NOME: GABARITO No.USP: ____________

CURSO: Bacharelado em Economia – FEA
PERÍODO: Noturno
DISCIPLINA: MAE0219 – Introdução à Probabilidade e Estatística I
DATA: 27-06-2017

Questão	Valor
1	
2	
3	
4	
Total	

a) Não destaque as folhas.
b) Não serão fornecidas folhas adicionais.
c) Use todo o espaço disponível (frente e verso).
d) Na última página encontram-se tabelas e fórmulas para a resolução da prova.

1) O erro de medida de certo objeto é uma variável aleatória com distribuição Normal. Sabe-se que $P(X \leq 2) = 0{,}975$ e $P(X \geq -1{,}60) = 0{,}95$. Responda às questões abaixo:

a) qual a média e o desvio padrão de X?

b) Estamos interessados em que o erro de medida não ultrapasse 2. Numa amostra de 5 medidas escolhidas aleatoriamente calcule a probabilidade de pelo menos três dessas medidas ultrapassarem o valor 2.

[use distribuição discreta apropriada para resolver este item]

[valor:2,5]

a) $P(X \leq 2) = 0{,}975$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{2-\mu_x}{\sigma_x}\right) = 0{,}975$

$\Rightarrow P(Z \leq z) = 0{,}975 \Rightarrow z = 1{,}96$

$\Rightarrow 1{,}96 = \dfrac{2-\mu_x}{\sigma_x} \Rightarrow \boxed{\mu_x = 2 - 1{,}96\sigma_x}$

$P(X \geq -1{,}60) = 0{,}95$

$\Rightarrow P\left(Z \geq \dfrac{-1{,}60-\mu_x}{\sigma_x}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{1{,}60+\mu_x}{\sigma_x}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow P(Z \leq z) = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}64$

$\Rightarrow 1{,}64 = \dfrac{1{,}60+\mu_x}{\sigma_x}$

P2-MAE0219-FEA-NOTURNO

$\Rightarrow 1{,}64\sigma_x = 1{,}60 + \mu_x = 1{,}60 + 2 - 1{,}96\sigma_x$

$\Rightarrow 3{,}60\sigma_x = 3{,}60 \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 1}$

$\Rightarrow \boxed{\mu_x = 2 - 1{,}96 = 0{,}04}$

b) Y: nº de medidas que ultrapassam o valor 2

$$q = P(X > 2) = 0{,}025 \qquad Y \sim B(n, p) \quad n = 5$$

$$P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)$$

$$= \binom{5}{3}(0{,}025)^3(0{,}975)^2 + \binom{5}{4}(0{,}025)^4(0{,}975)$$

$$+ \binom{5}{1}(0{,}025)^5(0{,}975)^0$$

$$= 10 \times (0{,}025)^3(0{,}975)^2 + 5 \times (0{,}025)^4 \times (0{,}975)$$

$$+ (0{,}025)^5 = \boxed{0{,}00015}$$

2) Uma máquina produz roldanas cujos diâmetros seguem distribuição Normal de média 100 mm e desvio padrão 0,5 mm. As roldanas estão dentro das especificações se tiverem diâmetro entre 99,5 e 100,5 mm. Responda às questões abaixo:

a) qual é a proporção de roldanas produzidas pela máquina que estão dentro das especificações?

b) Em um lote de 500 roldanas, qual é a probabilidade aproximada de haver, no máximo 140 delas fora das especificações?

[use aproximação da Binomial pela Normal para resolver o item b)]

[valor:2,0]

a) $Y \sim N(100, (0,5)^2)$

$$p = P(99{,}5 \leq Y \leq 100{,}5)$$

$$= P\left(\frac{99{,}5-100}{0{,}5} \leq Z \leq \frac{100{,}5-100}{0{,}5}\right)$$

$$= P(-1{,}0 \leq Z \leq 1{,}0) = 2A(1{,}0) - 1$$

$$= 2 \times 0{,}8413 - 1 = \boxed{0{,}6826}$$

b) X: nº de roldanas dentro das especificações

$X \sim B(n, p)$ $n = 500$ e $p = 0{,}6826$

$$E(X) = np = 500 \times 0{,}6826 = \boxed{341{,}3}$$

$$Var(X) = np(1-p) = 500 \times 0{,}6826 \times 0{,}3174 = 108{,}33$$

$$DP(X) = \sqrt{108{,}33} \cong \boxed{10{,}41}$$

$$P(X \geq 360) \cong P\left(Z \geq \frac{360 - 341{,}3}{10{,}41}\right)$$

$$= P(Z \geq 1{,}80) = 1 - A(1{,}80)$$

$$= 1 - 0{,}9641 = \boxed{0{,}0359 \ (3{,}59\%)}$$

3) Sabe-se que o número de falhas de impressão em cadernos produzidos numa gráfica segue certa distribuição com média 5 falhas e desvio padrão 3 falhas. Responda às questões abaixo:

a) calcule a probabilidade de num lote de 100 cadernos o número médio de falhas por caderno estar entre 4,4 e 5,4 falhas?

b) Quantos cadernos devem ser amostrados de modo que a probabilidade da média amostral estar a uma distância não superior a 0,5 falhas da média populacional seja de 98%? Sugestão: distância não superior a 0,5 da média populacional significa média amostral estar no intervalo [μ-0,5;μ+0,5].

[valor:2,5]

a) X_i: nº de falhas no i-ésimo caderno

$E(X_i) = \mu = 5$

$Var(X_i) = \sigma^2 = 9$

$\overline{S} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ $\quad \overline{S} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

para n grande

$$P(4,4 \leq \overline{S} \leq 5,4) \cong P\left(\frac{4,4-5}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{5,4-5}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{4,4-5}{3/10} \leq Z \leq \frac{5,4-5}{3/10}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 1,33) = A(1,33) - [1 - A(2)]$$

$$= 0,9082 - [1 - 0,9772]$$

$$= 0,9082 - 0,0228$$

$$= \boxed{0,8854 \ (88,54\%)}$$

b) $P(\mu - 0{,}5 \leq \bar{X} \leq \mu + 0{,}5)$

$$= P\left(\frac{-0{,}5}{\sigma/\sqrt{m}} \leq Z \leq \frac{0{,}5}{\sigma/\sqrt{m}} \right)$$

$$= P\left(\frac{-0{,}5}{3/\sqrt{m}} \leq Z \leq \frac{0{,}5}{3/\sqrt{m}} \right) = 0{,}98$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}98$$

$$A(z) = 0{,}99 \Rightarrow z = 2{,}33$$

$$\frac{0{,}5}{3/\sqrt{m}} = 2{,}33$$

$$\Rightarrow \sqrt{m} = \frac{2{,}33 \times 3}{0{,}5} = 13{,}98$$

$$m = (13{,}98)^2 \cong \boxed{196 \text{ cadernos}}$$

4) Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função de probabilidade conjunta dada pela tabela abaixo.

Y/X	0	1	2	p(Y)
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,0	0,1	0,1	0,2
3	0,2	0,1	0,0	0,3
p(X)	0.3	0,4	0,3	1,0

Responda às questões abaixo:

a) complete a tabela acima. São as variáveis X e Y independentes? Justifique.

b) Calcule P(X=1|Y=1) e P(X=2, Y<3).

c) Obtenha e interprete o coeficiente de correlação linear ρ(X,Y).

[valor:3,0]

a) não são independentes

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$= \frac{0,2}{0.5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$P(X=2, Y<3) = P(X=2, Y\leq 2)$$

$$= P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) = 0,2 + 0,1 = \boxed{0,3}$$

c)

x	0	1	2
$p(x)$	0.3	0,4	0.3

$$E(X) = 0\times 0,3 + 1\times 0,4 + 2\times 0,3$$

$$= 0 + 0,4 + 0,6 = \boxed{1,0}$$

$$E(X^2) = 0^2\times 0,3 + 1^2\times 0,4 + 2^2\times 0,3$$

$$= 0 + 0,4 + 1,2 = 1,6$$

$Var(X) = 1{,}6 - (1{,}0)^2 = 0{,}6$

$DP(X) = \sqrt{0{,}6} \cong \boxed{0{,}775}$

y	1	2	3
$p(y)$	0.5	0,2	0,3

$E(Y) = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}3$

$= 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}9 = 1{,}8$

$E(Y^2) = 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}2 + 3^2 \times 0{,}3$

$= 0{,}5 + 0{,}8 + 2{,}7$

$= 4$

$Var(Y) = 4 - (1{,}8)^2 = 0{,}76$

$DP(Y) = \sqrt{0{,}76} \cong 0{,}872$

$E(XY) = 1 \times 1 \times 0{,}2 + 1 \times 2 \times 0{,}2$

$+ 2 \times 1 \times 0{,}1 + 2 \times 2 \times 0{,}1 + 3 \times 1 \times 0{,}1$

$= 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}5$

$\rho(X,Y) = \dfrac{1{,}5 - 1{,}0 \times 1{,}8}{0{,}775 \times 0{,}872}$

$= \dfrac{-0{,}30}{0{,}6758} = \boxed{-0{,}444}$