13 Funções Vetoriais

13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Comprimento de Arco e Curvatura

Definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula

$$\boxed{1} \qquad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1).

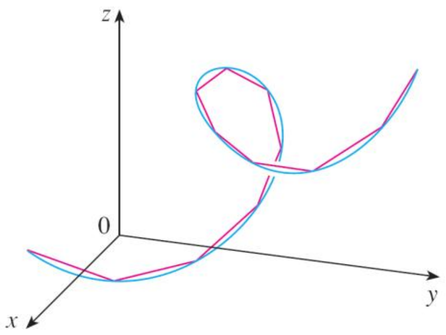


Figura 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite comprimentos das polígonos inscritas.

Comprimento de Arco e Curvatura

Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \end{aligned}}$$

Comprimento de Arco e Curvatura

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ podem ser escritos de forma mais compacta

$$\boxed{3} \qquad \boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$

como, para curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

e para as curvas espaciais $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

Exemplo 1

Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação **r**(t) = cos t **i** + sen t **j** + t **k** do ponto (1, 0, 0) até o ponto (1, 0, 2π).

SOLUÇÃO: Uma vez que **r**′(t) = –sen t **i** + cos t **j** + **k**, temos

$$|\mathrm{r}'(t)| = \sqrt{(-\text{sen } t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de (1, 0, 0) até (1, 0, 2π) é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Comprimento de Arco e Curvatura

Uma única curva C pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

4 $$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad 1 \leq t \leq 2$$

poderia ser representada também pela função

5 $$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leq u \leq \ln 2$$

onde a relação entre os parâmetros t e u é dada por $t = e^u$.

Dizemos que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva C.

Comprimento de Arco e Curvatura

Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de *C* usando Equações 4 e 5, gostaríamos de obter a mesma resposta. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é usada para calcular o comprimento do arco, a resposta é independente da parametrização que é usada.

Suponhamos agora que *C* seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k} \qquad a \leq t \leq b$$

onde $\mathbf{r}'$ é contínua e *C* é percorrida exatamente uma vez à medida que *t* aumenta de *a* para *b*.

Comprimento de Arco e Curvatura

Definimos sua **função de comprimento de arco** *s* por

$$\boxed{6} \qquad s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

Então $s(t)$ é o comprimento da parte de C entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$. (Veja a Figura 3.)

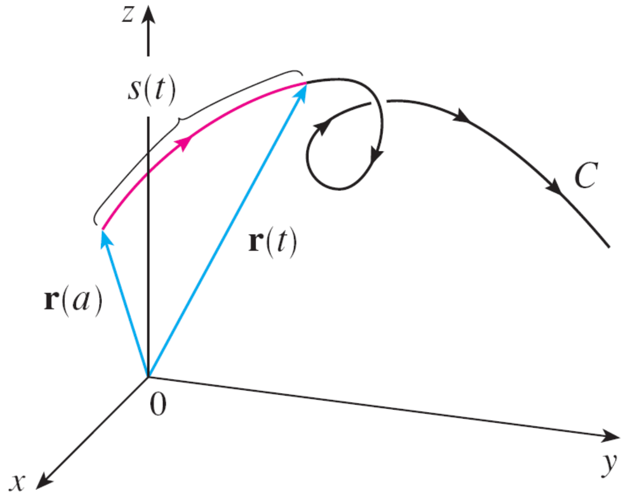


Figura 3

Comprimento de Arco e Curvatura

Se derivarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

$$\boxed{7} \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

É frequentemente útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimentodo arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado.

Comprimento de Arco e Curvatura

Se uma curva $\mathbf{r}(t)$ já está dada em termos de um parâmetro t e $s(t)$ é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos ser capazes de escrever t como uma função de s: $t = t(s)$. Em seguida, a curva pode ser reparametrizada em termos de s substituindo t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$.

Assim, se $s = 3$, por exemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

Curvatura

Curvatura

Uma parametrização **r**(*t*) é chamada **suave** em um intervalo *I* se **r′** for contínua e **r′**(*t*) ≠ **0** em *I*. Uma curva é chamada de **suave** se tiver uma parametrização suave. Uma curva lisa não tem quebras abruptas ou cúspides; quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

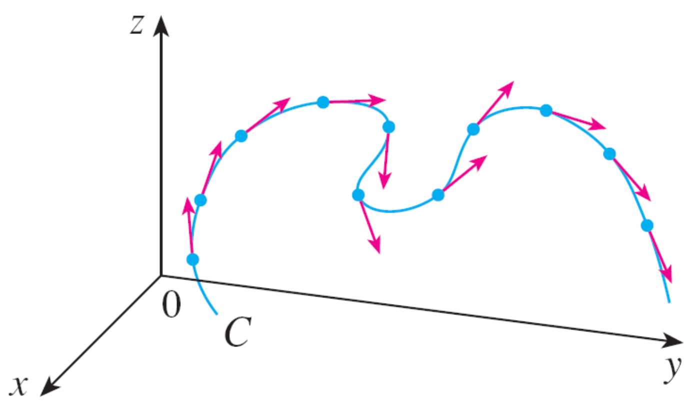
Se *C* for uma curva lisa definida por uma função vetorial **r**, lembre-se de que o vetor tangente unitário **T**(*t*) será dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva.

Curvatura

Da Figura 4, podemos ver que $\mathbf{T}(t)$ muda de direção muito devagar quando a curva C é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva C se dobra ou retorce mais acentuadamente.



Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de C

Figura 4

Curvatura

A curvatura de *C* em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

8 **Definição** **A curvatura** de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde $\mathbf{T}$ é o vetor tangente unitário.

Curvatura

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro *t* em vez de *s*. Assim, usamos a Regra da Cadeia para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \qquad \text{e} \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}\right|$$

Mas, da Equação 7, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$, e então

$\boxed{9}$

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}}$$

Exemplo 3

Mostre que a curvatura de um círculo de raio a é $1/a$.

SOLUÇÃO: Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \mathbf{i} + a \,\text{sen}\, t \, \mathbf{j}$$

Portanto $\mathbf{r}'(t) = -a \,\text{sen}\, t \, \mathbf{i} + a \cos t \, \mathbf{j}$ e $|\mathbf{r}'(t)| = a$

Logo, $$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\text{sen}\, t \, \mathbf{i} + \cos t \, \mathbf{j}$$

e $$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \, \mathbf{i} - \text{sen}\, t \, \mathbf{j}$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Isso nos dá $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

Curvatura

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Embora a Fórmula 9 possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema a seguir:

10 **Teorema** A curvatura de uma curva dada pela função vetorial $\mathbf{r}$ é

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Curvatura

Para o caso especial de uma curva plana com a equação $y = f(x)$, escolhemos x como parâmetro e escrevemos $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Então $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, segue que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. Nós também temos, $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ pelo Teorema 10,

11

$$\boxed{\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}}$$

Vetores Normal e Binormal

Vetores Normal e Binormal

Em um ponto dado de uma curva lisa $\mathbf{r}(t)$, existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$.

Escolhemos um observando que, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t, temos $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$, de modo que $\mathbf{T}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$.

Observe, no entanto, que $\mathbf{T}'(t)$ pode não ser um vetor unitário. Mas se $\mathbf{r}'$ também for suave, $\kappa \neq 0$ podemos definir **vetor normal unitário principal $\mathbf{N}(t)$** (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

Vetores Normal e Binormal

O vetor $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é chamado **vetor binormal**. Ele é perpendicular a ambos **T** e **N** e também uma unidade (veja a Figura 6).

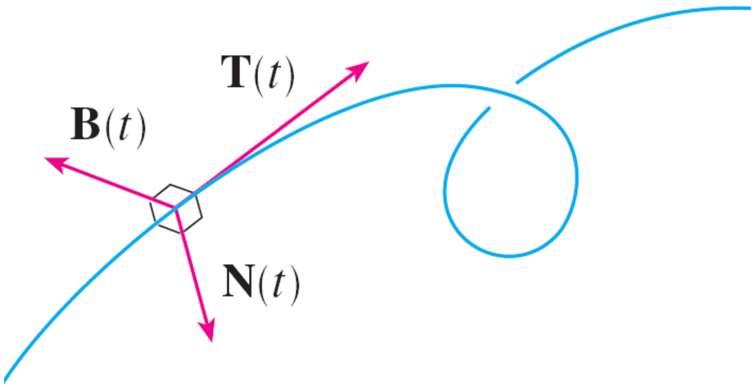


Figura 6

Exemplo 6

Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUÇÃO: Vamos inicialmente, calcular os ingredientes necessários para o cálculo do vetor normal unitário:

$$\mathbf{r}'(t) = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\text{sen}\,t, 0\rangle$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo *z*. O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1 \rangle$$

Vetores Normal e Binormal

O plano determinado pelos vetores normal e binormal **N** e **B** num ponto *P* sobre uma curva *C* é chamado **plano normal** de *C* em *P*. Ele é constituído por todas as linhas que são ortogonais ao vetor tangente **T**. O plano determinado pelos vetores **T** e **N** é chamado **plano osculador** de *C* a *P*. O nome vem do latim *osculum*, que significa “beijo.” É o plano que se aproxima mais do que contém a parte da curva próxima *P*. (Para uma curva plana, o plano osculador é simplesmente o plano que contém a curva).

Vetores Normal e Binormal

O círculo que está no plano osculador de C em P, tem a mesma tangente que C em P, fica do lado côncavo de C (na direção em que **N** aponta), e tem raio $\rho = 1/\kappa$ (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de C em P. É o círculo que melhor descreve como C se comporta perto P; que compartilha a mesma tangente, normal e curvatura P.

Vetores Normal e Binormal

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$