

Modelos Bidimensionais Discretos

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

1º Semestre 2017

Profs. Vanderlei C. Bueno e Gilberto A. Paula

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Unidimensional
- 3 Variável Aleatória Discreta Unidimensional
- 4 Variável Aleatória Bidimensional
- 5 Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

- função de probabilidade conjunta

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

- função de probabilidade conjunta
- função de probabilidade marginal

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

- função de probabilidade conjunta
- função de probabilidade marginal
- função de probabilidade condicional

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

- função de probabilidade conjunta
- função de probabilidade marginal
- função de probabilidade condicional
- esperança condicional

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo **Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais**:

- função de probabilidade conjunta
- função de probabilidade marginal
- função de probabilidade condicional
- esperança condicional
- variância condicional

Objetivos da Aula

Revisaremos também o conceito de independência entre variáveis aleatórias e apresentaremos a definição de **covariância** e **correlação linear** entre variáveis aleatórias.

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Unidimensional**
- 3 Variável Aleatória Discreta Unidimensional
- 4 Variável Aleatória Bidimensional
- 5 Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Definição

Variável aleatória unidimensional é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Unidimensional
- 3 Variável Aleatória Discreta Unidimensional**
- 4 Variável Aleatória Bidimensional
- 5 Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for **finito** ou **infinito enumerável**.

Exemplos

Exemplos

- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã

Exemplos

- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- n^o de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos

Exemplos

- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- n^o de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos
- n^o de pessoas que visitaram um determinado site, num certo período de tempo

Exemplos

- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- n^o de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos
- n^o de pessoas que visitaram um determinado site, num certo período de tempo
- n^o de inadimplentes dentre 100 pessoas que pegaram empréstimo no último ano

Exemplos

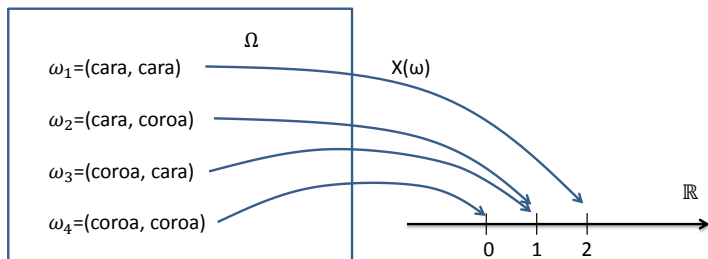
- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- n^o de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos
- n^o de pessoas que visitaram um determinado site, num certo período de tempo
- n^o de inadimplentes dentre 100 pessoas que pegaram empréstimo no último ano
- n^o de dias num mês em que o fechamento de uma determinada ação sobe em relação à abertura

Exemplos

- n^o de acidentes na marginal Tietê no período da manhã
- n^o de alunos aprovados no vestibular entre 200 inscritos
- n^o de pessoas que visitaram um determinado site, num certo período de tempo
- n^o de inadimplentes dentre 100 pessoas que pegaram empréstimo no último ano
- n^o de dias num mês em que o fechamento de uma determinada ação sobe em relação à abertura
- n^o de domicílios com crianças menores de 6 anos

Exemplo 1

Descrição da variável aleatória X : número de caras no lançamento de duas moedas



Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X : número de caras no lançamento de duas moedas equilibradas fica dada por

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X : **número de caras no lançamento de duas moedas** equilibradas fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Unidimensional
- 3 Variável Aleatória Discreta Unidimensional
- 4 Variável Aleatória Bidimensional**
- 5 Variável Aleatória Discreta Bidimensional

Definição

Variável aleatória bidimensional é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui valores no R^2 a cada elemento do espaço amostral.

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Unidimensional
- 3 Variável Aleatória Discreta Unidimensional
- 4 Variável Aleatória Bidimensional
- 5 Variável Aleatória Discreta Bidimensional**

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo discreta bidimensional quando o número de valores possíveis que a variável assume no R^2 for **finito** ou **infinito enumerável**.

Exemplos

Exemplos

- n.º de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda

Exemplos

- n^o de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda
- n^o de carros vendidos dos tipos SEDAN e SUV num dia em uma concessionária

Exemplos

- n^o de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda
- n^o de carros vendidos dos tipos SEDAN e SUV num dia em uma concessionária
- n^o de questões de Física e Química respondidas corretamente por um aluno num exame vestibular

Exemplos

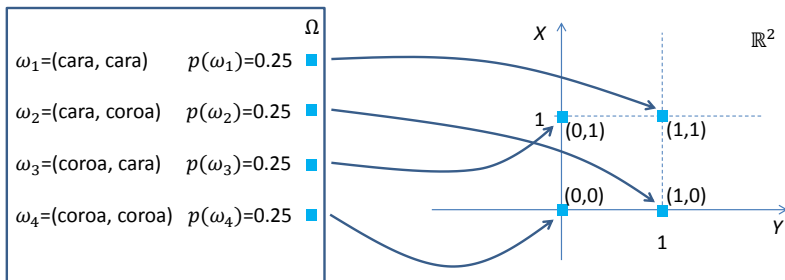
- n^o de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda
- n^o de carros vendidos dos tipos SEDAN e SUV num dia em uma concessionária
- n^o de questões de Física e Química respondidas corretamente por um aluno num exame vestibular
- n^o de visitas que cada um dos cônjuges faz ao médico durante um ano

Exemplos

- n^o de caras no primeiro e no segundo lançamentos de uma moeda
- n^o de carros vendidos dos tipos SEDAN e SUV num dia em uma concessionária
- n^o de questões de Física e Química respondidas corretamente por um aluno num exame vestibular
- n^o de visitas que cada um dos cônjuges faz ao médico durante um ano
- n^o de acidentes numa rodovia nos períodos diurno e noturno

Exemplo 2

Descrição da variável aleatória bidimensional (X,Y) : número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda equilibrada



$$\begin{aligned} P(X=0,Y=0) &= 0,25 & P(X=0,Y=1) &= 0,25 \\ P(X=1,Y=0) &= 0,25 & P(X=1,Y=1) &= 0,25 \end{aligned}$$

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : **número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda** pode ser representada na forma abaixo

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda pode ser representada na forma abaixo

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

Exemplo 2

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda pode ser representada na forma abaixo

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

em que $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, para $i, j = 0, 1$, com as condições

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda pode ser representada na forma abaixo

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

em que $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, para $i, j = 0, 1$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda pode ser representada na forma abaixo

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

em que $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, para $i, j = 0, 1$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$
- $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : **número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda**, supondo que a moeda é equilibrada, fica dada por

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) : **número de caras no primeiro e segundo lançamentos de uma moeda**, supondo que a moeda é equilibrada, fica dada por

$X \backslash Y$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Função de probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) pode ser representada pela tabela abaixo

Função de probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) pode ser representada pela tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}

Função de probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) pode ser representada pela tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}

em que $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$, com as condições

Função de probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) pode ser representada pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}

em que $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$

Função de probabilidade

De uma forma geral a função de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) pode ser representada pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}

em que $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$, com as condições

- $p_{ij} \geq 0$
- $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Exemplo 3

Vamos considerar novamente o experimento de lançamento de duas moedas e as variáveis aleatórias X e Y denotando, respectivamente, o número de caras no primeiro e segundo lançamentos. Segue abaixo a distribuição conjunta de duas novas variáveis $U = X - Y$ e $W = X + Y$.

$X \backslash Y$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

$U \backslash W$	0	1	2
-1		0,25	
0	0,25		0,25
1		0,25	

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (U, W) fica dada por

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (U, W) fica dada por

$U \backslash W$	0	1	2
-1	0	0,25	0
0	0,25	0	0,25
1	0	0,25	0

Exemplo 2

As **funções de probabilidade marginais de X e Y** podem ser obtidas através da tabela abaixo

Exemplo 2

As **funções de probabilidade marginais de X e Y** podem ser obtidas através da tabela abaixo

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Exemplo 2

As **funções de probabilidade marginais de X e Y** podem ser obtidas através da tabela abaixo

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

em que $p(x) = P(X = x)$ e $p(y) = P(Y = y)$.

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,50	0,50

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,50	0,50

com $E(X) = 0,50$ e $Var(X) = 0,50 \times 0,50 = 0,25$.

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,50	0,50

com $E(X) = 0,50$ e $Var(X) = 0,50 \times 0,50 = 0,25$.

y	0	1
$P(Y = y)$	0,50	0,50

Exemplo 2

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,50	0,50

com $E(X) = 0,50$ e $Var(X) = 0,50 \times 0,50 = 0,25$.

y	0	1
$P(Y = y)$	0,50	0,50

com $E(Y) = 0,50$ e $Var(Y) = 0,50 \times 0,50 = 0,25$.

Exemplo 3

De forma similar podemos obter as **funções de probabilidade marginais de U e W** conforme a tabela abaixo

Exemplo 3

De forma similar podemos obter as **funções de probabilidade marginais de U e W** conforme a tabela abaixo

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Exemplo 3

De forma similar podemos obter as **funções de probabilidade marginais de U e W** conforme a tabela abaixo

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

em que $p(u) = P(U = u)$ e $p(w) = P(W = w)$.

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

u	-1	0	1
$P(U = u)$	0,25	0,50	0,25

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

u	-1	0	1
$P(U = u)$	0,25	0,50	0,25

com $E(U) = -1 \times 0,25 + 0 \times 0,50 + 1 \times 0,25 = 0$ e $\text{Var}(U) = 0,50$.

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

u	-1	0	1
$P(U = u)$	0,25	0,50	0,25

com $E(U) = -1 \times 0,25 + 0 \times 0,50 + 1 \times 0,25 = 0$ e $\text{Var}(U) = 0,50$.

w	0	1	2
$P(W = w)$	0,25	0,50	0,25

Exemplo 3

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

u	-1	0	1
$P(U = u)$	0,25	0,50	0,25

com $E(U) = -1 \times 0,25 + 0 \times 0,50 + 1 \times 0,25 = 0$ e $\text{Var}(U) = 0,50$.

w	0	1	2
$P(W = w)$	0,25	0,50	0,25

com $E(W) = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 = 1$ e $\text{Var}(W) = 0,50$.

Distribuição marginal

De uma forma geral as **funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y** podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

Distribuição marginal

De uma forma geral as **funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y** podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

Distribuição marginal

De uma forma geral as **funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y** podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

em que

Distribuição marginal

De uma forma geral as **funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y** podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2.}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r.}$
$p(y)$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.s}$	1

em que

- $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$ para $i = 1, \dots, r$

Distribuição marginal

De uma forma geral as **funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias X e Y** podem ser obtidas conforme a tabela abaixo

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2.}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r.}$
$p(y)$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.s}$	1

em que

- $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$ para $i = 1, \dots, r$
- $p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$ para $j = 1, \dots, s$

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A|B) = P(A), P(B) > 0.$$

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A|B) = P(A), P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A , isto é,

$$P(A|B) = P(A), P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

Dizemos que as variáveis X e Y são independentes se

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

Dizemos que as variáveis X e Y são independentes se

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$
$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

Definição

Supor que as variáveis X e Y sejam representadas pela tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

Dizemos que as variáveis X e Y são independentes se

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$
$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$.

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Temos que para todas as caselas da tabela

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Temos que para todas as caselas da tabela

$$0,25 = 0,50 \times 0,50.$$

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Temos que para todas as caselas da tabela

$$0,25 = 0,50 \times 0,50.$$

Assim, podemos dizer que X e Y são independentes.

Exemplo 2

As variáveis X e Y são independentes?

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Temos que para todas as caselas da tabela

$$0,25 = 0,50 \times 0,50.$$

Assim, podemos dizer que X e Y são independentes. Isto é, o número de caras no 2º lançamento independe do número de caras no 1º lançamento.

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Em particular para a casela na posição (2,1) temos que

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Em particular para a casela na posição (2,1) temos que

$$0,25 \neq 0,25 \times 0,50.$$

Exemplo 3

As variáveis U e W são independentes?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Em particular para a casela na posição (2,1) temos que

$$0,25 \neq 0,25 \times 0,50.$$

Portanto, as variáveis U e W não são independentes.

Exemplo 3

Qual a distribuição condicional de U dado $W = 1$?

Exemplo 3

Qual a distribuição condicional de U dado $W = 1$?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Exemplo 3

Qual a distribuição condicional de U dado $W = 1$?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Temos que

Exemplo 3

Qual a distribuição condicional de U dado $W = 1$?

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Temos que

$$P(U = u \mid W = 1) = \frac{P(U = u, W = 1)}{P(W = 1)}.$$

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$

u	-1	0	1
$P(U = u \mid W = 1)$	$\frac{0,25}{0,50} = \frac{1}{2}$	$\frac{0}{0,50} = 0$	$\frac{0,25}{0,50} = \frac{1}{2}$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

$$E(U | W = 1) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

$$E(U | W = 1) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E(U^2 | W = 1) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times 0 + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

$$E(U | W = 1) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E(U^2 | W = 1) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times 0 + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}(U | W = 1) = E(U^2 | W = 1) - [E(U | W = 1)]^2$$

Exemplo 3

A função de probabilidade condicional de U dado $W = 1$ fica dada por

u	-1	0	1
$P(U = u W = 1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

A esperança e variância de U dado $W = 1$ ficam dadas por

$$E(U | W = 1) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E(U^2 | W = 1) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times 0 + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(U | W = 1) &= E(U^2 | W = 1) - [E(U | W = 1)]^2 \\ &= 1 - 0^2 = 1 \end{aligned}$$

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$E(X | Y = y) = \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i | Y = y)$$

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$E(X | Y = y) = \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i | Y = y)$$

Variância condicional

A variância condicional de X dado $Y = y$ é definida por

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$E(X | Y = y) = \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i | Y = y)$$

Variância condicional

A variância condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$\text{Var}(X | Y = y) = E(X^2 | Y = y) - [E(X | Y = y)]^2$$

Esperança condicional

A esperança condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$E(X | Y = y) = \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i | Y = y)$$

Variância condicional

A variância condicional de X dado $Y = y$ é definida por

$$\text{Var}(X | Y = y) = E(X^2 | Y = y) - [E(X | Y = y)]^2$$

$$E(X^2 | Y = y) = \sum_{i=1}^r x_i^2 P(X = x_i | Y = y)$$

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2.}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r.}$
$p(y)$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.s}$	1

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
$p(y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\dots	$p_{\cdot s}$	1

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

Covariância entre X e Y

Vamos considerar a tabela abaixo

$X \setminus Y$	y_1	y_2	\dots	y_s	$p(x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1s}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2s}	$p_{2.}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	p_{r1}	p_{r2}	\dots	p_{rs}	$p_{r.}$
$p(y)$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.s}$	1

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

$$E(XY) = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} \quad E(X) = \sum_i x_i p_{i.} \quad E(Y) = \sum_j y_j p_{.j}$$

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}\end{aligned}$$

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

Correlação linear entre X e Y

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \quad E(Y^2) = \sum_j y_j^2 p_j.$$

Propriedades

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- $\rho(X, Y) = 1$ se e somente se há constantes $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- $\rho(X, Y) = 1$ se e somente se há constantes $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
- $\rho(X, Y) = -1$ se e somente se há constantes $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- $\rho(X, Y) = 1$ se e somente se há constantes $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
- $\rho(X, Y) = -1$ se e somente se há constantes $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Independência

Se X e Y são independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$ e portanto $\text{Cov}(X, Y) = 0$ e $\rho(X, Y) = 0$.

Propriedades

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- $\rho(X, Y) = 1$ se e somente se há constantes $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
- $\rho(X, Y) = -1$ se e somente se há constantes $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Independência

Se X e Y são independentes então $E(XY) = E(X)E(Y)$ e portanto $\text{Cov}(X, Y) = 0$ e $\rho(X, Y) = 0$.

A recíproca não necessariamente é verdadeira.

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e variâncias finitas.

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e variâncias finitas.
Então

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e variâncias finitas.
Então

- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e variâncias finitas.
Então

- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$

Esperança e Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias com esperanças e variâncias finitas. Então

- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$

Independência

Se X e Y são independentes então $\text{Cov}(X, Y) = 0$ e portanto $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0,25 +$$

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0,25 + 1 \times 0 \times 0,25 + 1 \times 1 \times 0,25$$

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0,25 + \\ &\quad 1 \times 0 \times 0,25 + 1 \times 1 \times 0,25 \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

Exemplo 2

$X \backslash Y$	0	1	$p(x)$
0	0,25	0,25	0,50
1	0,25	0,25	0,50
$p(y)$	0,50	0,50	1

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0,25 + \\ &\quad 1 \times 0 \times 0,25 + 1 \times 1 \times 0,25 \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

Temos ainda que $E(X) = 0,50$, $\text{Var}(X) = 0,25$, $E(Y) = 0,50$ e $\text{Var}(Y) = 0,25$.

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,25 - 0,50 \times 0,50}{\sqrt{0,25}\sqrt{0,25}}\end{aligned}$$

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,25 - 0,50 \times 0,50}{\sqrt{0,25}\sqrt{0,25}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,25 - 0,50 \times 0,50}{\sqrt{0,25}\sqrt{0,25}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lembrando que X e Y são independentes.

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

$$E(UW) = -1 \times 0 \times 0 + -1 \times 1 \times 0,25 + -1 \times 2 \times 0 +$$

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

$$E(UW) = -1 \times 0 \times 0 + -1 \times 1 \times 0,25 + -1 \times 2 \times 0 + \\ 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 0,25 +$$

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

$$\begin{aligned} E(UW) &= -1 \times 0 \times 0 + -1 \times 1 \times 0,25 + -1 \times 2 \times 0 + \\ & 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 0,25 + \\ & 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times 0,25 + 1 \times 2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3

$U \setminus W$	0	1	2	$p(u)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,50
1	0	0,25	0	0,25
$p(w)$	0,25	0,50	0,25	1

$$\begin{aligned}
 E(UW) &= -1 \times 0 \times 0 + -1 \times 1 \times 0,25 + -1 \times 2 \times 0 + \\
 &\quad 0 \times 0 \times 0,25 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times 0,25 + \\
 &\quad 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times 0,25 + 1 \times 2 \times 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Temos ainda que $E(U) = 0$, $\text{Var}(U) = 0,50$, $E(W) = 1$ e $\text{Var}(W) = 0,50$.

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

$$\rho(U, W) = \frac{E(UW) - E(U)E(W)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(W)}}$$

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(U, W) &= \frac{E(UW) - E(U)E(W)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(W)}} \\ &= \frac{0 - 0 \times 1}{\sqrt{0,50}\sqrt{0,50}}\end{aligned}$$

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(U, W) &= \frac{E(UW) - E(U)E(W)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(W)}} \\ &= \frac{0 - 0 \times 1}{\sqrt{0,50}\sqrt{0,50}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 3

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre U e W fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(U, W) &= \frac{E(UW) - E(U)E(W)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(W)}} \\ &= \frac{0 - 0 \times 1}{\sqrt{0,50}\sqrt{0,50}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Note que U e W não são independentes.

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X , Y) por uma loja num determinado dia

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X , Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X, Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,05 + 0 \times 1 \times 0,10 +$$

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X, Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$E(XY) = 0 \times 0 \times 0,05 + 0 \times 1 \times 0,10 + \\ 0 \times 2 \times 0,25 + 0 \times 3 \times 0,05 +$$

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X , Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$\begin{aligned} E(XY) = & 0 \times 0 \times 0,05 + 0 \times 1 \times 0,10 + \\ & 0 \times 2 \times 0,25 + 0 \times 3 \times 0,05 + \\ & 1 \times 0 \times 0,05 + 1 \times 1 \times 0,30 + \end{aligned}$$

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X, Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$\begin{aligned} E(XY) = & 0 \times 0 \times 0,05 + 0 \times 1 \times 0,10 + \\ & 0 \times 2 \times 0,25 + 0 \times 3 \times 0,05 + \\ & 1 \times 0 \times 0,05 + 1 \times 1 \times 0,30 + \\ & 1 \times 2 \times 0,10 + 1 \times 3 \times 0,10 \end{aligned}$$

Exemplo 4

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de unidades vendidas de dois produtos (X, Y) por uma loja num determinado dia

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,05	0,10	0,25	0,05
1	0,05	0,30	0,10	0,10

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 0 \times 0,05 + 0 \times 1 \times 0,10 + \\ &\quad 0 \times 2 \times 0,25 + 0 \times 3 \times 0,05 + \\ &\quad 1 \times 0 \times 0,05 + 1 \times 1 \times 0,30 + \\ &\quad 1 \times 2 \times 0,10 + 1 \times 3 \times 0,10 \\ &= 0,80. \end{aligned}$$

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,45	0,55

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,45	0,55

com $E(X) = 0,55$ e $Var(X) = 0,55 \times 0,45 = 0,2475$.

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,45	0,55

com $E(X) = 0,55$ e $Var(X) = 0,55 \times 0,45 = 0,2475$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,10	0,40	0,35	0,15

Exemplo 4

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1
$P(X = x)$	0,45	0,55

com $E(X) = 0,55$ e $Var(X) = 0,55 \times 0,45 = 0,2475$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,10	0,40	0,35	0,15

com $E(Y) = 1,55$ e $Var(Y) = 0,7475$.

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,80 - 0,55 \times 1,55}{\sqrt{0,2475}\sqrt{0,7475}}\end{aligned}$$

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,80 - 0,55 \times 1,55}{\sqrt{0,2475}\sqrt{0,7475}} \\ &= -0,122.\end{aligned}$$

Exemplo 4

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{0,80 - 0,55 \times 1,55}{\sqrt{0,2475}\sqrt{0,7475}} \\ &= -0,122.\end{aligned}$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Exemplo 5

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de questões de Física (X) e de Química (Y) respondidas corretamente num exame vestibular

Exemplo 5

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de questões de Física (X) e de Química (Y) respondidas corretamente num exame vestibular

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,10	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,10	0,00
2	0,00	0,10	0,10	0,05
3	0,00	0,05	0,05	0,05

Exemplo 5

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de questões de Física (X) e de Química (Y) respondidas corretamente num exame vestibular

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,10	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,10	0,00
2	0,00	0,10	0,10	0,05
3	0,00	0,05	0,05	0,05

Qual a probabilidade de um candidato acertar pelo menos duas questões de cada tópico?

Exemplo 5

A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta do número de questões de Física (X) e de Química (Y) respondidas corretamente num exame vestibular

X \ Y	0	1	2	3
0	0,10	0,10	0,00	0,00
1	0,15	0,15	0,10	0,00
2	0,00	0,10	0,10	0,05
3	0,00	0,05	0,05	0,05

Qual a probabilidade de um candidato acertar pelo menos duas questões de cada tópico? E de acertar no máximo uma questão de cada tópico?

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

com $E(X) = 1,35$ e $Var(X) = 2,75 - (1,35)^2 = 0,9275$.

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

com $E(X) = 1,35$ e $Var(X) = 2,75 - (1,35)^2 = 0,9275$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,25	0,10

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

com $E(X) = 1,35$ e $Var(X) = 2,75 - (1,35)^2 = 0,9275$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,25	0,10

com $E(Y) = 1,20$ e $Var(Y) = 2,30 - (1,20)^2 = 0,86$.

Exemplo 5

Resumindo temos as seguintes distribuições marginais:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,20	0,40	0,25	0,15

com $E(X) = 1,35$ e $Var(X) = 2,75 - (1,35)^2 = 0,9275$.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,25	0,10

com $E(Y) = 1,20$ e $Var(Y) = 2,30 - (1,20)^2 = 0,86$.

Exemplo 5

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 +$$

Exemplo 5

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 +$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 3 \times 0,05 + 3 \times 1 \times 0,05 + \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} E(XY) = & 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 3 \times 0,05 + 3 \times 1 \times 0,05 + \\ & 3 \times 2 \times 0,05 + 3 \times 3 \times 0,05 \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 3 \times 0,05 + 3 \times 1 \times 0,05 + \\ & 3 \times 2 \times 0,05 + 3 \times 3 \times 0,05 \\ &= 0,15 + 0,20 + 0,20 + 0,40 + 0,30 + 0,15 + \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 3 \times 0,05 + 3 \times 1 \times 0,05 + \\ & 3 \times 2 \times 0,05 + 3 \times 3 \times 0,05 \\ &= 0,15 + 0,20 + 0,20 + 0,40 + 0,30 + 0,15 + \\ & 0,30 + 0,45 = 2,15. \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 0,15 + 1 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 1 \times 0,10 + 2 \times 2 \times 0,10 + \\ & 2 \times 3 \times 0,05 + 3 \times 1 \times 0,05 + \\ & 3 \times 2 \times 0,05 + 3 \times 3 \times 0,05 \\ &= 0,15 + 0,20 + 0,20 + 0,40 + 0,30 + 0,15 + \\ & 0,30 + 0,45 = 2,15. \end{aligned}$$

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{2,15 - 1,35 \times 1,20}{\sqrt{0,9275}\sqrt{0,86}}\end{aligned}$$

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{2,15 - 1,35 \times 1,20}{\sqrt{0,9275}\sqrt{0,86}} \\ &= \frac{0,53}{0,8931} = 0,59.\end{aligned}$$

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{2,15 - 1,35 \times 1,20}{\sqrt{0,9275}\sqrt{0,86}} \\ &= \frac{0,53}{0,8931} = 0,59.\end{aligned}$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Cálculo da Correlação

Portanto, o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica dado por

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{2,15 - 1,35 \times 1,20}{\sqrt{0,9275}\sqrt{0,86}} \\ &= \frac{0,53}{0,8931} = 0,59.\end{aligned}$$

Portanto, X e Y não são independentes.

Interprete $X + Y$ e calcule $E(X + Y)$ e $\text{Var}(X + Y)$.