 2
- este projeto é recomendado



CONSIDERAÇÕES DE PROJETO

Recomendações de projeto

- sempre que possível o laminado deve ser balanceado, simétrico e com as camadas distribuídas para minimizar os acoplamentos D_{is}
- deve-se evitar camadas grossas (repetições de um ângulo de laminação de camadas unidirecionais) que favorecem a delaminação
- a rigidez à flexão depende da posição das camadas em relação ao plano médio



7.3 Constantes de engenharia de laminados



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- as definições das constantes de engenharia podem ser aplicadas para determinar constantes de engenharia equivalentes de laminados simétricos
- no caso de laminados não simétricos as definições se aplicam mas as relações são bastante complexas porque envolvem a inversão de uma matriz 6×6



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- será usada uma barra para indicar que se trata de uma constante de engenharia aparente de um laminado; por exemplo, os módulos de elasticidade do laminado são \bar{E}_x e \bar{E}_y
- no caso de laminados simétricos e balanceados pode-se obter relações simples para as constantes de engenharia do laminado em função das constantes A_{ij}



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- considere um laminado simétrico e balanceado sob um carregamento uniaxial N_x
- note que ao aplicarmos um carregamento uniaxial N_x ao laminado, a tensão em cada camada é diferente mas a tensão média que atua no laminado (ou tensão que atuaria em um material homogêneo equivalente) é $\sigma_x = N_x / t$, onde t é a espessura do laminado



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- pode-se provar que nesse caso:

$$\bar{E}_x = \frac{1}{t} \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right)$$

$$\bar{v}_{xy} = \frac{A_{xy}}{A_{yy}}$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{A_{ss}}{t}$$

$$\bar{\eta}_{xs} = \bar{\eta}_{ys} = 0$$

$$\bar{E}_y = \frac{1}{t} \left(A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right)$$

$$\bar{v}_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}}$$

$$\bar{\eta}_{sx} = \bar{\eta}_{sy} = 0$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- considere um laminado simétrico geral
- a tensão em cada camada é diferente mas a tensão média que atua no laminado (ou tensão que atuaria em um material homogêneo equivalente) é:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- a relação carregamento deformação é:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0$$

- invertendo a relação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{ys} \\ a_{xs} & a_{ys} & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}$$

onde: $[a] = [A]^{-1}$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- a relação entre deformação e carregamento em termos das constantes de engenharia é:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}^0 = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & -\frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{sx}}{\bar{G}_{xy}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{sy}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{\bar{\eta}_{xs}}{\bar{E}_x} & \frac{\bar{\eta}_{ys}}{\bar{E}_y} & \frac{1}{\bar{G}_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- as constantes de engenharia em termos dos elementos a_{ij} da matriz $[a]$ ficam:

$$\bar{E}_x = \frac{1}{ta_{xx}}$$

$$\bar{E}_y = \frac{1}{ta_{yy}}$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{1}{ta_{ss}}$$

$$\bar{\nu}_{xy} = -\frac{a_{yx}}{a_{xx}}$$

$$\bar{\nu}_{yx} = -\frac{a_{xy}}{a_{yy}}$$

$$\bar{\eta}_{sx} = \frac{a_{xs}}{a_{ss}}$$

$$\bar{\eta}_{xs} = \frac{a_{sx}}{a_{xx}}$$

$$\bar{\eta}_{sy} = \frac{a_{ys}}{a_{ss}}$$

$$\bar{\eta}_{ys} = \frac{a_{sy}}{a_{yy}}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- da simetria da matriz $[a]$ resulta:

$$\frac{\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} = \frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y}$$
$$\frac{\bar{\eta}_{xs}}{\bar{E}_x} = \frac{\bar{\eta}_{sx}}{\bar{G}_{xy}}$$
$$\frac{\bar{\eta}_{ys}}{\bar{E}_y} = \frac{\bar{\eta}_{sy}}{\bar{G}_{xy}}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- exemplo: constantes de engenharia de um laminado $[0/90]_s$:

para a lâmina a 0° :

$$[\bar{Q}^P]_{\theta=0^\circ} = [Q^P] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

para a lâmina a 90° :

$$[\bar{Q}^P]_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

troca
dos
índices
1 e 2



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- matriz $[A]$ do laminado:

$$[A] = \sum_{k=1}^4 t_k [\bar{Q}] \quad \text{onde } t_k = h \text{ é a espessura de cada lâmina}$$

$$[A] = 2h \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} + 2h \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{22} & 2Q_{12} & 0 \\ 2Q_{12} & Q_{11} + Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$A_{xx} = A_{yy} = 2h(Q_{11} + Q_{22})$$

$$A_{xy} = 4hQ_{12}$$

$$A_{ss} = 4hQ_{66}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- constantes de engenharia:

$$\begin{aligned}A_{xx} &= A_{yy} = 2h(Q_{11} + Q_{22}) \\ A_{xy} &= 4hQ_{12} \\ A_{ss} &= 4hQ_{66}\end{aligned}$$

onde $t = 4h$ é a espessura do laminado

$$\bar{E}_x = \frac{1}{t} \left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right)$$

$$\bar{E}_x = \frac{1}{4h} \left(2h(Q_{11} + Q_{22}) - \frac{16h^2Q_{12}^2}{2h(Q_{11} + Q_{22})} \right) = \frac{1}{2} \left((Q_{11} + Q_{22}) - \frac{4Q_{12}^2}{(Q_{11} + Q_{22})} \right)$$

$$\bar{E}_y = \frac{1}{t} \left(A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right)$$

$$\bar{E}_y = \bar{E}_x = \frac{1}{2} \left((Q_{11} + Q_{22}) - \frac{4Q_{12}^2}{(Q_{11} + Q_{22})} \right)$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- constantes de engenharia:

$$\begin{aligned}A_{xx} &= A_{yy} = 2h(Q_{11} + Q_{22}) \\ A_{xy} &= 4hQ_{12} \\ A_{ss} &= 4hQ_{66}\end{aligned}$$

onde $t = 4h$ é a espessura do laminado

$$\bar{v}_{xy} = \frac{A_{xy}}{A_{yy}} \longrightarrow \bar{v}_{xy} = \frac{A_{xy}}{A_{yy}} = \frac{4hQ_{12}}{2h(Q_{11} + Q_{22})} = \frac{2Q_{12}}{Q_{11} + Q_{22}}$$

$$\bar{v}_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}} \longrightarrow \bar{v}_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}} = \bar{v}_{xy} = \frac{2Q_{12}}{Q_{11} + Q_{22}}$$



CONSTANTES DE ENGENHARIA DE LAMINADOS

- constantes de engenharia:

$$\begin{aligned}A_{xx} &= A_{yy} = 2h(Q_{11} + Q_{22}) \\ A_{xy} &= 4hQ_{12} \\ A_{ss} &= 4hQ_{66}\end{aligned}$$

onde $t = 4h$ é a espessura do laminado

$$\bar{G}_{xy} = \frac{A_{ss}}{t} \longrightarrow \bar{G}_{xy} = \frac{4hQ_{66}}{4h} = Q_{66}$$

$$\bar{\eta}_{xs} = \bar{\eta}_{ys} = 0$$

$$\bar{\eta}_{sx} = \bar{\eta}_{sy} = 0$$



8.4 Cálculo das tensões nas lâminas



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- para se calcular as tensões que atuam em cada lâmina de um laminado para um dado carregamento, deve se seguir o roteiro:
 1. calcular as matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada lâmina
 2. calcular as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ do laminado
 3. calcular as deformações e curvaturas do plano médio
 4. calcular as deformações de cada lâmina
 5. calcular as tensões na lâmina



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

1. cálculo das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada lâmina

dada a matriz $[Q^p]$ e o ângulo de laminação de cada camada, pode-se calcular $[\bar{Q}^p]$ para cada lâmina :

2. calcular as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ do laminado

usando as matrizes $[\bar{Q}^p]_k$ de cada camada calcular as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ do laminado:



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

3. calcular as deformações e curvaturas do plano médio

usando as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ e os carregamentos $\{N\}$ e $\{M\}$ aplicados ao laminado, calcular $\{\varepsilon\}^0$ e $\{\kappa\}$:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

4. calcular as deformações de cada lâmina

as deformações do plano médio $\{\varepsilon^p\}^0$ e $\{\kappa\}$ são iguais para todas as lâminas do laminado; a deformação na k -ésima lâmina é:

$$\{\varepsilon^p\}_k = \{\varepsilon^p\}^0 + z\{\kappa\} \quad h_{k-1} < z < h_k$$

deve-se notar que as deformações variam linearmente em cada camada; o cálculo das deformações deve ser feito para um ou mais valores de z



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

5. calcular as tensões na lâmina

as tensões na k -ésima camada, para um dado valor de z , são calculadas a partir das deformações calculadas e da matriz $[\bar{Q}^p]$:

$$\{\sigma^p\}_k = [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}_k - \{e^p\}_k \right)$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- uma vez calculadas as tensões e deformações numa camada, é interessante transformar essas grandezas para os eixos principais da camada para aplicação dos critérios de resistência



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- exemplo: tensões nas lâminas de um laminado $[0/90]_s$ sujeito a um carregamento uniaxial N_x

1. cálculo das matrizes $[\bar{Q}^p]$ de cada lâmina

para as lâminas a 0° :

$$[\bar{Q}^p]_{\theta=0^\circ} = [Q^p] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

para as lâminas a 90° :

$$[\bar{Q}^p]_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

troca
dos
índices
1 e 2



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

2. calcular as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ do laminado

- como o laminado é simétrico a matriz $[B]$ é nula
- como não há momentos resultantes as curvaturas do plano médio são nulas e portanto a matriz $[D]$ não precisa ser calculada

- matriz $[A]$ do laminado:

$$[A] = \sum_{k=1}^4 t_k [\bar{Q}^p]_k$$

onde $t_k = h$ é a espessura de cada lâmina



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

2. calcular as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ do laminado

$$[A] = \sum_{k=1}^4 t_k [\bar{Q}^p]$$

portanto:

$$[A] = 2h \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} + 2h \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = 2h \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{22} & 2Q_{12} & 0 \\ 2Q_{12} & Q_{11} + Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

3. calcular as deformações e curvaturas do plano médio

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} [B]=[0] \\ \Delta T = 0 \\ \Delta c = 0 \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] \\ [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] \\ [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \{M\} = \{0\} \\ \{M\} = \{0\} \end{matrix} \quad \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]^{-1} \\ [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

$$\{\varepsilon^p\}^0 = [A]^{-1}\{N\} = \left(2h \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{22} & 2Q_{12} & 0 \\ 2Q_{12} & Q_{11} + Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

resolvendo para as deformações:

$$\{\varepsilon^p\}^0 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} (Q_{11} + Q_{22})/\Delta & -2Q_{12}/\Delta & 0 \\ -2Q_{12}/\Delta & (Q_{11} + Q_{22})/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2Q_{66}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde: $\Delta = (Q_{11} + Q_{22})^2 - 4Q_{12}^2$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

4. calcular as deformações de cada lâmina

$$\{\varepsilon^p\}^0 = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11} + Q_{22} \\ -2Q_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- uma vez calculadas as deformações, pode-se calcular as tensões em cada uma das camadas
- como as curvaturas $\{\kappa\}$ são nulas, então as deformações são constantes ao longo de toda a espessura do laminado, isto é: $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon\}^0$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

5. calcular as tensões na lâmina

para as lâminas a 0° :

$$\{\sigma^p\}_k = [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}_k - \{e^p\}_k \right) \quad \left\{ e^p \right\}_k = \{0\}$$

$$\{\sigma^p\}_{\theta=0^\circ} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} + Q_{22} \\ -2Q_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}(Q_{11} + Q_{22}) - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - 2Q_{22}Q_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

simplificando:

$$\{\sigma^p\}_{\theta=0^\circ} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}^2 + Q_{11}Q_{22} - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} - Q_{22}) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

5. calcular as tensões na lâmina

para as lâminas a 90° :

$$\{\sigma^p\}_k = [\bar{Q}^p]_k \left(\{\varepsilon^p\}_k - \{e^p\}_k \right) \quad \{e^p\}_k = \{0\}$$

$$\{\sigma^p\}_{\theta=90^\circ} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} + Q_{22} \\ -2Q_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{22}(Q_{11} + Q_{22}) - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - 2Q_{11}Q_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

simplificando:

$$\{\sigma^p\}_{\theta=90^\circ} = \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}Q_{22} + Q_{22}^2 - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{22} - Q_{11}) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

6. Para verificar os cálculos, calcula-se o vetor $\{N\}$ a partir das tensões calculadas nas camadas:

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma\} dz = \sum_{k=1}^4 \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\sigma^p\}_k dz = \sum_{k=1}^4 (h_k - h_{k-1}) \{\sigma^p\}_k = h \sum_{k=1}^4 \{\sigma^p\}_k = 2h \left(\{\sigma^p\}_{\theta=0^\circ} + \{\sigma^p\}_{\theta=90^\circ} \right)$$

portanto:

$$\{N\} = 2h \left(\frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}^2 + Q_{11}Q_{22} - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} - Q_{22}) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{N_x}{2h\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}Q_{22} + Q_{22}^2 - 2Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{22} - Q_{11}) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \frac{N_x}{\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}^2 + 2Q_{11}Q_{22} + Q_{22}^2 - 4Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} - Q_{22}) + Q_{12}(Q_{22} - Q_{11}) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde: $\Delta = (Q_{11} + Q_{22})^2 - 4Q_{12}^2$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

$$\{N\} = \frac{N_x}{\Delta} \begin{Bmatrix} Q_{11}^2 + 2Q_{11}Q_{22} + Q_{22}^2 - 4Q_{12}^2 \\ Q_{12}(Q_{11} - Q_{22}) + Q_{12}(Q_{22} - Q_{11}) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{N_x}{(Q_{11} + Q_{22})^2 - 4Q_{12}^2} \begin{Bmatrix} (Q_{11} + Q_{22})^2 - 4Q_{12}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

portanto, o vetor de esforços resultantes é:

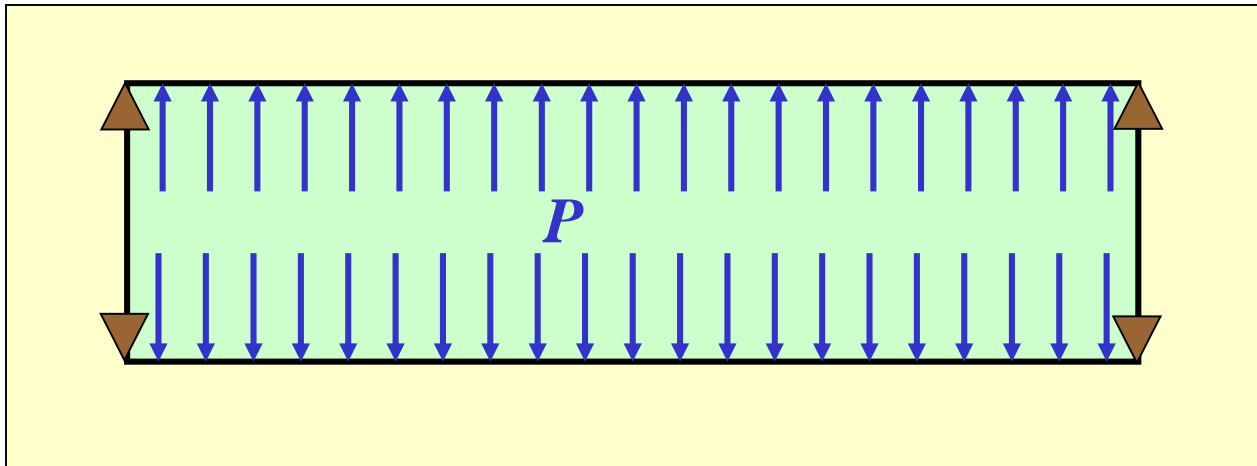
$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

reproduz exatamente o vetor de carregamentos prescrito



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- exemplo: propriedades mecânicas e tensões nas lâminas de um cilindro de parede fina constituído de um laminado $[90/+30/-30/90_2]_T$ (em relação à direção longitudinal) sujeito a um carregamento hidrostático





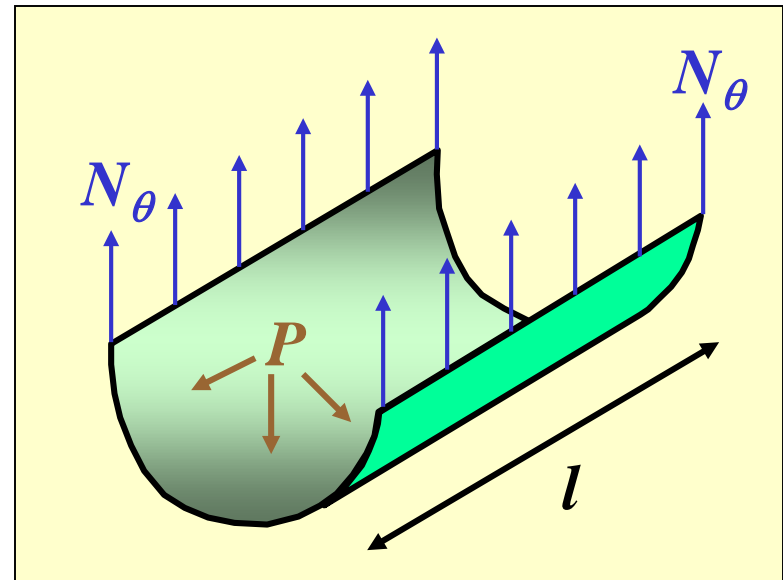
CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- o carregamento eqüivale ao de um cilindro infinito sujeito a uma pressão interna
- os esforços resultantes que agem na parede de um segmento de comprimento l são:

$$F = PDl = 2N_{\theta}l$$

$$N_{\theta} = \frac{PD}{2} = Pr$$

$$N_x = N_s = 0$$





CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- como o laminado é balanceado não há torção do cilindro
- a estrutura e o carregamento é simétrico, portanto a matriz $[B]$ não precisa ser calculada
- como não há deformações de flexão:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{x\theta} & 0 \\ A_{x\theta} & A_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- da equação resulta:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{x\theta} & 0 \\ A_{x\theta} & A_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = P r \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} & 0 \\ a_{x\theta} & a_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- a tensão circunferencial média na parede do cilindro é:

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} = \frac{P r}{t}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

• portanto:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} & 0 \\ a_{x\theta} & a_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = P r \begin{Bmatrix} a_{x\theta} \\ a_{\theta\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

• onde:

$$P r = \sigma_\theta t = 400 \text{ N/mm}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- das constantes elásticas do laminado temos:

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= \frac{1}{ta_{xx}} \\ \bar{E}_\theta &= \frac{1}{ta_{\theta\theta}} \\ \bar{G}_{x\theta} &= \frac{1}{ta_{ss}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{x\theta} &= -\frac{a_{x\theta}}{a_{xx}} \\ \bar{\nu}_{\theta x} &= -\frac{a_{x\theta}}{a_{\theta\theta}}\end{aligned}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- como exemplo, usaremos os seguintes dados para as propriedades elásticas e geométricas:

$$E_1 = 142 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10.3 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.2 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.27$$

$$h = 0.14 \text{ mm}$$

$$r = 100 \text{ mm}$$

$$P = 4 \text{ MPa}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- matriz $[\bar{Q}^p]$ para a camada 90° (0° em relação à direção circunferencial):

$$[\bar{Q}^p]_{90} = \begin{bmatrix} 10.35 & 2.80 & 0 \\ 2.80 & 142.75 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- matriz $[\bar{Q}^p]$ para a camada 30° (60° em relação à direção circunferencial):

$$[\bar{Q}^p]_{30} = \begin{bmatrix} 87.40 & 25.06 & -41.52 \\ 25.06 & 21.20 & -15.81 \\ -41.52 & -15.81 & 29.46 \end{bmatrix} GPa$$

- matriz $[\bar{Q}]$ para a camada -30° (-60° em relação à direção circunferencial):

$$[\bar{Q}^p]_{30} = \begin{bmatrix} 87.40 & 25.06 & 41.52 \\ 25.06 & 21.20 & 15.81 \\ 41.52 & 15.81 & 29.46 \end{bmatrix} GPa$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- cálculo da matriz $[A]$:

$$[A] = h \left([\bar{Q}^p]_{90} + [\bar{Q}^p]_{30} + [\bar{Q}^p]_{-30} + [\bar{Q}^p]_{90} + [\bar{Q}^p]_{90} \right)$$

- substituindo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 28.90 & 8.21 & 0 \\ 8.21 & 65.91 & 0 \\ 0 & 0 & 11.30 \end{bmatrix} 10^3 N / mm$$

- espessura total do laminado:

$$t = 5h = 0.7 \text{ mm}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- invertendo a matriz $[A]$:

$$[a] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} & 0 \\ a_{x\theta} & a_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & a_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.587 & -0.447 & 0 \\ -0.447 & 1.573 & 0 \\ 0 & 0 & 8.849 \end{bmatrix} 10^{-5} \text{ mm} / N$$

- propriedades elásticas do cilindro

$$\bar{E}_x = \frac{1}{ta_{xx}} = 39.83 \text{ GPa}$$

$$\bar{E}_\theta = \frac{1}{ta_{\theta\theta}} = 90.70 \text{ GPa}$$

$$\bar{\nu}_{\theta x} = -\frac{a_{x\theta}}{a_{\theta\theta}} = 0.284$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- cálculo das deformações do cilindro:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} & 0 \\ a_{x\theta} & a_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = P r \begin{Bmatrix} a_{x\theta} \\ a_{\theta\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$P r = \sigma_\theta t = 400 \text{ N/mm}$$

- substituindo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = P r \begin{Bmatrix} a_{x\theta} \\ a_{\theta\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = 400 \times 10^{-5} \begin{Bmatrix} -0.447 \\ 1.573 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1788 \\ 6292 \\ 0 \end{Bmatrix} \mu\varepsilon = \begin{Bmatrix} -0.001788 \\ 0.006292 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- variação do raio do cilindro:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r}$$



$$u = \varepsilon_{\theta} r = 0.6292 \text{ mm}$$

- encurtamento do cilindro:

$$\varepsilon_x = \nu_{\theta x} \varepsilon_{\theta} = 0.001787$$

$$\Delta x = l \varepsilon_x = 0.001787 l$$

para $l = 1000 \text{ mm}$:

$$\Delta x = l \varepsilon_x = 1.787 \text{ mm}$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- tensões em cada camada:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{x\theta} & Q_{xs} \\ Q_{x\theta} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta s} \\ Q_{xs} & Q_{\theta s} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{x\theta} & Q_{xs} \\ Q_{x\theta} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta s} \\ Q_{xs} & Q_{\theta s} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.001787 \\ 0.006292 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- para as camadas a 90°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix}_{90} = \begin{bmatrix} 10.35 & 2.80 & 0 \\ 2.80 & 142.75 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.001788 \\ 0.006292 \\ 0 \end{Bmatrix} GPa = \begin{Bmatrix} -0.93 \\ 896.27 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$



CÁLCULO DAS TENSÕES NAS LÂMINAS

- para as camadas a 30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix}_{30} = \begin{bmatrix} 87.40 & 25.06 & -41.52 \\ 25.06 & 21.20 & -15.81 \\ -41.52 & -15.81 & 29.46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.001788 \\ 0.006292 \\ 0 \end{Bmatrix} GPa = \begin{Bmatrix} 1.40 \\ 88.86 \\ -25.35 \end{Bmatrix} MPa$$

- para as camadas a -30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix}_{-30} = \begin{bmatrix} 87.40 & 25.06 & 41.52 \\ 25.06 & 21.20 & 15.81 \\ 41.52 & 15.81 & 29.46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.001788 \\ 0.006292 \\ 0 \end{Bmatrix} GPa = \begin{Bmatrix} 1.40 \\ 88.86 \\ 25.35 \end{Bmatrix} MPa$$



8. Resistência



8.1 Mecanismos de Falha



MECANISMOS DE FALHA

- as lâminas de compósitos unidirecionais são muito resistentes na direção das fibras mas pouco resistentes a cargas transversais ou fora do plano
- num laminado, não há fibras na direção fora do plano; a falha nessa direção pode ocorrer para valores muito baixos de carga



MECANISMOS DE FALHA

- **compósitos poliméricos podem sofrer diversos tipos de falhas**
- **as falhas podem ocorrer na fibra, na matriz ou na interface**
- **as falhas nas fibras, em geral, são catastróficas levando à fratura do laminado**
- **falhas na matriz podem ocorrer a uma carga bastante abaixo da carga de fratura do laminado**



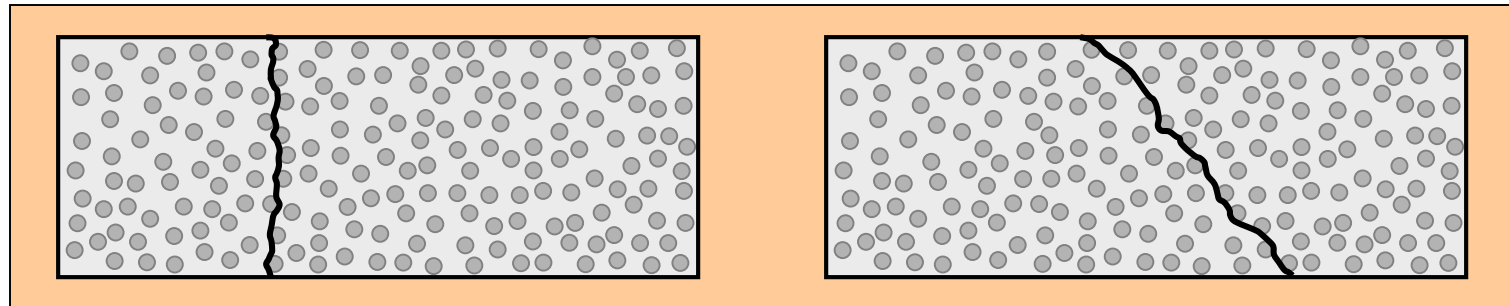
MECANISMOS DE FALHA

- as falhas na matriz podem ser:
 1. intralaminares
 2. translaminares
 3. interlaminares



MECANISMOS DE FALHA

- as falhas **intralaminares e translaminares** na matriz são trincas que se desenvolvem paralelamente à direção das fibras
- essas trincas comprometem a rigidez e a capacidade portante da lâmina para carregamentos transversais ou de cisalhamento





MECANISMOS DE FALHA

- as falhas **interlaminares** são trincas que se desenvolvem na interface entre duas camadas podendo causar a **delaminação** das camadas
- as falhas interlaminares são causadas pelos componentes de tensão fora do plano (σ_{xz} , σ_{yz} e σ_{zz}) que não são levadas em conta pela Teoria Clássica da Laminação
- esse tipo de falha é difícil de ser previsto teoricamente



MECANISMOS DE FALHA

- **tenacidade** é a capacidade do material de resistir à formação e propagação de trincas
- defeitos de fabricação (vazios e delaminações) criam concentrações de tensões e favorecem a formação e propagação de trincas; a matriz mais tenaz é mais tolerante à presença de defeitos
- a matriz mais tenaz também é mais resistente à formação de defeitos causados em serviço por impacto



MECANISMOS DE FALHA

- a tenacidade é uma propriedade extremamente importante para o material da matriz
- os polímeros termoplásticos são mais tenazes do que os termorrígidos mas mais caros e difíceis de processar
- a tenacidade de matrizes termorrígidas pode ser melhorada pela adição de termoplásticos



MECANISMOS DE FALHA

• há três tipos de carregamentos básicos no plano a serem considerados:

1. tração

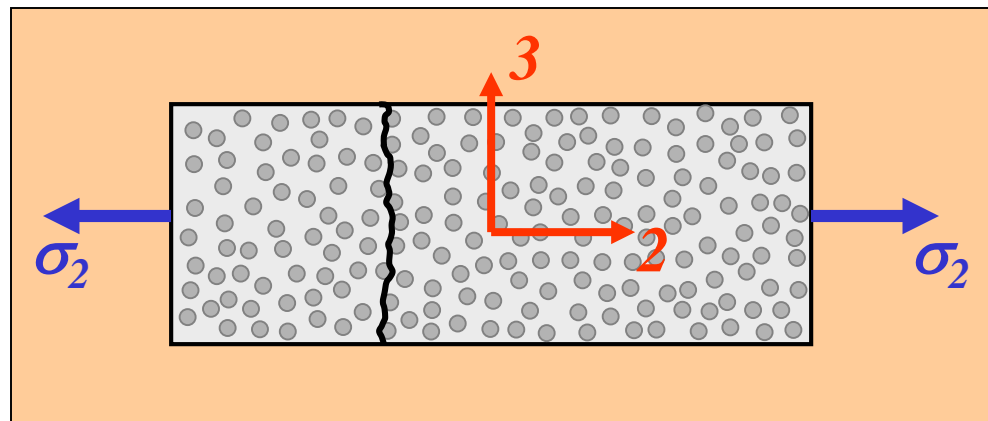
2. compressão

3. cisalhamento



MECANISMOS DE FALHA

- a falha de uma lâmina unidirecional por tração na direção longitudinal se dá por ruptura das fibras e é catastrófica
- a falha por tração na direção transversal se dá por trincas transversais na matriz



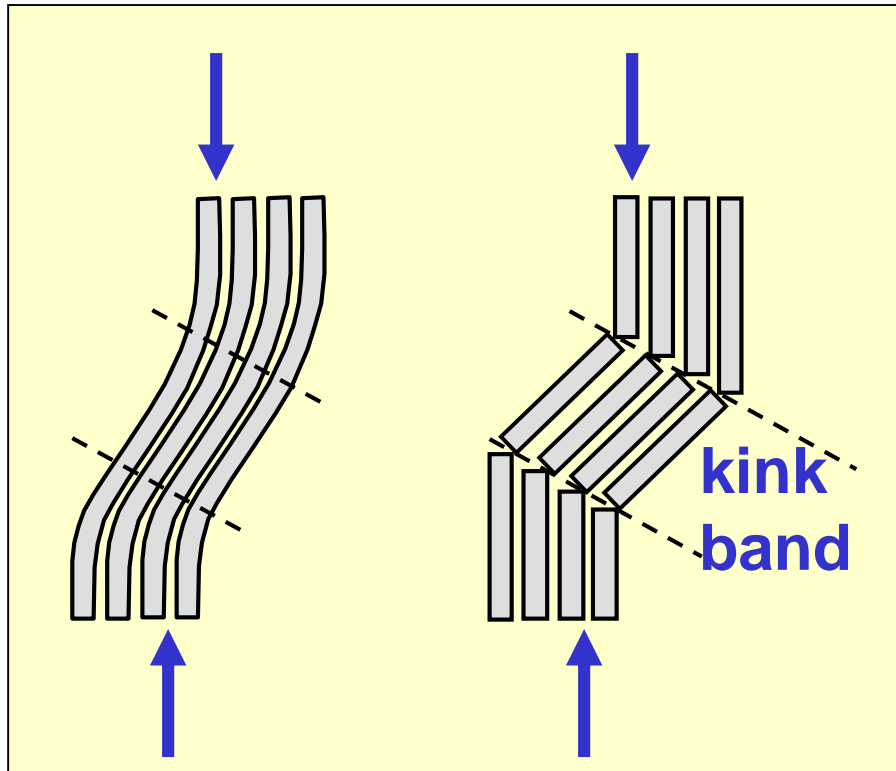


MECANISMOS DE FALHA

- a falha de uma lâmina unidirecional por compressão na direção longitudinal se dá por micro-flambagem das fibras embebidas na matriz
- a micro-flambagem das fibras causa fratura das fibras por cisalhamento na forma de *kink bands*



MECANISMOS DE FALHA

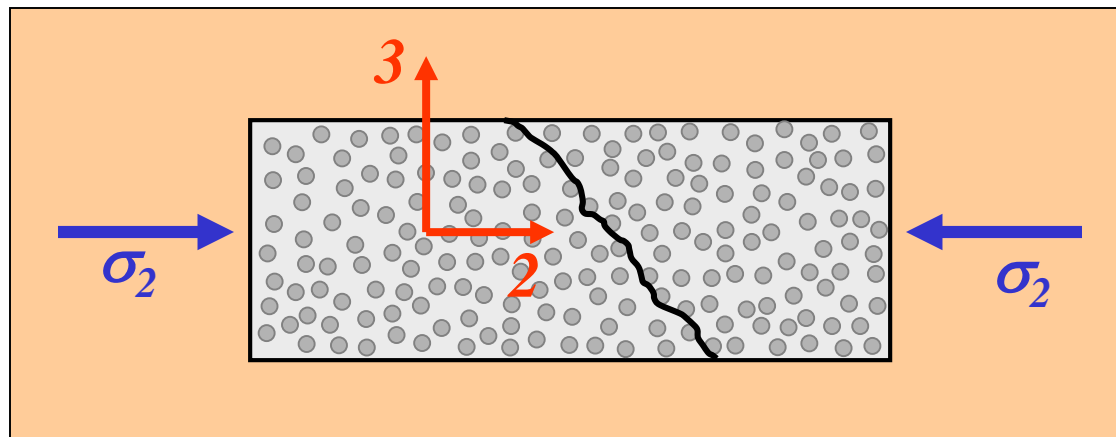


- o cálculo da carga de falha por compressão na fibra é baseada na microflambagem das fibras em um meio elástico (matriz)
- a resistência é dominada pelas propriedades elásticas da fibra e da matriz



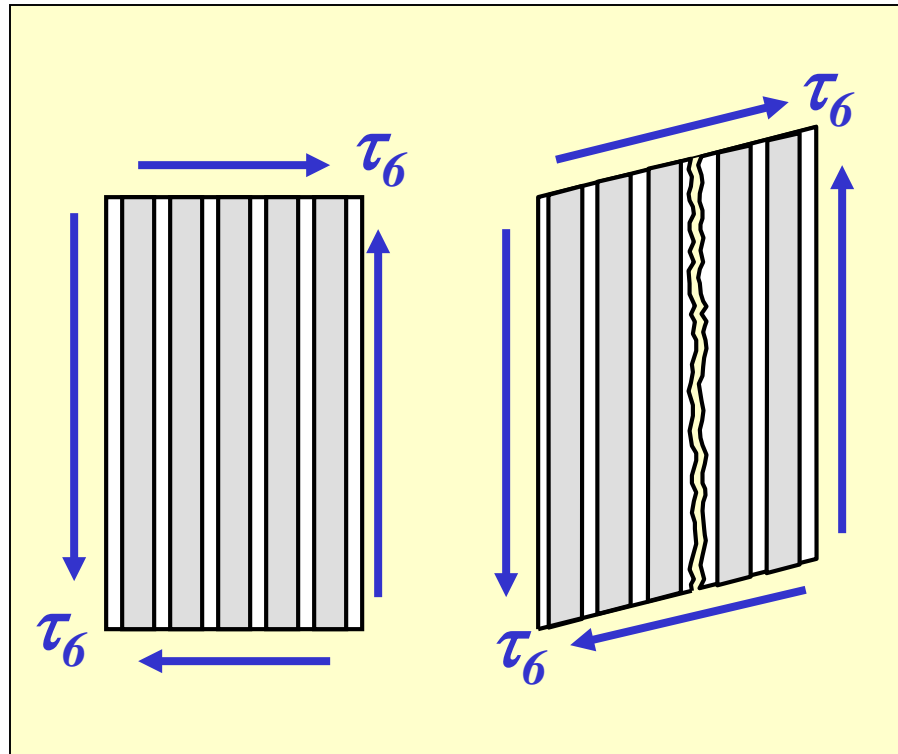
MECANISMOS DE FALHA

- a falha de uma lâmina unidirecional por compressão na direção transversal, em geral, se dá por cisalhamento com formação de trincas paralelas às fibras; a interface fibra matriz é o fator dominante





MECANISMOS DE FALHA



- a falha de uma lâmina unidirecional por cisalhamento no plano se dá pela formação de trincas paralelas às fibras
- a interface fibra matriz é o fator dominante



MECANISMOS DE FALHA

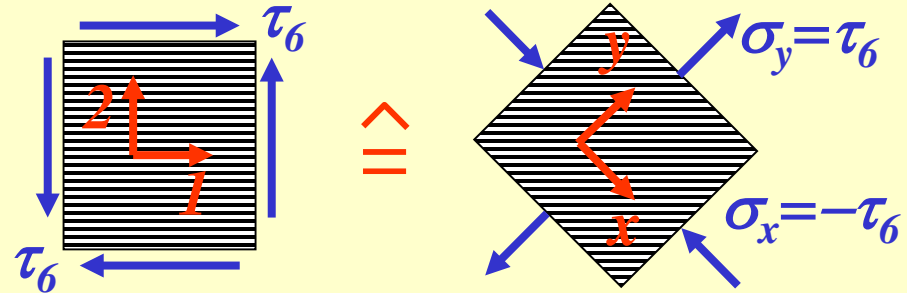
- o sinal da carga não afeta a resistência ao cisalhamento no plano se a lâmina for especialmente ortotrópica (carregamento paralelo aos eixos principais da lâmina)
- o sinal do cisalhamento afeta a resistência se a lâmina for geralmente ortotrópica



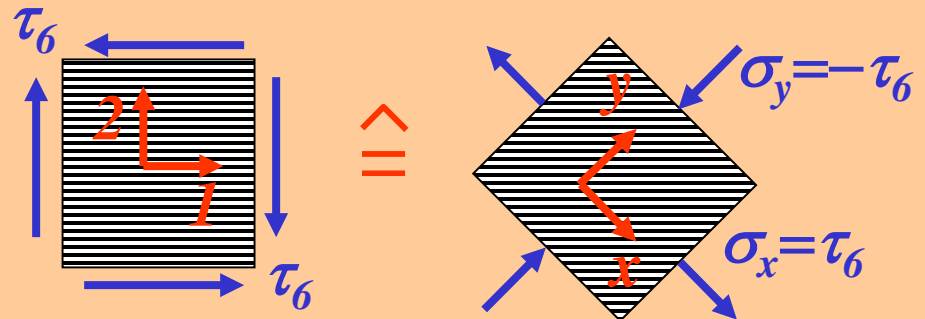
MECANISMOS DE FALHA

- lâmina especialmente ortotrópica

cisalhamento positivo



cisalhamento negativo

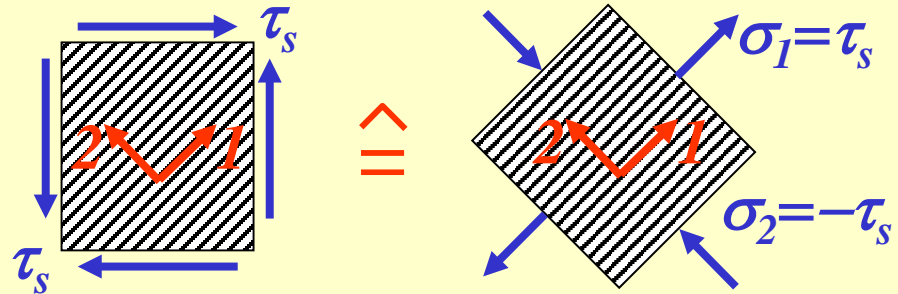




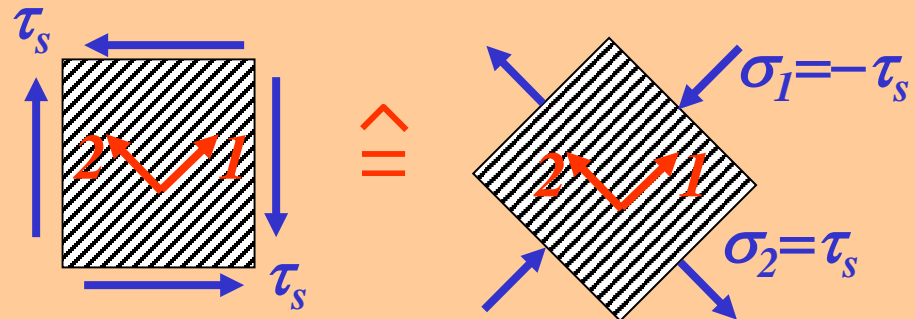
MECANISMOS DE FALHA

- lâmina geralmente ortotrópica

cisalhamento positivo



cisalhamento negativo





8.2 Critérios de Falha



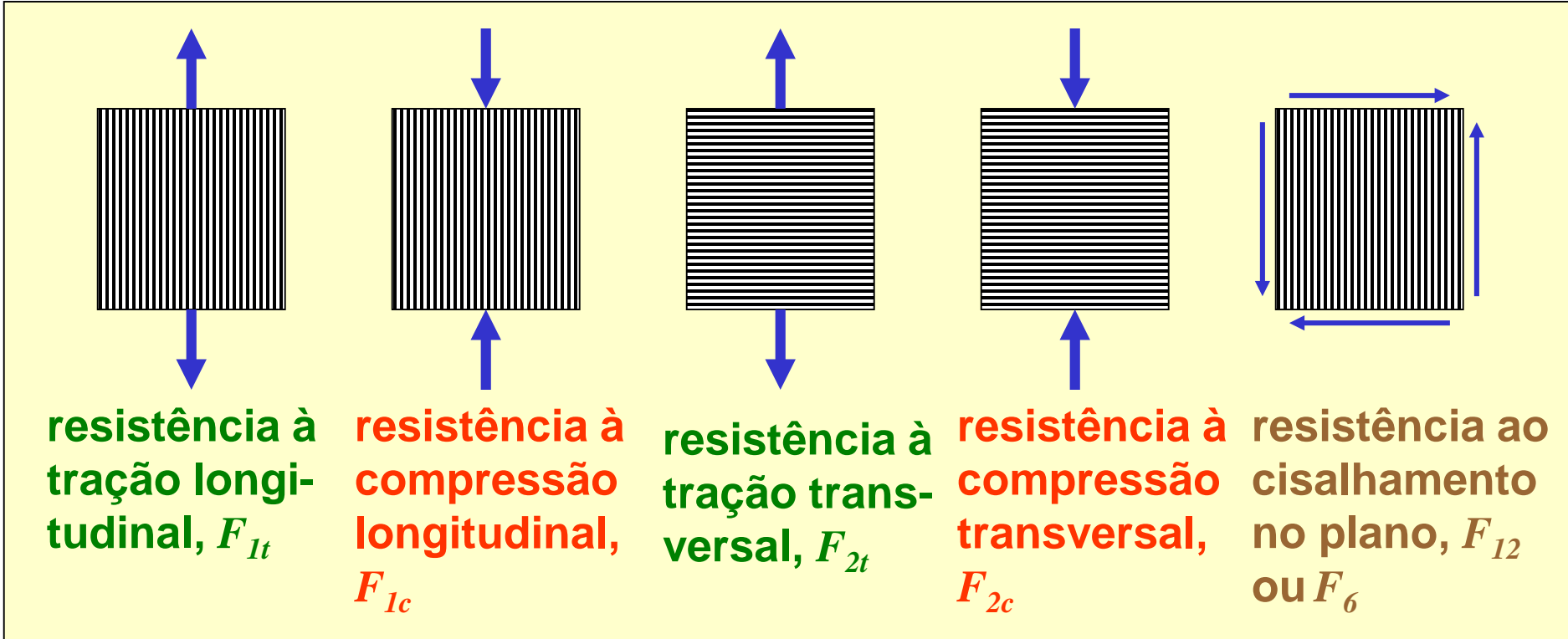
CRITÉRIOS DE FALHA

- os critérios de falha para uma lâmina são baseados nas resistências da lâmina aos carregamentos fundamentais
- os critérios de falha permitem calcular a resistência da lâmina para carregamentos biaxiais baseados na resistência aos carregamentos fundamentais



CRITÉRIOS DE FALHA

- resistência da lâmina – carregamentos básicos



resistência à tração longitudinal, F_{1t}

resistência à compressão longitudinal, F_{1c}

resistência à tração transversal, F_{2t}

resistência à compressão transversal, F_{2c}

resistência ao cisalhamento no plano, F_{12} ou F_6



CRITÉRIOS DE FALHA

• valores típicos de resistência de lâminas unidirecionais

Propriedade	Material				
	Carbono /epóxi	Carbono /PEEK	Vidro-E/ epóxi	Vidro-S/ epóxi	Kevlar/ epóxi
Resistência à tração longitudinal, F_{1t} (MPa)	2280	2060	1080	1280	1280
Resistência à compressão longitudinal, F_{1c} (MPa)	1440	1080	620	690	335
Resistência à tração transversal, F_{2t} (MPa)	57	78	39	49	30
Resistência à compressão transversal, F_{2c} (MPa)	228	196	128	158	158
Resistência ao cisalhamento no plano, F_6 (MPa)	71	157	89	69	49



CRITÉRIOS DE FALHA

- os critérios de falha mais usados são:
 1. critério da tensão máxima
 2. critério da deformação máxima
 3. critério de Tsai-Hill
 4. critério de Tsai-Wu



CRITÉRIOS DE FALHA

Exemplos numéricos

Os exemplos numéricos deste capítulo usarão as seguintes propriedades mecânicas:

propriedades elásticas:

$$E_1 = 142 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10,3 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7,2 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,27$$

$$\nu_{21} = 0,0196$$

propriedades de resistência:

$$F_{1t} = 2280 \text{ MPa}$$

$$F_{1c} = 1440 \text{ MPa}$$

$$F_{2t} = 57 \text{ MPa}$$

$$F_{2c} = 228 \text{ MPa}$$

$$F_6 = 71 \text{ MPa}$$

$$\alpha = 9 \times 10^{-8} \text{ mm}^6/\text{N}^3$$



8.2.1 Tensão máxima



CRITÉRIOS DE FALHA

Critério da Tensão Máxima

- a falha ocorre quando pelo menos um dos componentes de tensão excede o valor correspondente à resistência àquele tipo de carregamento
- o critério da tensão máxima **só pode ser aplicado nas direções principais da lâmina**



CRITÉRIOS DE FALHA

- o critério da tensão máxima é representado matematicamente por três sub-critérios:

$$\begin{aligned} - F_{1c} < \sigma_1 < F_{1t} \\ - F_{2c} < \sigma_2 < F_{2t} \\ - F_6 < \tau_6 < F_6 \end{aligned}$$

- no critério da tensão máxima **não há interação entre as tensões**



CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

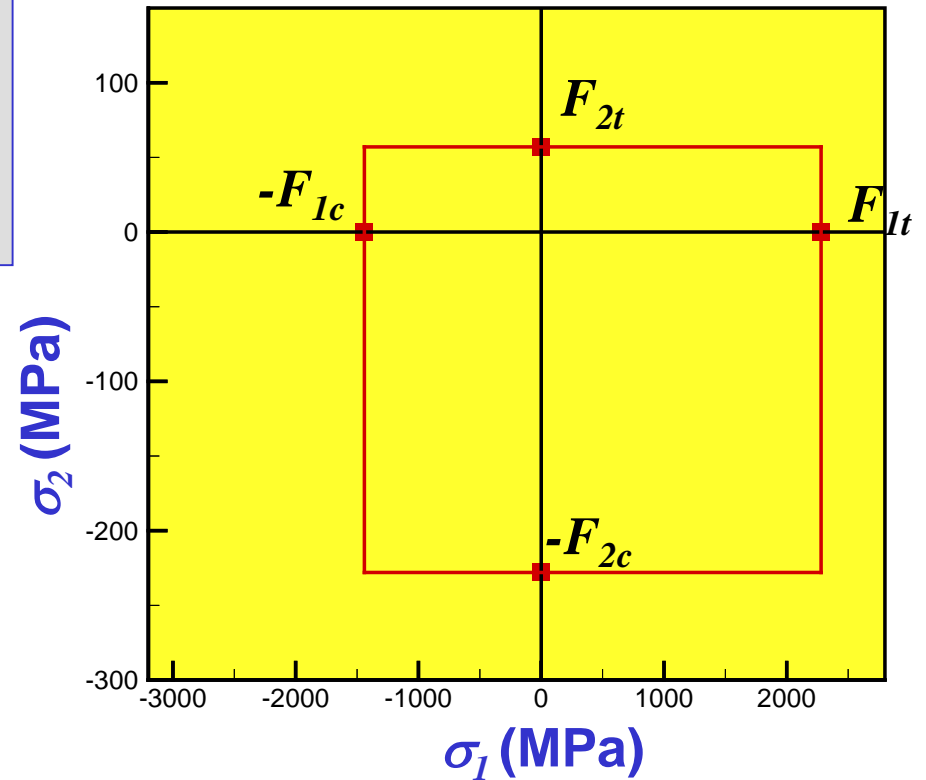
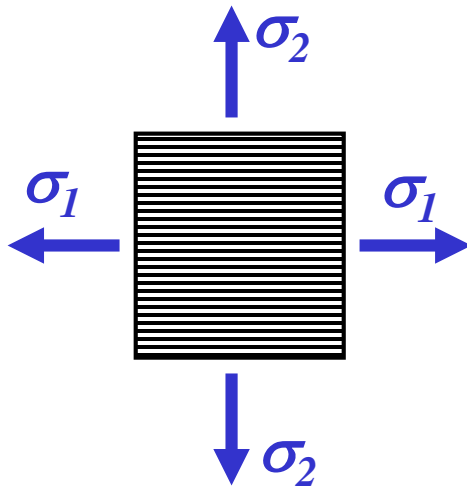
- o critério da tensão máxima indica o tipo de falha:
 1. falha por tração na direção longitudinal (fratura de fibras)
 2. falha por compressão na direção longitudinal (fratura de fibras)
 3. falha por tração na direção transversal (trincas na matriz paralelas às fibras)
 4. falha por compressão na direção transversal (trincas na matriz por cisalhamento)
 5. falha por cisalhamento (trincas na matriz paralelas às fibras)



CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

• se $\tau_6 = 0$, o envelope de falha tem a forma de um retângulo no plano $\sigma_1\sigma_2$:

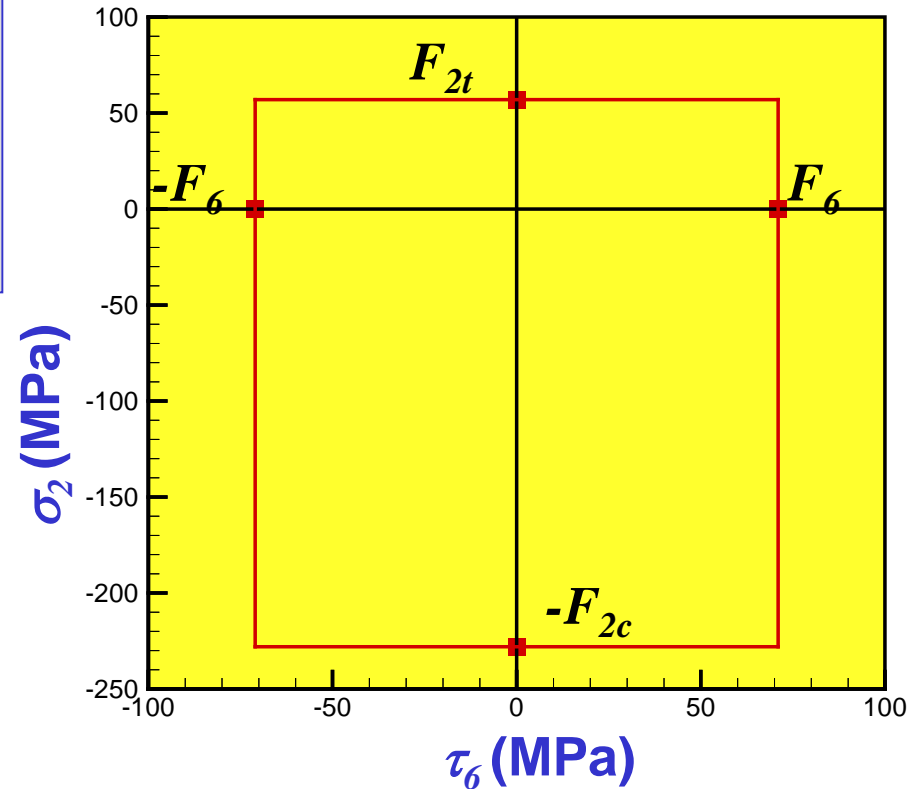
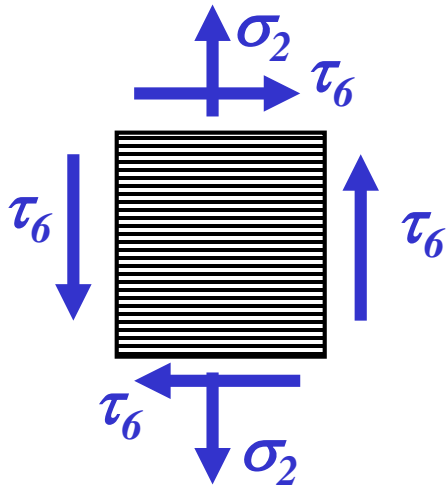




CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

- se $\sigma_1 = 0$, o envelope de falha tem a forma de um retângulo no plano $\tau_6 \sigma_2$:





CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

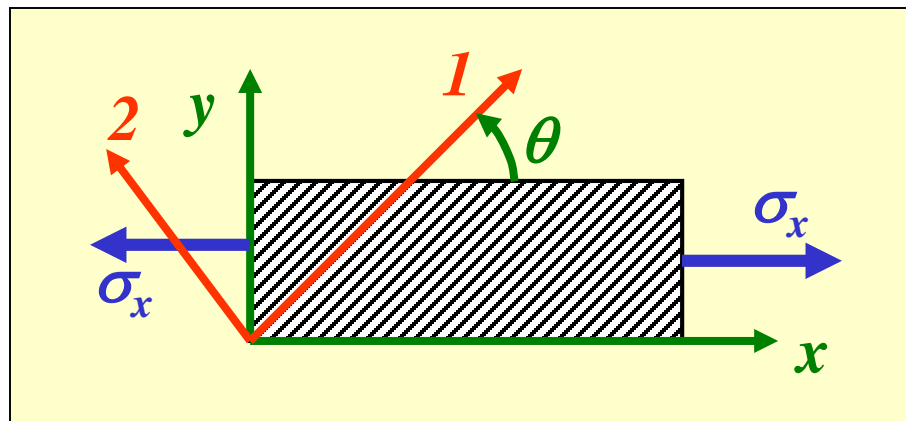
- o roteiro para aplicação do critério da tensão máxima é:
 1. calcular as tensões na lâmina de interesse
 2. fazer mudança de coordenadas das tensões para as direções principais da lâmina
 3. comparar os componentes de tensões calculadas com os máximos admissíveis



CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

- como exemplo, considere uma lâmina unidirecional com um carregamento uniaxial σ_x aplicado numa direção x que forma um ângulo θ com a direção da fibra, conforme mostra a figura





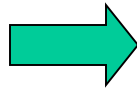
CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

- as tensões nas direções principais da lâmina são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m &= \cos(\theta) \\ n &= \sin(\theta) \end{aligned}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2(\theta) \\ \sigma_x \sin^2(\theta) \\ -\sigma_x \sin(\theta)\cos(\theta) \end{Bmatrix}$$






CRITÉRIOS DE FALHA

tensão máxima

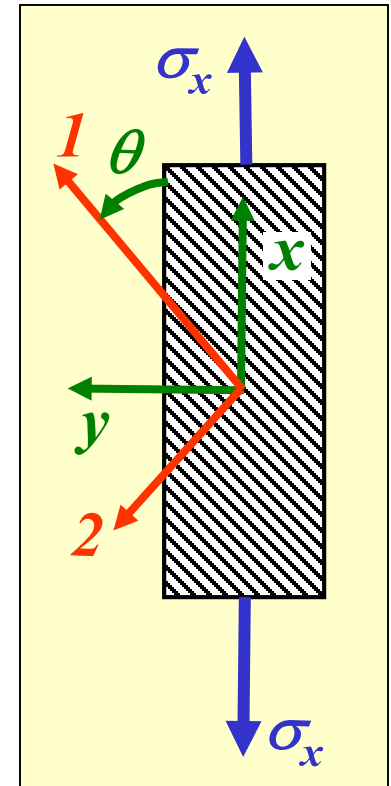
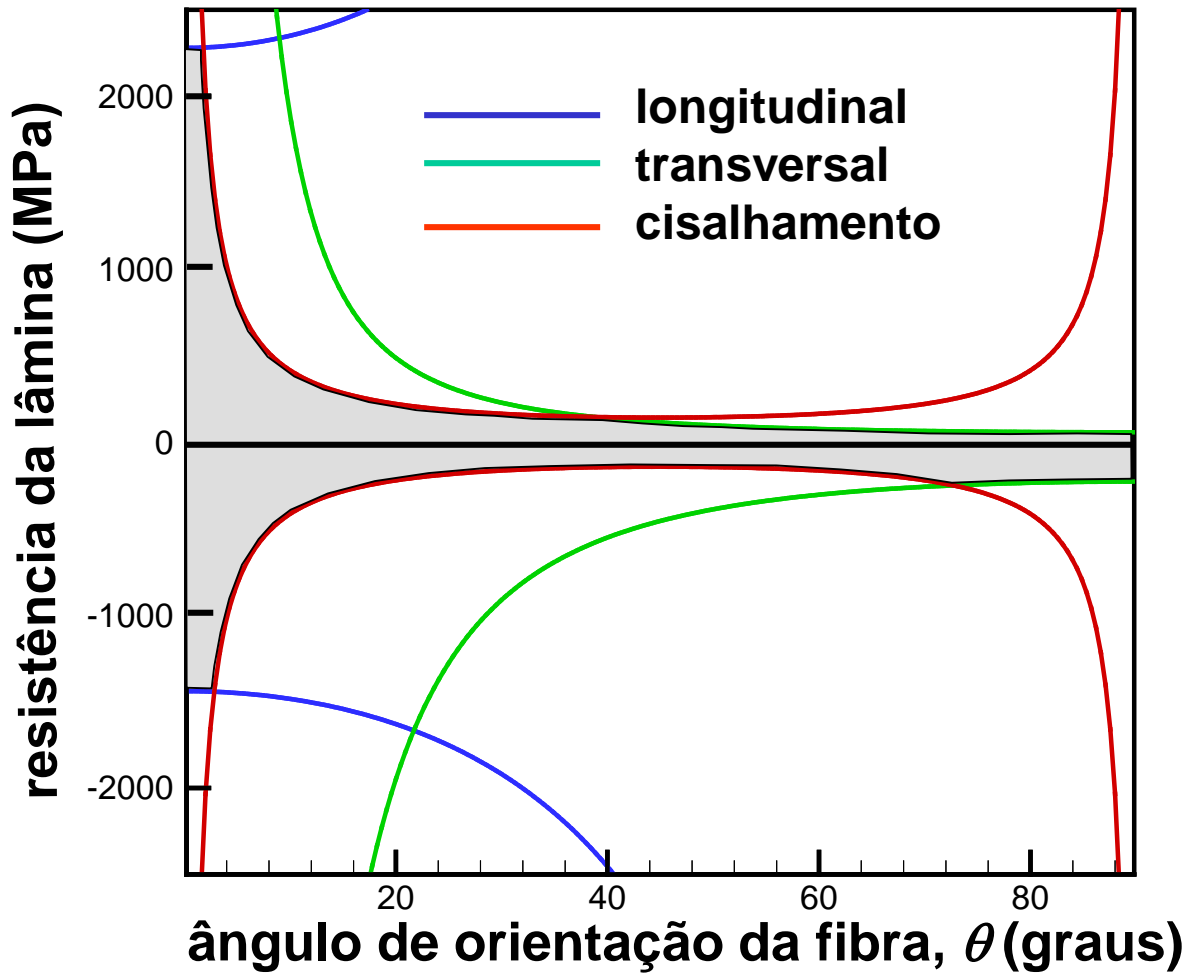
• aplicando o critério de falha:

$$\begin{aligned} - F_{1c} < \sigma_x \cos^2(\theta) < F_{1t} \\ - F_{2c} < \sigma_x \sin^2(\theta) < F_{2t} \\ - F_6 < -\sigma_x \sin(\theta)\cos(\theta) < F_6 \end{aligned}$$

$-\frac{F_{1c}}{\cos^2(\theta)} < \sigma_x < \frac{F_{1t}}{\cos^2(\theta)}$		falha na direção longitudinal
$-\frac{F_{2c}}{\sin^2(\theta)} < \sigma_x < \frac{F_{2t}}{\sin^2(\theta)}$		falha na direção transversal
$-\frac{F_6}{\sin(\theta)\cos(\theta)} < \sigma_x < \frac{F_6}{\sin(\theta)\cos(\theta)}$		falha por cisalhamento



critérios de falha – tensão máxima





9.2.2 Deformação máxima



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

Critério da Deformação Máxima

- a falha ocorre quando pelo menos um dos componentes de deformação excede o valor correspondente à deformação máxima admissível para aquele tipo de carregamento
- o critério da deformação máxima **só pode ser aplicado nas direções principais da lâmina**



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

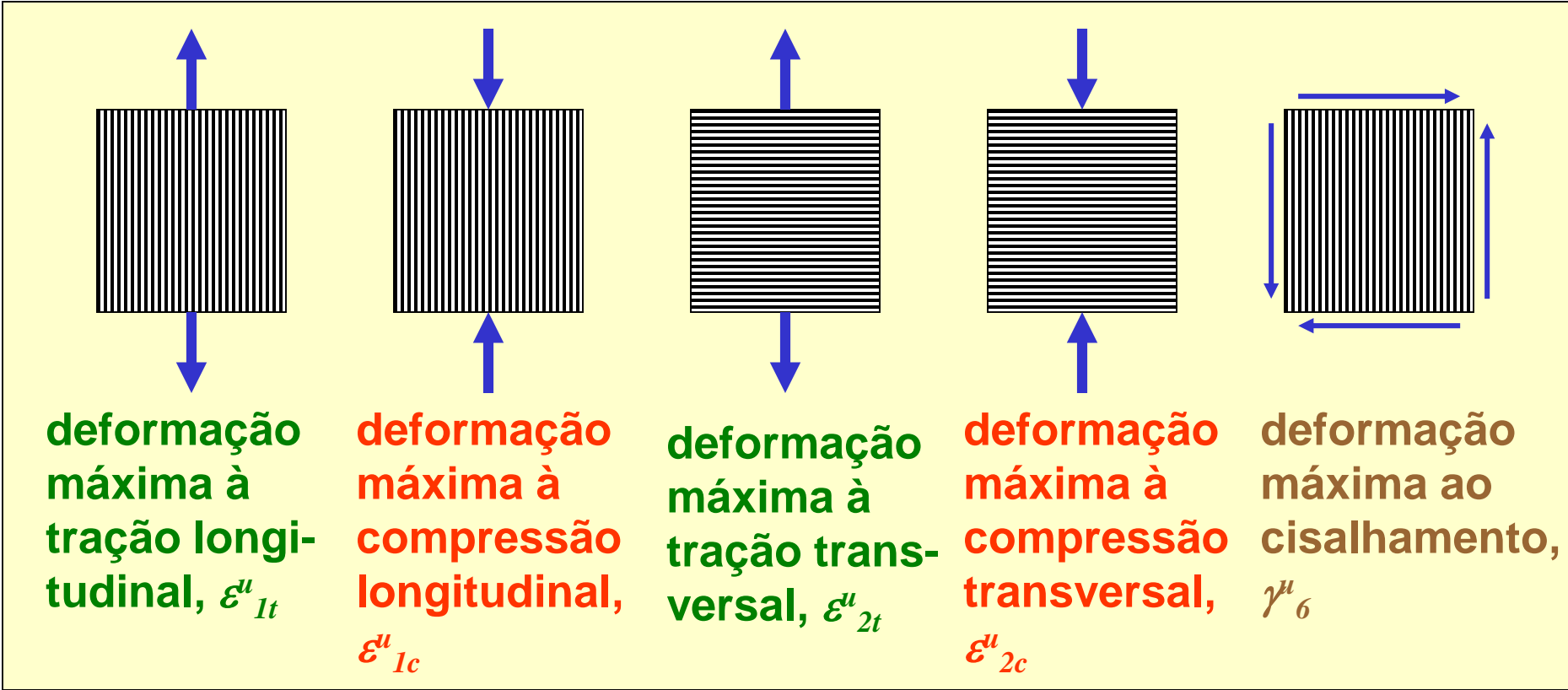
- o critério de deformação máxima trabalha com deformações máximas ao invés de tensões máximas
- este critério não é equivalente ao critério de tensões máximas nem que o comportamento da lâmina seja linear até a falha



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- resistência da lâmina – carregamentos básicos





CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- o critério da deformação máxima é representado matematicamente por três sub-critérios:

$$\begin{aligned} - \varepsilon_{1c}^u < \varepsilon_1 < \varepsilon_{1t}^u \\ - \varepsilon_{2c}^u < \varepsilon_2 < \varepsilon_{2t}^u \\ - \gamma_6^u < \gamma_6 < \gamma_6^u \end{aligned}$$

- no critério da deformação máxima **não há interação entre as deformações**



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

• o critério da deformação máxima indica o tipo de falha:

1. falha por tração na direção longitudinal (fratura de fibras)
2. falha por compressão na direção longitudinal (fratura de fibras)
3. falha por tração na direção transversal (trincas na matriz paralelas às fibras)
4. falha por compressão na direção transversal (trincas na matriz por cisalhamento)
5. falha por cisalhamento (trincas na matriz paralelas às fibras)

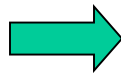


CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- para se obter a expressão do critério de deformação máxima em termos de tensões, usa-se as relações tensão-deformação nas direções principais da lâmina:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_2 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_1 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) \\ \gamma_6 &= \frac{\tau_6}{G_{12}} \end{aligned}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

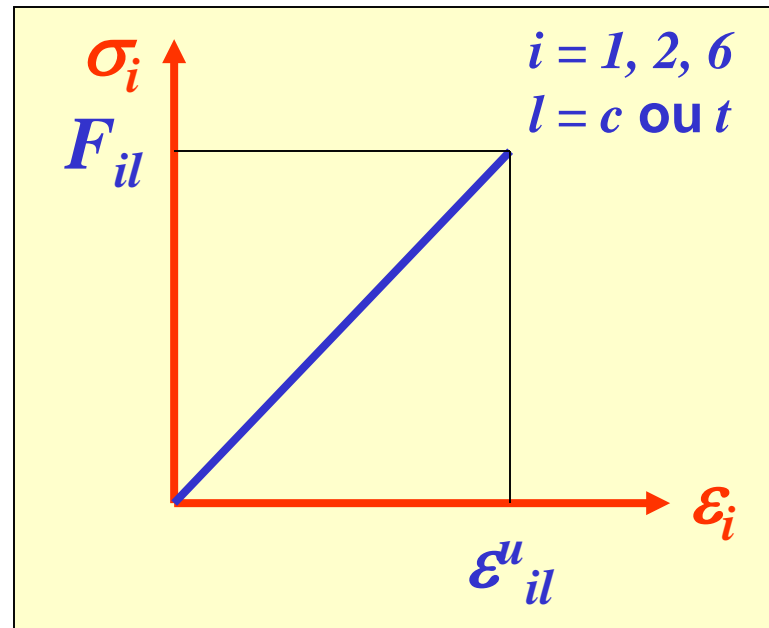
deformação máxima

- assumindo-se que o comportamento da lâmina seja linear até a falha:

$$\epsilon_{1t}^u = \frac{F_{1t}}{E_1}$$
$$\epsilon_{1c}^u = -\frac{F_{1c}}{E_1}$$

$$\epsilon_{2t}^u = \frac{F_{2t}}{E_2}$$
$$\epsilon_{2c}^u = -\frac{F_{2c}}{E_2}$$

$$\gamma_6^u = \frac{F_6}{G_{12}}$$



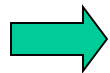


CRITÉRIOS DE FALHA

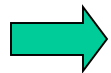
deformação máxima

• substituindo-se na expressão do critério:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}(\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1) \\ \gamma_6 &= \frac{\tau_6}{G_{12}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}-\frac{F_{1c}}{E_1} &< \frac{\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2}{E_1} < \frac{F_{1t}}{E_1} \\ -\frac{F_{2c}}{E_2} &< \frac{\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1}{E_2} < \frac{F_{2t}}{E_2} \\ -\frac{F_6}{G_{12}} &< \frac{\tau_6}{G_{12}} < \frac{F_6}{G_{12}}\end{aligned}$$



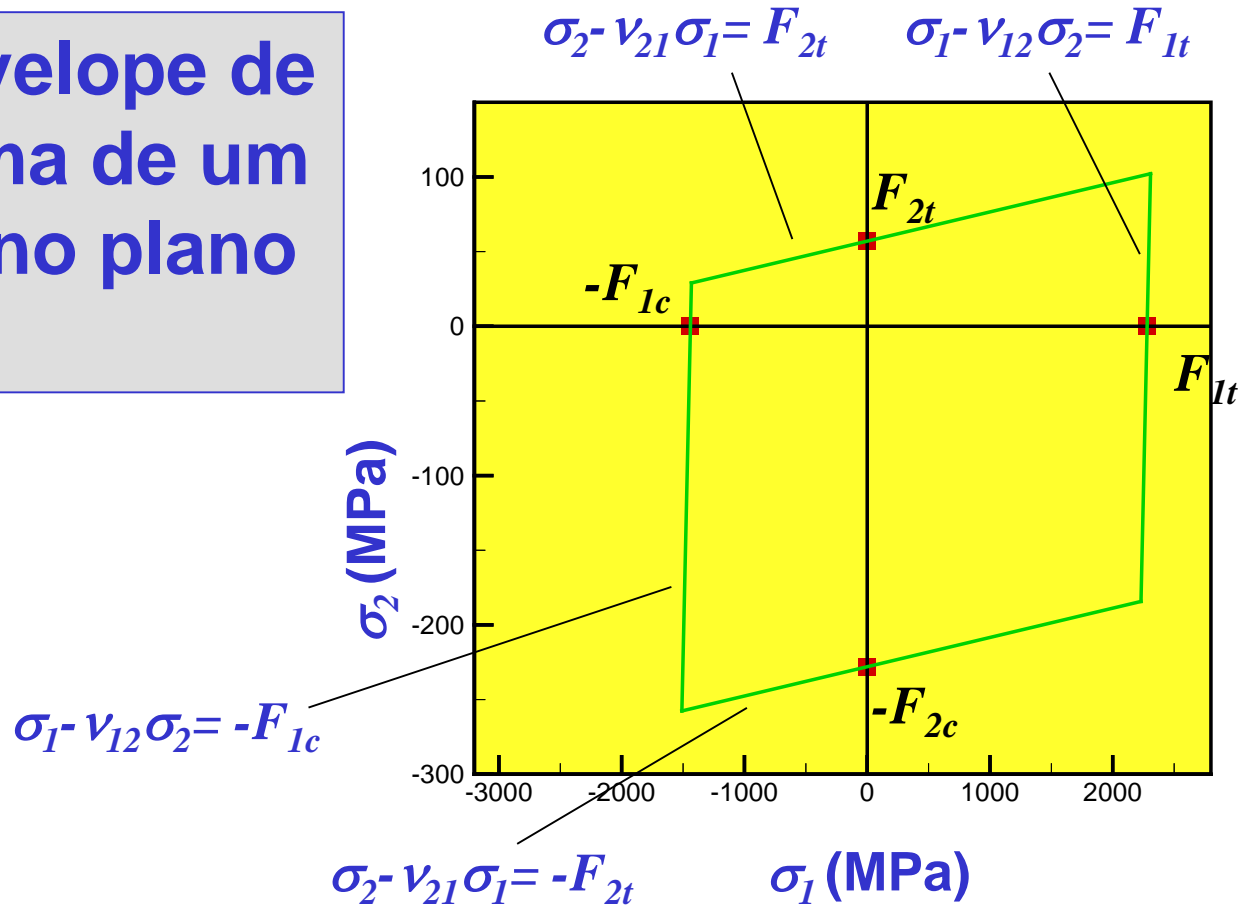
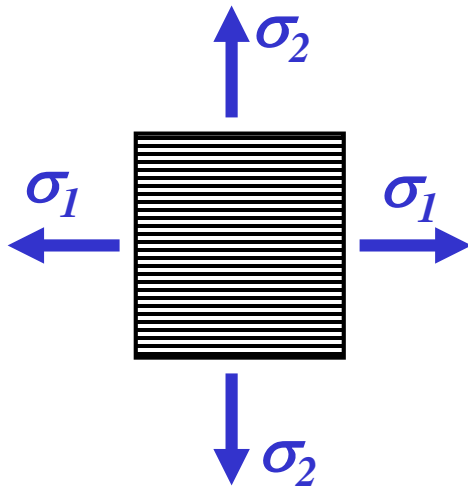
$$\begin{aligned}-F_{1c} &< \sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2 < F_{1t} \\ -F_{2c} &< \sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1 < F_{2t} \\ -F_6 &< \tau_6 < F_6\end{aligned}$$

critério de deformação máxima em termos de tensões



CRITÉRIOS DE FALHA deformação máxima

• se $\tau_6 = 0$, o envelope de falha tem a forma de um paralelogramo no plano $\sigma_1 \sigma_2$:



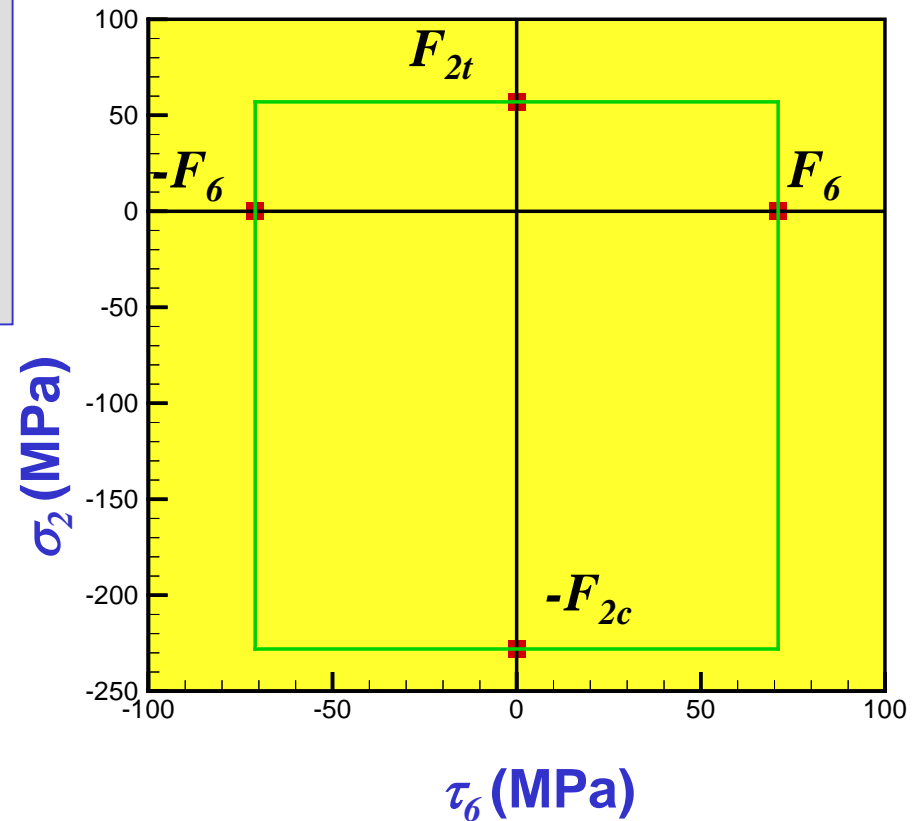
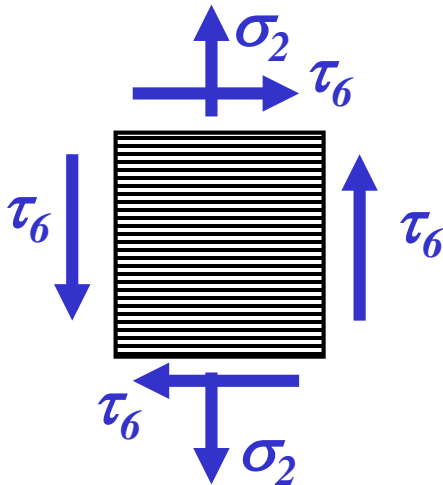


CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

• se $\sigma_1 = 0$, o envelope de falha tem a forma de um retângulo no plano

$\tau_6 \sigma_2$:





CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

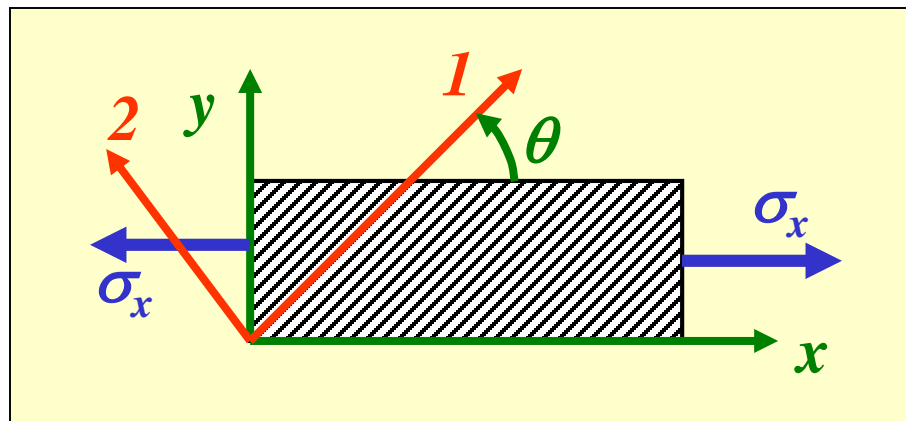
- o roteiro para aplicação do critério da deformação máxima é:
 1. calcular as deformações na lâmina de interesse
 2. fazer mudança de coordenadas das deformações para as direções principais da lâmina
 3. comparar os componentes de deformações calculados com os máximos admissíveis



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- como exemplo, considere uma lâmina unidirecional com um carregamento uniaxial σ_x aplicado numa direção x que forma um ângulo θ com a direção da fibra, conforme mostra a figura





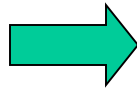
CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- as tensões nas direções principais da lâmina são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m &= \cos(\theta) \\ n &= \sin(\theta) \end{aligned}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2(\theta) \\ \sigma_x \sin^2(\theta) \\ -\sigma_x \sin(\theta)\cos(\theta) \end{Bmatrix}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

deformação máxima

- aplicando o critério de falha:

$$-F_{1c} < \sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2 < F_{1t}$$

$$-F_{2c} < \sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1 < F_{2t}$$

$$-F_6 < \tau_6 < F_6$$

$$-F_{1c} < (\cos^2(\theta) - \nu_{12}\sin^2(\theta))\sigma_x < F_{1t}$$

$$-F_{2c} < (\sin^2(\theta) - \nu_{21}\cos^2(\theta))\sigma_x < F_{2t}$$

$$-F_6 < \sin(\theta)\cos(\theta)\sigma_x < F_6$$



falha na direção longitudinal



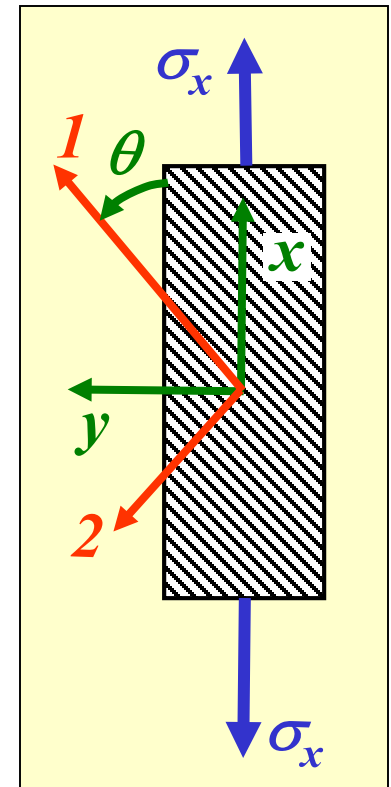
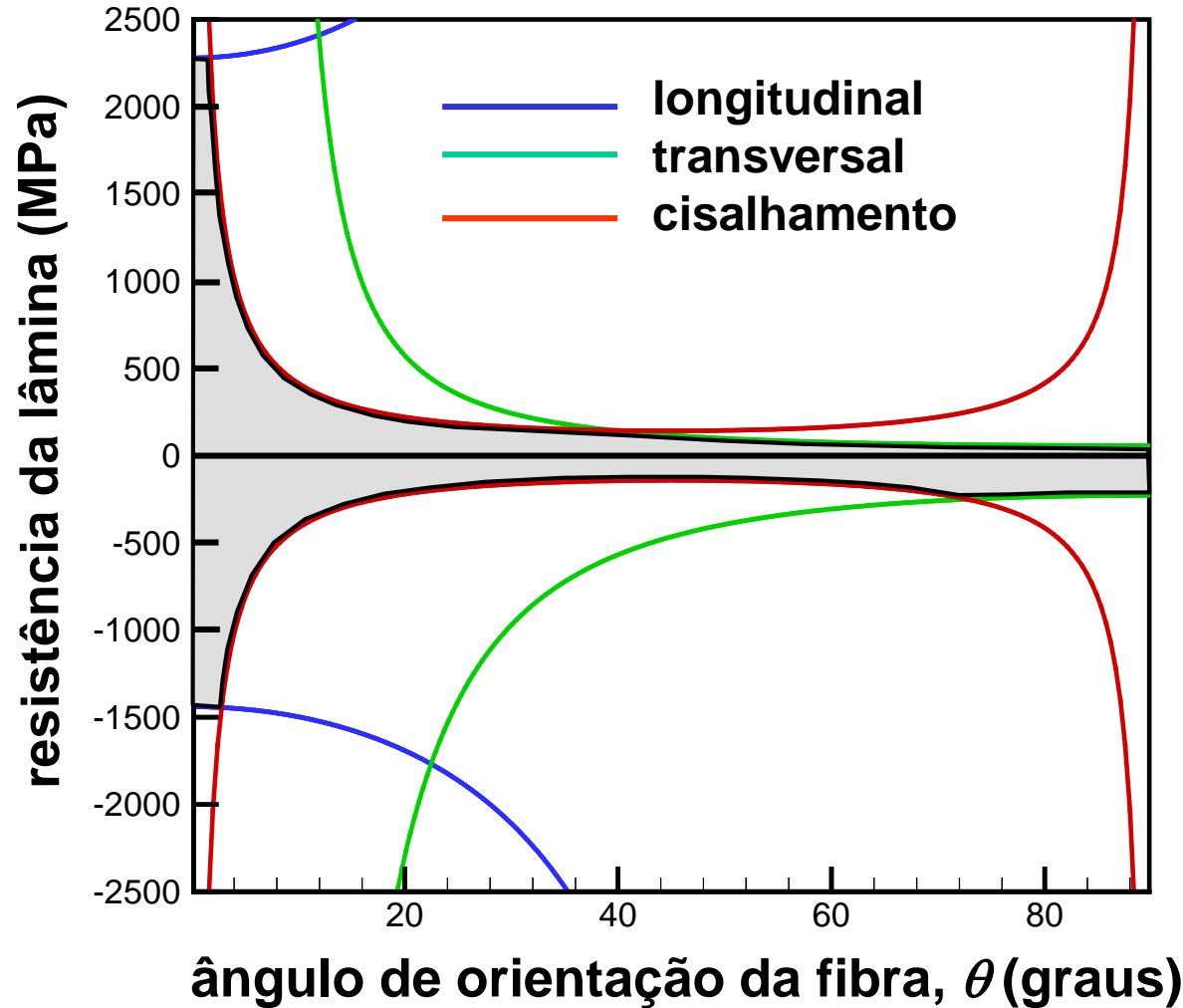
falha na direção transversal



falha por cisalhamento



critérios de falha – deformação máxima





9.2.3 Tsai-Hill



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- Hill propôs que o escoamento de metais dúteis com anisotropia ocorre quando a seguinte equação é satisfeita:

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1$$

- Tsai adaptou esse critério para a fratura de compósitos ortotrópicos



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

Critério de Tsai-Hill

- a falha ocorre quando a seguinte equação é satisfeita:

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1$$

- o critério de Tsai-Hill só pode ser aplicado nas direções principais da lâmina
- o critério inclui interação entre as tensões (termo $C\sigma_1\sigma_2$)



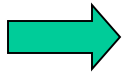
CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

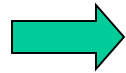
$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1$$

- para se determinar os coeficientes A , B , C e D , considera-se:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= F_1 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \tau_6 &= 0\end{aligned}$$

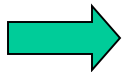


$$AF_1^2 = 1$$

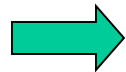


$$A = \frac{1}{F_1^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= F_2 \\ \tau_6 &= 0\end{aligned}$$



$$BF_2^2 = 1$$



$$B = \frac{1}{F_2^2}$$

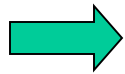


CRITÉRIOS DE FALHA

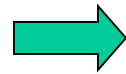
Tsai-Hill

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \tau_6 &= F_6 \end{aligned}$$



$$DF_6^2 = 1$$



$$D = \frac{1}{F_6^2}$$

- a constante C deve ser obtida através de um ensaio biaxial independente
- para se evitar a necessidade do ensaio adicional assume-se uma hipótese simplificadora



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- assume-se que para $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ e $\tau_6 = 0$, o material obedece o critério da tensão máxima, isto é, o material falha para $\sigma_2 = F_2$ uma vez que a resistência transversal é menor do que a resistência longitudinal F_1
- com essas hipóteses:

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_2 + D\tau_6^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_2 = F_2 \\ \tau_6 &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{F_2^2}{F_1^2} + \frac{F_2^2}{F_2^2} + CF_2^2 = 1$$

$$C = -\frac{1}{F_1^2}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- substituindo as constantes obtidas:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} + \frac{\tau_6^2}{F_6^2} = 1$$

- a equação acima não distingue resistências à tração e compressão; na prática usa-se:

$$F_1 = \begin{cases} F_{1t} & \text{se } \sigma_1 > 0 \\ F_{1c} & \text{se } \sigma_1 < 0 \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} F_{2t} & \text{se } \sigma_2 > 0 \\ F_{2c} & \text{se } \sigma_2 < 0 \end{cases}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- o critério de Tsai-Hill é representado por uma única equação
- o critério de Tsai-Hill não indica o tipo de falha; calcula-se a carga de fratura mas não o modo de fratura
- para $\tau_6 / F_6 = k$, o critério de Tsai-Hill assume a forma de uma elipse no plano $\sigma_1\sigma_2$:

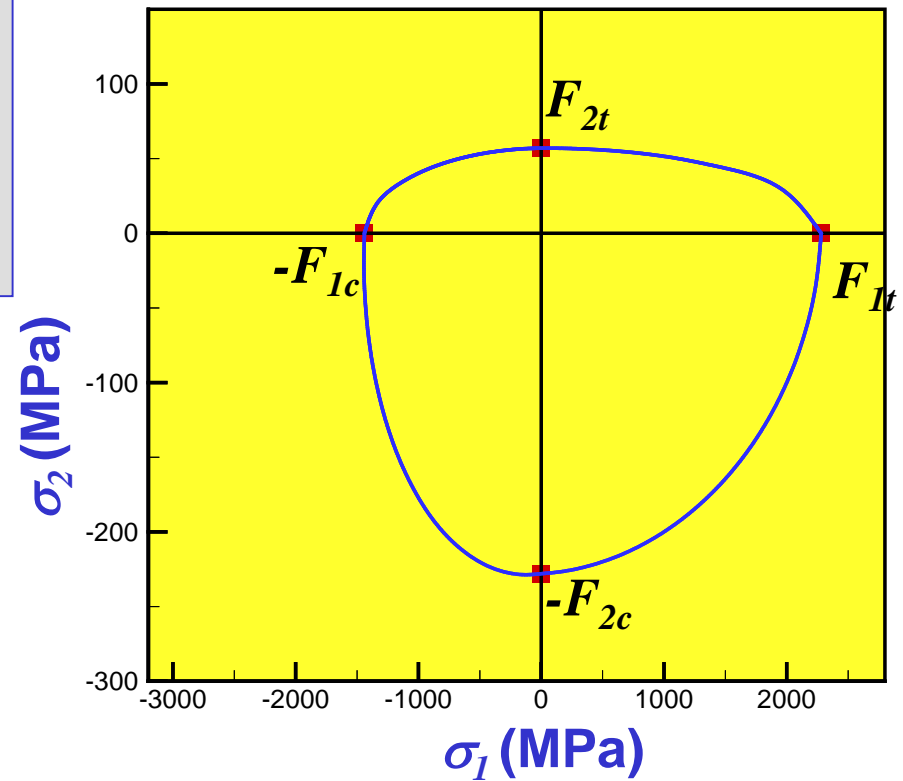
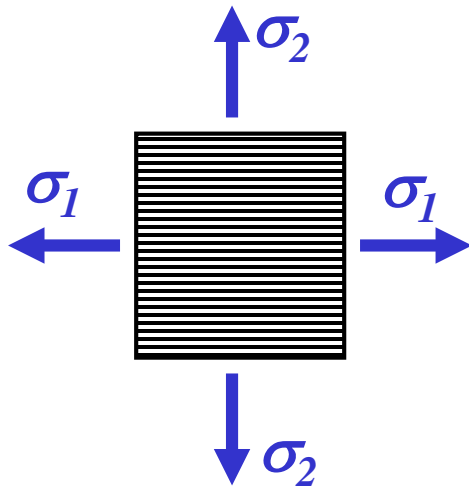
$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} = 1 - k^2$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

• se $\tau_6 = 0$, o envelope de falha tem a forma de quatro arcos de elipse no plano $\sigma_1\sigma_2$:

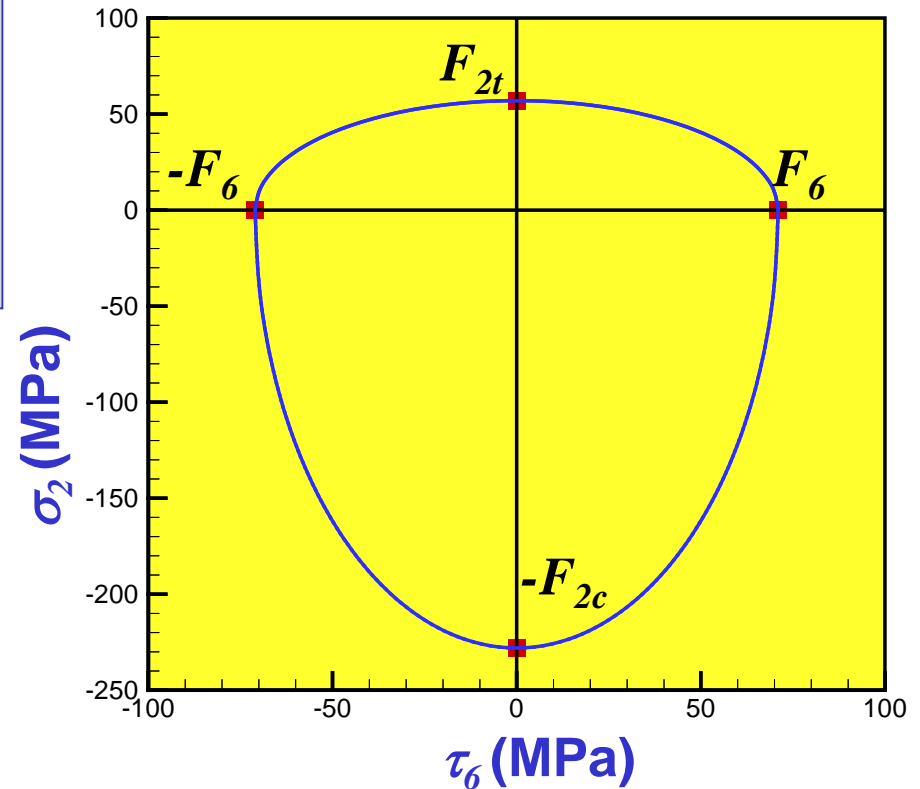
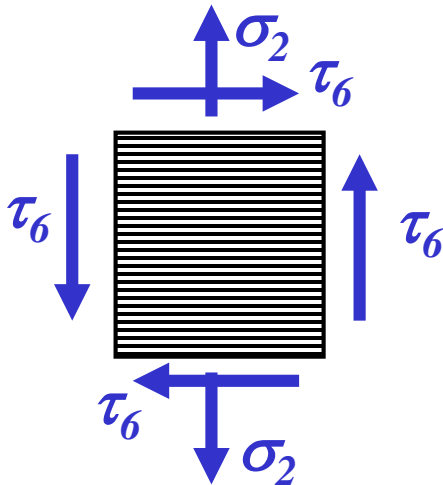




CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- se $\sigma_1 = 0$, o envelope de falha tem a forma de arcos de elipse no plano $\tau_6 \sigma_2$:





CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- o roteiro para aplicação do critério de Tsai-Hill é:

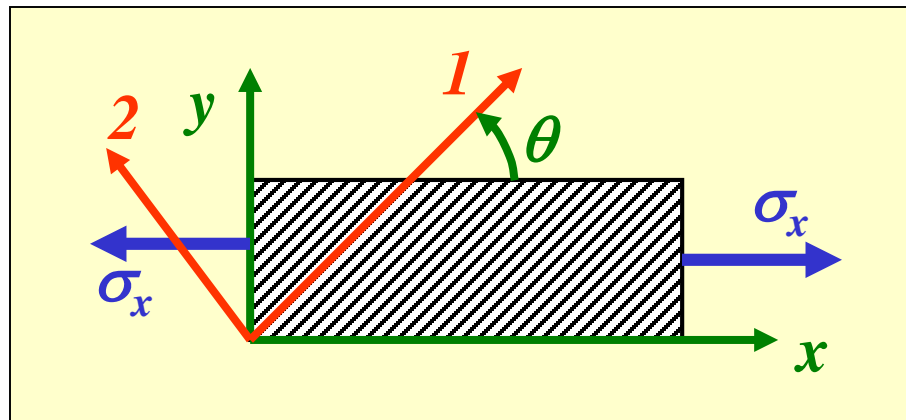
1. calcular as tensões na lâmina de interesse
2. fazer mudança de coordenadas das tensões para as direções principais da lâmina
3. aplicar a equação do critério; se o valor for maior do que 1 ocorre a falha do laminado



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- como exemplo, considere uma lâmina unidirecional com um carregamento uniaxial σ_x aplicado numa direção x que forma um ângulo θ com a direção da fibra, conforme mostra a figura





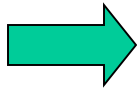
CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- as tensões nas direções principais da lâmina são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m &= \cos(\theta) \\ n &= \sin(\theta) \end{aligned}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \cos^2(\theta) \\ \sigma_x \sin^2(\theta) \\ -\sigma_x \sin(\theta)\cos(\theta) \end{Bmatrix}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Hill

- aplicando o critério de falha:

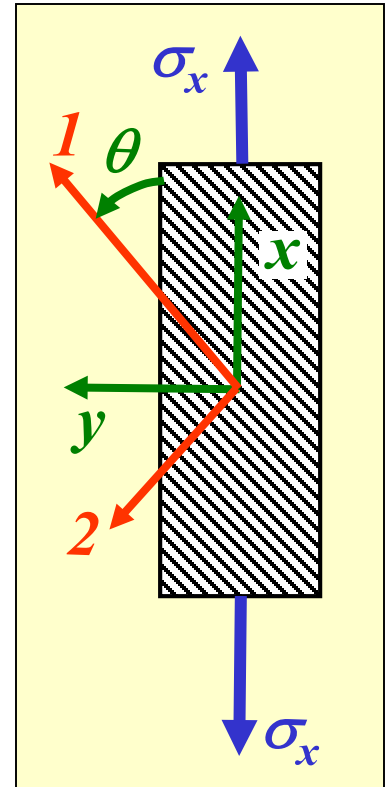
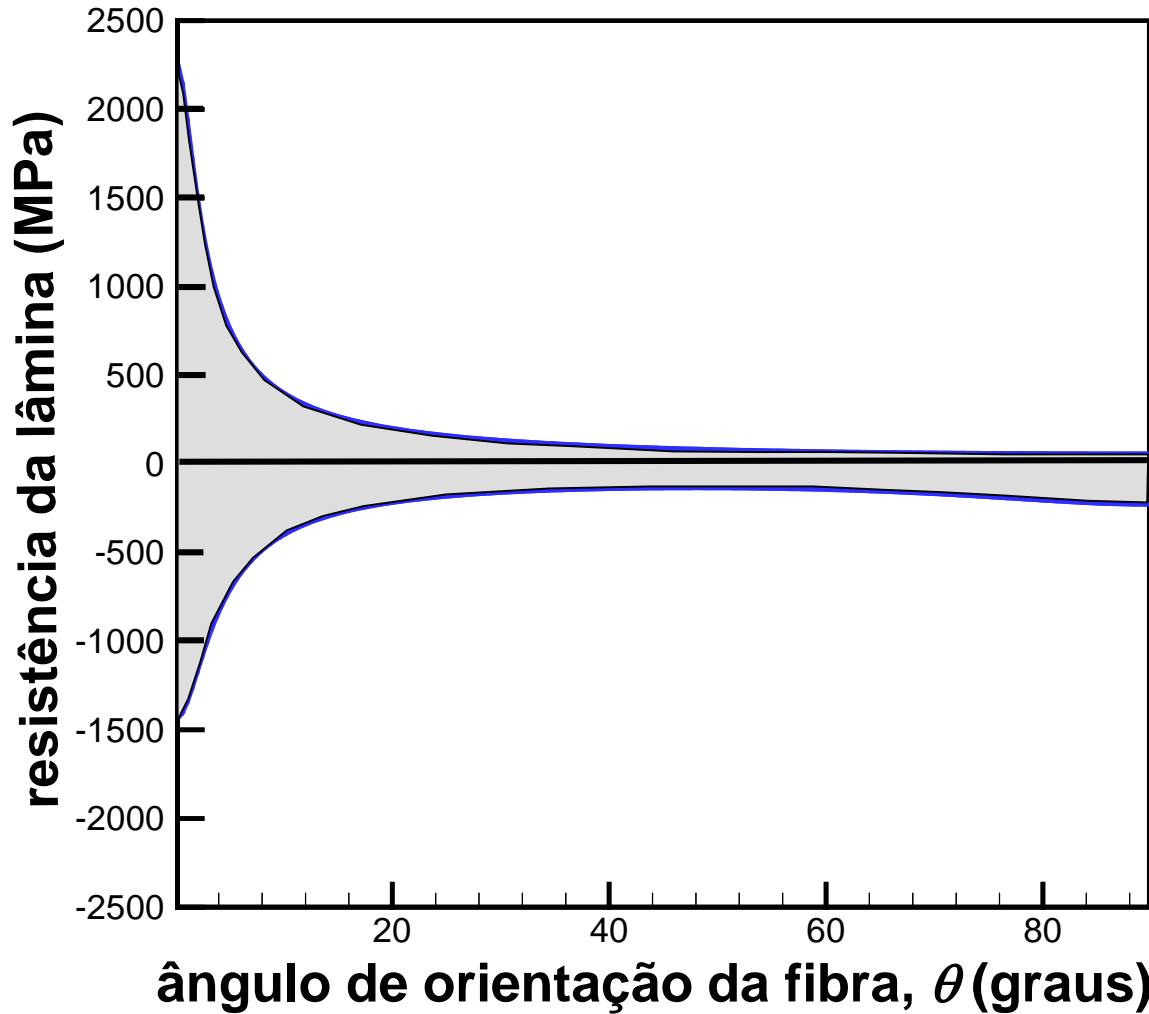
$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} + \frac{\tau_6^2}{F_6^2} = 1$$

$$\frac{\sigma_x^2 \cos^4(\theta)}{F_1^2} + \frac{\sigma_x^2 \sin^4(\theta)}{F_2^2} - \frac{\sigma_x^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{F_1^2} + \frac{\sigma_x^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{F_6^2} = 1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^4(\theta)}{F_1^2} + \frac{\sin^4(\theta)}{F_2^2} - \frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{F_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{F_6^2}}}$$



critérios de falha – Tsai-Hill





9.2.4 Tsai-Wu



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- Tsai e Wu propuseram um critério de falha tensorial baseado na equação:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1$$

- onde índices repetidos implicam somatória
- explicitamente:

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \tau_6 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_6^2 + \\ + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2f_{16} \sigma_1 \tau_6 + 2f_{26} \sigma_2 \tau_6 = 1$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

Critério de Tsai-Wu

- a falha ocorre quando a seguinte equação é satisfeita:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_6\tau_6 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2f_{16}\sigma_1\tau_6 + 2f_{26}\sigma_2\tau_6 = 1$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- o critério de Tsai-Wu pode ser aplicado em qualquer sistema de referência
- o critério inclui interação entre as tensões (termos $f_{ij}\sigma_i\sigma_j$)
- os termos lineares f_i levam em conta a diferença entre a resistência em tração e compressão
- f_i é um tensor de segunda ordem e f_{ij} é um tensor simétrico de quarta ordem



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- para se determinar os coeficientes f_i e f_{ij} considera-se inicialmente que para cisalhamento puro, o sinal de τ_6 não afeta a resistência da lâmina, então os termos lineares em τ_6 devem ser nulos:

$$f_6 = 0$$

$$f_{16} = 0$$

$$f_{26} = 0$$

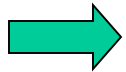


CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

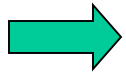
- para se determinar os coeficientes f_1 e f_{11} considera-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= F_{1t} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \tau_6 &= 0 \end{aligned}$$



$$f_1 F_{1t} + f_{11} F_{1t}^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -F_{1c} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \tau_6 &= 0 \end{aligned}$$



$$-f_1 F_{1c} + f_{11} F_{1c}^2 = 1$$

$$f_1 = \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}}$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1t} F_{1c}}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

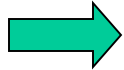
Tsai-Wu

- para se determinar os coeficientes f_2 e f_{22} considera-se:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = F_{2t}$$

$$\tau_6 = 0$$

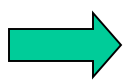


$$f_2 F_{2t} + f_{22} F_{2t}^2 = 1$$

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = -F_{2c}$$

$$\tau_6 = 0$$



$$-f_2 F_{2c} + f_{22} F_{2c}^2 = 1$$

$$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}}$$

$$f_{22} = \frac{1}{F_{2t} F_{2c}}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- para se determinar o coeficientes f_{66} considera-se:

$$\begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_6 = F_6 \end{array} \Rightarrow f_{66} F_6^2 = 1 \Rightarrow f_{66} = \frac{1}{F_6^2}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- para se calcular f_{12} é necessário um ensaio adicional biaxial
- esse ensaio pode ser um ensaio biaxial com $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ e $\tau_6 = 0$, ou o ensaio de uma lâmina com orientação θ em relação à direção das fibras
- ambos esses ensaios são de realização prática difícil e não fornecem resultados confiáveis
- em geral usa-se a aproximação discutida a seguir



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- para se garantir que a superfície de falha seja fechada, a seguinte relação deve ser observada:

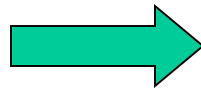
$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$



$$-1 < \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11}f_{22}}} < 1$$

- define-se :

$$f_{12}^* = \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{11}f_{22}}}$$



$$f_{12} = f_{12}^* \sqrt{f_{11}f_{22}}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- para se evitar a necessidade de ensaios biaxiais adicionais, na prática assume-se que:

$$f_{12}^* = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad f_{12}^* = 0$$

- f_{12} é calculado como:

$$f_{12} = f_{12}^* \sqrt{f_{11} f_{22}}$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- o critério de Tsai-Wu é representado por uma única equação
- o critério de Tsai-Wu não indica o tipo de falha; calcula-se a carga de fratura mas não o modo de fratura
- para $\tau_6 / F_6 = k$, o critério de Tsai-Wu assume a forma de uma elipse no plano $\sigma_1\sigma_2$

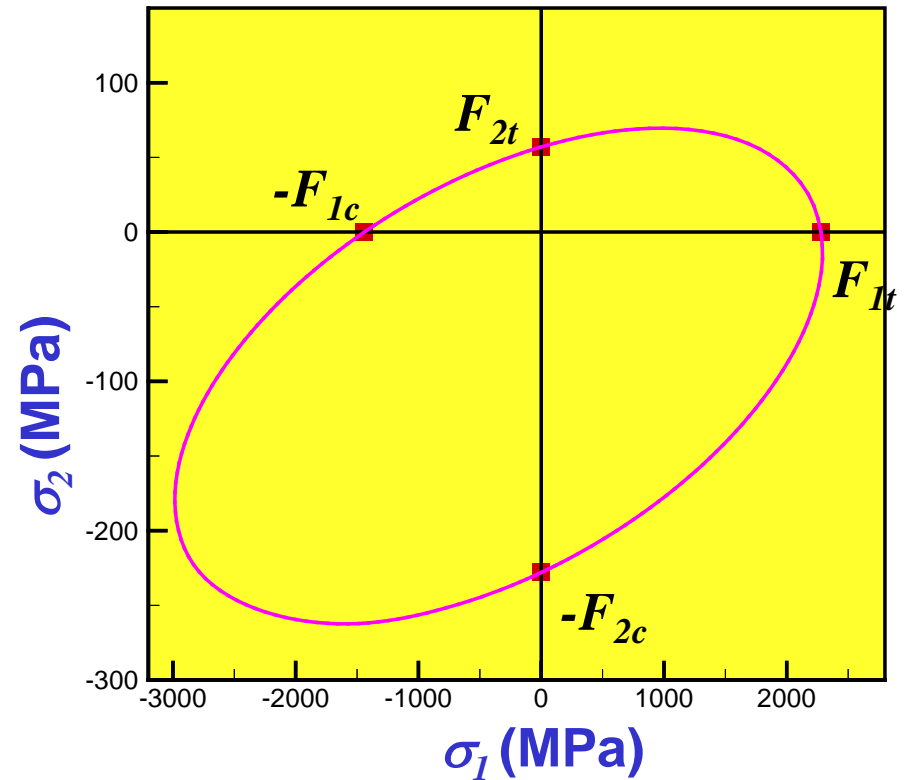
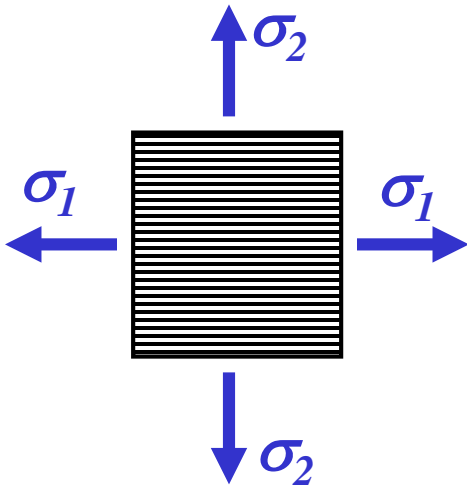
$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 - k^2$$



CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

• se $\tau_6 = 0$, o envelope de falha tem a forma de uma elipse no plano $\sigma_1 \sigma_2$:

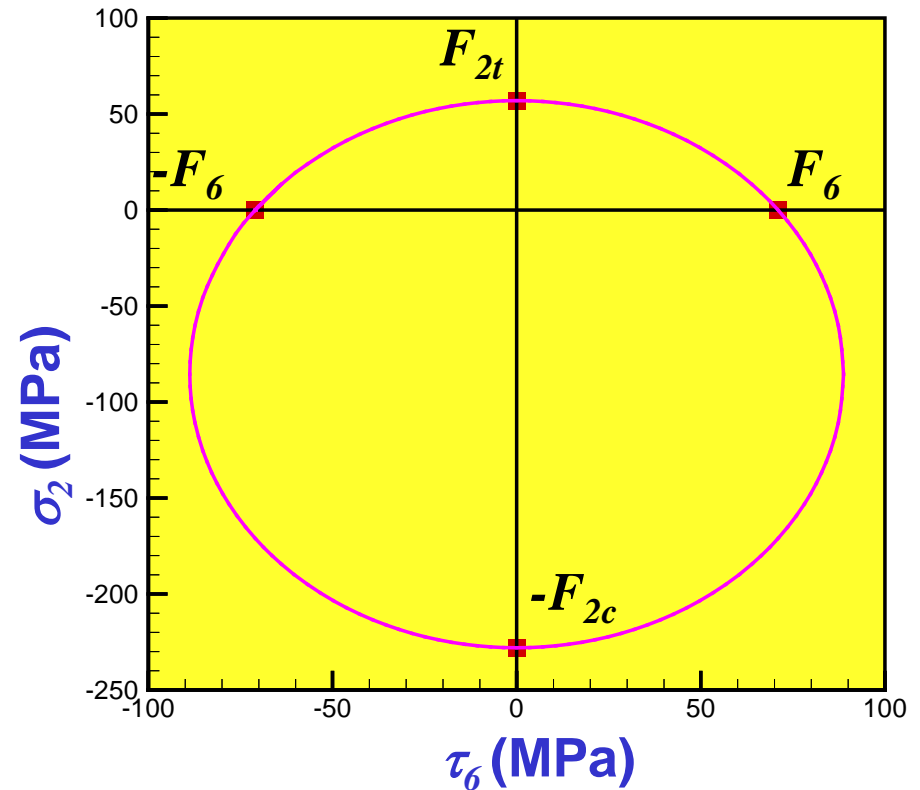
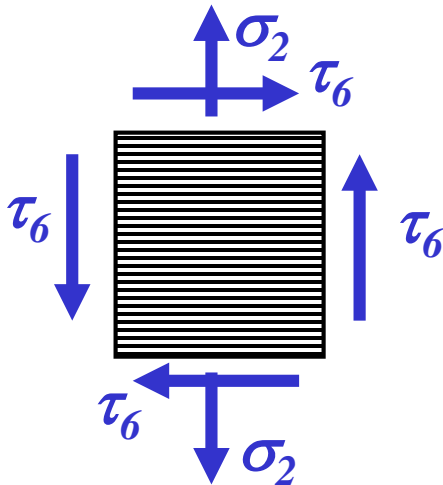




CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- se $\sigma_1 = 0$, o envelope de falha tem a forma de uma elipse no plano $\tau_6 \sigma_2$:





CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

- o roteiro para aplicação do critério de Tsai-Wu é:
 1. calcular as tensões na lâmina de interesse
 2. fazer mudança de coordenadas das tensões para as direções principais da lâmina ou calcular os tensores f_i e f_{ij} no sistema de referência
 3. aplicar a equação do critério; se o valor for maior do que 1 ocorre a falha do laminado

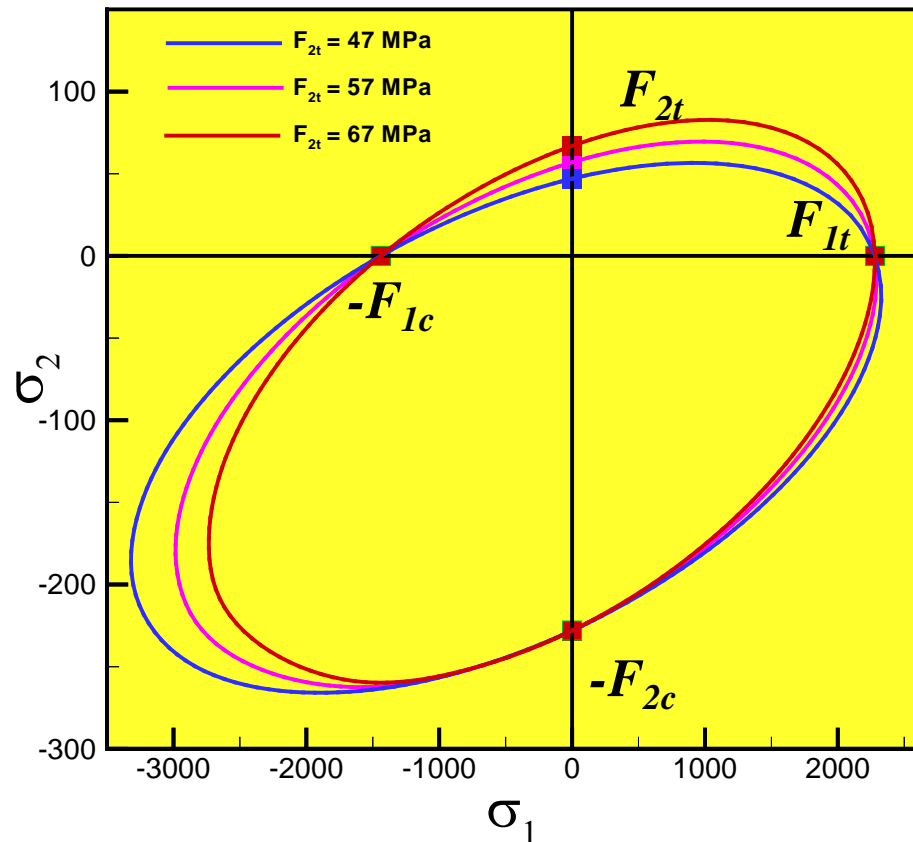


CRITÉRIOS DE FALHA

Tsai-Wu

efeito da
variação de F_{2t}
no critério de
Tsai-Wu:

diminuição
melhora
comportamento
no terceiro
quadrante!!





8.3 Resistência de laminados



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- o **coeficiente de segurança** de uma camada para um dado carregamento é definido pela razão P_{falha}/P onde P é o carregamento dado e P_{falha} é o carregamento proporcional a P que causaria a falha da camada
- o **índice de falha** é calculado para um certo critério de falha (máxima tensão, Tsai-Wu, etc.)
- o coeficiente de segurança para uma camada pode ser calculado a partir do seu índice de falha



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- a definição da falha de um laminado depende da aplicação
- em algumas aplicações o laminado pode operar satisfatoriamente com determinados tipos de dano
- trincas na matriz ao longo das fibras podem ser toleradas até em estruturas primárias



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- há dois critérios básicos para a determinação da resistência de um laminado:
 1. falha da primeira camada (*first ply failure*)
 2. falha da última camada (*last ply failure*)



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- o critério *first ply failure* é de fácil aplicação mas pode ser extremamente conservativo
- o critério estabelece que a carga de falha do laminado para um dado carregamento é calculada determinando-se a camada com o maior índice de falha; a carga de falha pode ser calculada a partir do maior índice de falha



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- a falha indicada pelo critério de falha pode ser falha na direção transversal de uma única camada
- para alguns laminados, esse tipo de falha pode ocorrer para uma carga muito mais baixa que a carga de ruptura do laminado



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- a falha de uma camada implica numa alteração de suas propriedades mecânicas e uma redistribuição de cargas pelas outras camadas
- o conseqüente aumento de carga pode causar a falha de outras camadas
- a ruptura final do laminado ocorre quando há uma seqüência instável de falhas (falham todas as camadas)



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- o critério *last ply failure* é de difícil aplicação mas leva a estimativas mais realistas da carga de fratura do laminado
- o critério estabelece que o laminado falha quando todas as camadas do laminado falhem conforme algum dos critérios de falha de lâmina
- a aplicação do critério exige uma análise estrutural não linear



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- os dois elementos básicos para a aplicação do critério *last ply failure* são:
 1. definição do critério de falha de lâmina a ser usado
 2. definição de um modelo de degradação das lâminas falhadas



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- o **modelo de degradação** das lâminas falhadas é um critério para se alterar as propriedades mecânicas das camadas devido à presença de uma falha
- num modelo muito simples e conservativo, as camadas podem ser simplesmente removidas da análise após a falha, isto é, as suas propriedades mecânicas são zeradas (na prática usa-se um número pequeno)



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- a eliminação de uma camada é apropriada no caso de falha das fibras
- no caso de falha da matriz, esse procedimento pode ser exageradamente conservativo
- deve-se notar que os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu não indicam o tipo de falha na lâmina; o uso desses critérios dificulta a utilização de modelos de degradação



RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- um modelo de degradação mais elaborado para falha na matriz de uma lâmina seria zerar as seguintes propriedades físicas : E_2 , ν_{12} , ν_{21} , G_{12} , α_2 , β_2
- recalculando-se as tensões nessa camada, os valores de σ_2 e τ_6 seriam nulos já que a camada não tem mais rigidez quanto a esses carregamentos

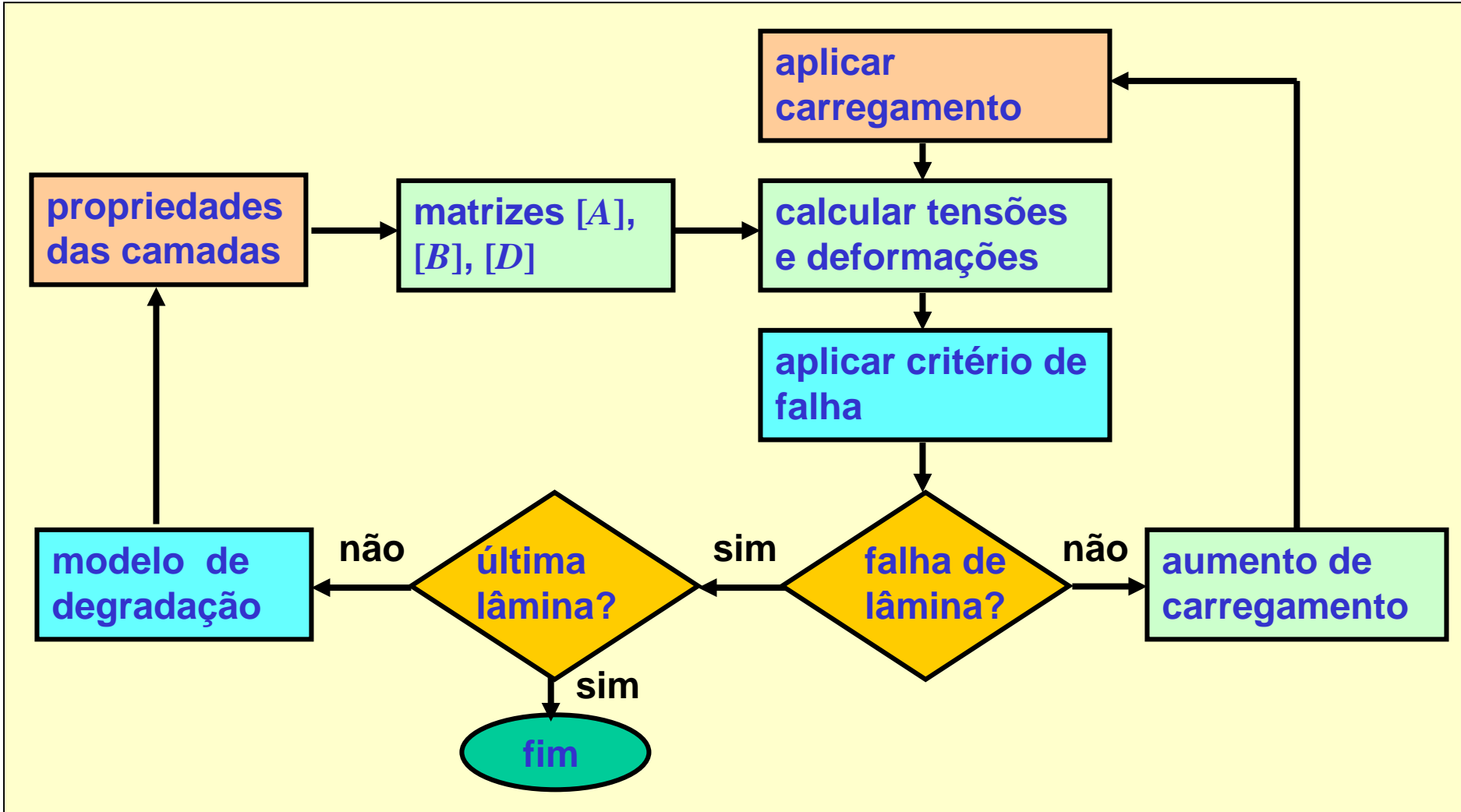


RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- o efeito das tensões residuais térmicas deve ser incluído na análise de tensões dos laminados
- a falha de uma camada provoca uma redistribuição das tensões residuais em todo o laminado



fluxograma para análise de resistência de laminados





RESISTÊNCIA DE LAMINADOS

- deve-se notar que as análises baseadas na Teoria Clássica da Laminação não são capazes de prever falhas fora do plano, tais como delaminações
- os critérios de falha estudados fornecem resultados pouco realistas na presença de fortes concentrações de tensões