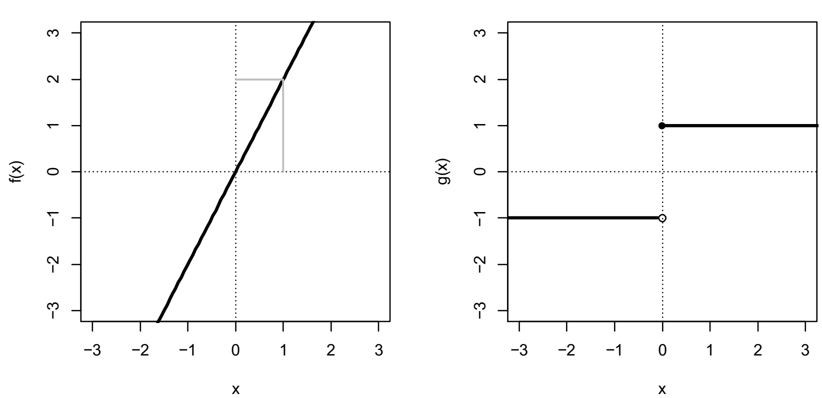
Capítulo 2

Derivadas

2.1 Limite e continuidade

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta um "salto"em p.



O gráfico da esquerda ($f(x) = 2x$) não apresenta um "salto"em nenhum ponto. Em particular, à medida que x se aproxima de 1, seja pela esquerda, seja pela direita, o valore de $f(x)$ se aproxima de $f(1) = 2$. Mas o mesmo não acontece com a função $g(x)$ no ponto 0 (gráfico da direita). Neste ponto o gráfico de g apresenta um "salto"e, portanto, g não é contínua em 0. Mas é contínua para $x \neq 0$.

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L que, simbolicamente, se escreve $\lim_{x \to p} f(x) = L$ significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L. No exemplo da função $f(x) = 2x$ temos que quando x se aproxima de 1, $f(x)$ tende a 2.

Exemplo 1: Calcule $\lim_{x\to 1}(x+1)$.

x	$f(x)=x+1$	x	$f(x)=x+1$
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	2	1	2

Exemplo 2 (limites laterais): Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x < 1 \\ 2x, & se \quad x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$ e

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$

Vejamos, na medida em que x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ tende a 2. Mas quando nos aproximamos de 1 pela esquerda, $f(x)$ tende a 1.

Teorema:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \exists \lim_{x\to p^+} f(x), \lim_{x\to p^-} f(x) \quad e \\ \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L \end{cases}$$

Se f estiver definida em p e for contínua em p, então $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ e reciprocamente. Isto é:

$$\text{f contínua em p} \iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

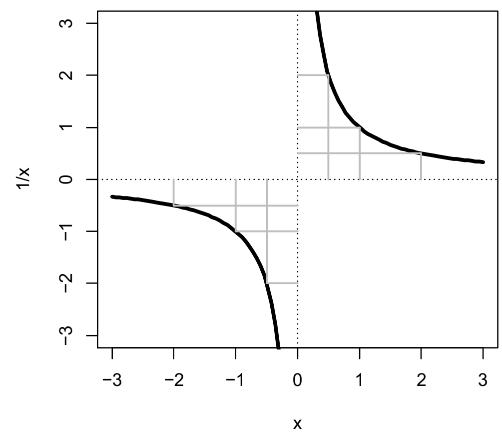
Exemplo 3: Seja $f(x) = \begin{cases} 2x, & se \quad x \le 1 \\ 3, & se \quad x > 1 \end{cases}$. Calcule $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. f é contínua?

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 3 = 3$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \Longrightarrow$ f não é contínua

Exemplo 4 (limites infinitos e limites no infinito): Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 5 (o limite mais importante): Seja $f(x) = x^2$. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Temos $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$, para $h \neq 0$.

Segue que $\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

***Propriedades**:

a. $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x) = f(p) + g(p)$.

b. $\lim_{x\to p} kf(x) = k\lim_{x\to p} f(x) = kf(p)$.

c. $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x) = f(p)g(p)$.

d. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(p)}{g(p)}$, para $\lim_{x\to p} g(x) \neq 0$.

2.2 Derivadas

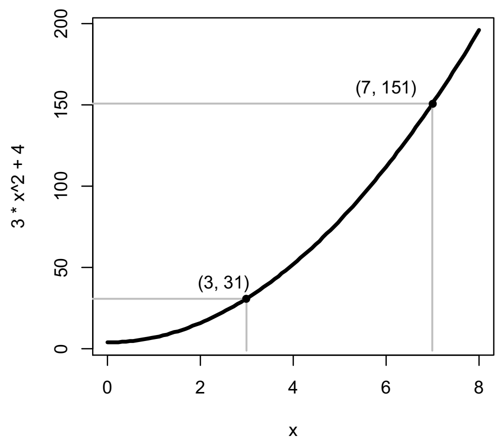
Podemos começar a discussão de derivadas considerando a taxa de variação em uma variável y em resposta à variação de uma outra variável x, onde x e y estão relacionadas por uma função $y = f(x)$.

Quando a variável x muda de um valor x_0 para x_1, a sua variação é medida pela diferença $x_1 - x_0 = h$.

No entanto, podemos estar interessados em calcular a taxa média de variação. Ela pode ser representada pelo coeficiente da diferença:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Por exemplo, seja $y = 3x^2 + 4$. Vamos calcular a variação de $x_0 = 3$ para $x_1 = 7$ (ou seja, quando há um aumento de 4 unidades em x). Como $y = 3x^2 + 4$, então quando $x_0 = 3$ temos $f(3) = 3(3)^2 + 4 = 31$ e para $x_1 = 7$ temos $f(7) = 3(7)^2 + 4 = 151$. Assim a variação é $f(7) - f(3) = 151 - 31 = 120$.



A taxa média de variação será

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{151 - 31}{7 - 3} = 30$$

Mas note que $x_1 - x_0 = h \iff x_1 = x_0 + h$. Então

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Assim, podemos chegar ao mesmo resultado fazendo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{3(x_0 + h)^2 + 4 - (3(x_0)^2 + 4)}{h} = 6x_0 + 3h.$$

Para $x_0 = 3$ e $h = 4$, a taxa média de variação em y será $6(3) + 3(4) = 30$. Isto é, em média, uma variação em x de 3 para 7 unidades, a mudança em y será de 30 unidades por unidade de x.

Se reduzirmos o intervalo de $h = 4$ para $h = 2$, a taxa média de variação será $6(3) + 3(2) = 24$.

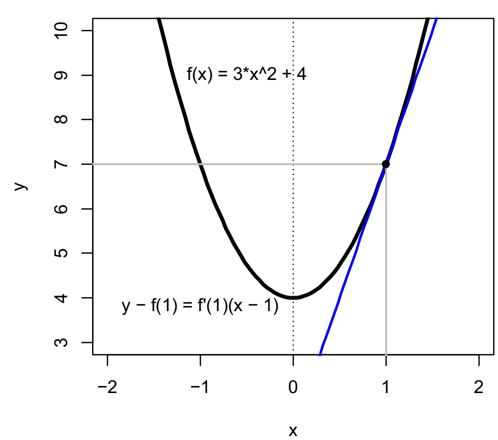
E se reduzirmos para $h = 1$, a taxa média de variação será $6(3) + 3(1) = 21$.

Frequentemente estamos interessados na taxa de variação em y quando h é pequeno (isto é, quando h se aproxima de 0). Podemos fazer isso utilizando o conceito de limite. No exemplo acima podemos calcular

$$\lim_{h\to 0}(6x_0 + 3h) = 6x_0$$

Esse limite é conhecido como a derivada da função $y = f(x)$. A derivada nada mais é do que o limite de um coeficiente de uma diferença, que mede a *taxa de variação instantânea* de y em relação a x no ponto x_0.

Do ponto de vista geométrico, o conceito de derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0. Na figura abaixo plotamos o gráfico da função $y = 3x^2 + 4$ em preto e a reta tangete da $f(x)$ no ponto $x = 1$ em azul. A equação dessa reta é dada pela equação $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. A inclinação dela no ponto $x = 1$ é igual a $f'(1) = 6(1) = 6$.



Dizemos que f é derivável ou diferenciável em x_0 se existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Neste caso, tal limite é designado por $f'(x_0)$ ou $\frac{dy}{dx}(x_0)$ e chama-se derivada de f no ponto x_0. Se f é derivável em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que f é derivável.

Teorema: Se f for derivável em p, então f será contínua em p.

Por exemplo, $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$, entretanto ela é contínua neste ponto. Ou seja, ela pode ser contínua em um ponto, mas não ser derivável neste mesmo ponto. Assim, continuidade não implica em derivabilidade. Mas derivabilidade implica em continuidade.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{se} \quad x > 0 \\ \\ -1, \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Com isso temos: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$. Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe. Ou seja, f não é derivável em 0.

2.3 Regras de derivação

a. **Derivada de uma constante**: $f(x) = k$, k constante, $f'(x) = 0$

b. **Derivada de x**: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

c. **Regra do tombo**: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

   Exemplo 1: Seja $f(x) = x^4$. Calcule $f'(x)$ e $f'(\frac{1}{2})$.

   $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

   $f'(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2}^3) = 4(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$

   Exemplo 2: Calcule $f'(x)$ sendo $f(x) = x^{-3}$.

   $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$

   Exemplo 3: Calcule $f'(x) = \frac{1}{x^5}$.

   $f'(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-6}$

   Exemplo 4: Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f'(x)$ e $f'(3)$.

   $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{x\sqrt{3}}$

d. **Derivada de e**: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

e. **Derivada de ln**: $f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

f. **Derivada com constante** $(kf)'(x) = kf'(x)$, k constante.

   Exemplo 5: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = 5x$.

   $f'(x) = (5x)' = 5(x)' = 5(1) = 5$

   Exemplo 6: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = 6x^2$

   $f'(x) = (6x^2)' = 6(x^2)' = 6(2x) = 12x$

g. **Derivada de uma soma**: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Exemplo 7: Seja $f(x) = 4x^3 + x^2$. Calcule $f'(x)$.

$f'(x) = [4x^3 + x^2]' = (4x^3)' + (x^2)' = 12x^2 + 2x$

Exemplo 8: Calcule $g'(x)$, onde $g(x) = 5x^4 + 4$

$g'(x) = [5x^4 + 4]' = (5x^4)' + (4)' = 20x^3$

Exemplo 9: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = 2x^2 + ln(x)$.

$f'(x) = [2x^2 + ln(x)]' = (2x^2)' + (ln(x))' = 4x + \frac{1}{x}$

h. **Derivada de produto**: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Exemplo 10: Calcule $h'(x)$, onde $h(x) = (3x^2 + 1)e^x$.

$h'(x) = [(3x^2+1)e^x]' = (3x^2+1)'e^x + (3x^2+1)(e^x)' = (6x)e^x + (3x^2+1)e^x = (3x^2+6x+1)e^x$

Exemplo 11: Calcule $h'(x)$, onde $h(x) = (x^2 + 1)(x^3 + x)$.

$h'(x) = [(x^2+1)(x^3+x)]' = (x^2+1)'(x^3+x) + (x^2+1)(x^3+x)' = 2x(x^3+x) + (x^2+1)(3x^2+1) =$
$2x^4 + 2x^2 + 3x^4 + x^2 + 3x^2 + 1 = 5x^4 + 6x^2 + 1$

Outra forma de resolver é:

$h(x) = (x^2 + 1)(x^3 + x) = x^5 + x^3 + x^3 + x = x^5 + 2x^3 + x$ $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$

i. **Derivada de quociente**: $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemplo 12: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$.

$f'(x) = [\frac{2x+3}{x^2+1}]' = \frac{(2x+3)'(x^2+1) - (2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - (2x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}$.

Exemplo 13: Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$.

$f'(x) = [\frac{x^2+x}{x}]' = \frac{(x^2+x)'x - (x^2+x)(x)'}{x^2} = \frac{(2x+1)x - (x^2+x)1}{x^2} = \frac{2x^2+x-x^2-x}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$

Outra forma de resolver é:

$f(x) = \frac{x^2+x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} = x + 1$

$f'(x) = (x+1)' = 1$

j. **Regra da cadeia**: $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

Exemplo 14: Calcule $h'(x)$, onde $h(x) = (3x^2 + 1)^3$.

Vejamos, h é uma função composta da forma $h(x) = g(f(x))$, onde $f(x) = 3x^2 + 1$ e $g(x) = x^3$. Neste caso para calcularmos $h'(x)$, aplicamos a regra da cadeia.

$h'(x) = (3x^2 + 1)^3[(3x^2 + 1)^3]' = 3(3x^2 + 1)^2(6x) = 18x(3x^2 + 1)^2$

Exemplo 15: Calcule $\frac{dy}{dx}$, sendo $y = ln(x^2 + 3)$.

Novamente, y é da forma $g(f(x))$, com $g(x) = ln(x)$ e $f(x) = x^2 + 3$. Assim,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+3} 2x = \frac{2x}{x^2+3}$

Exemplo 16: Calcule $h'(x)$, sendo $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$.

Neste exemplo, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^2 + 3$ e as funções se relacionam como $g(f(x))$.

Sabemos que $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3} = (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$. Assim,

$h'(x) = [(x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(x^2 + 3)^{\frac{1}{3}-1} 2x = \frac{1}{3}(x^2 + 3)^{-\frac{2}{3}} 2x = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}$