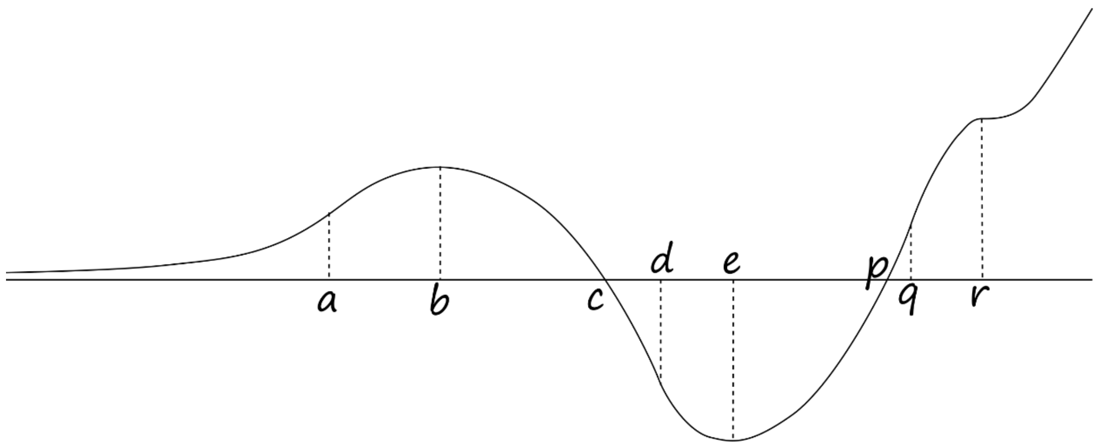
PROVA 2 – Cálculo Numérico

Q1. **(2.0)** (20 min)

Seja f a função dada pelo gráfico abaixo. Para claro entendimento da figura, foram marcados todos os pontos que são: (i) raízes; (ii) pontos críticos; (iii) pontos de inflexão.



Para cada uma das sentenças abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, e justifique. Use desenhos para suas justificativas. Nas sentenças, x_0 corresponde à condição inicial e x_k seu k-ésimo iterado, com respeito à iteração do Método de Newton.

(a) "$x_0 < b$ necessariamente implica $x_k \to -\infty$"
(b) "$x_0 > p$ necessariamente implica $x_k \to p$"
(c) "$x_0 \in (b, c)$ necessariamente implica $x_1 \in (c, e)$"
(d) "existe x_0 tal que $c < \cdots < x_{k+1} < x_k < \cdots < x_1 < x_0$"

RESPOSTA:

Vamos chamar de ϕ a fórmula de iteração de Newton. Os argumentos podem parecer difíceis, mas a correção será mais tranquila.

(a) VERDADEIRA
Para $x < b$, $\phi(x) < x$. Isto mostra que a sequência de iterados é decrescente. Se ela convergisse para um valor finito, esse valor seria ponto fixo de ϕ e, portanto, raiz de f. Logo, converge para $-\infty$.

(b) FALSA
Existem pontos x_0 perto de r, à sua esquerda, tal que $\phi(x_0) < b$. A partir daí, as iterações vão para $-\infty$.

(c) FALSA
Para x_0 perto de b, à sua direita, $\phi(x_0) > e$ (as tangentes ficam quase horizontais e encontram a abscissa tão à direita quanto queiramos).

(d) VERDADEIRA
Basta tomar x_0 entre c e d. Nessa região, o argumento de concavidade implica a afirmação.
É possível também tomar x_0 entre p e q, pois neste caso a sequência de iterados decresce monotonamente, convergindo para p, que é maior do que c.

Q2. **(2.0)** (10 min)

Encontre numericamente os dois **pontos críticos** da função $x\cos x$ que estão **entre** $\mathbf{0}$ **e** $\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$, usando o Método de Newton.

Orientações:

(i) *Os pontos críticos da função são os zeros de sua derivada!* Então a "f" aqui é a derivada da função!

(ii) As condições iniciais podem ser "chutadas", a partir de um esboço do gráfico de $x\cos x$. Esse esboço pode ser feito imaginando-se o efeito de multiplicar o conhecido $\cos x$ por x. Não é preciso analisar concavidade para justificar o x_0. (Estou bonzinho hoje)

RESPOSTA:

No intervalo $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, a função $x\cos x$ tem zeros em $0, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Então existe pelo menos um ponto crítico em $(0,\frac{\pi}{2})$ e um ponto crítico em $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Achar esses pontos críticos é o mesmo que obter as raízes, contidas em $[0,\frac{3\pi}{2}]$, da função $f(x) = (x\cos x)' = \cos x - x\sin x$. No primeiro caso, vamos "chutar" $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (o ponto médio do primeiro intervalo), e, no segundo, $x_0 = \pi$ (o ponto médio do segundo intervalo).

A fórmula de iteração é

$$\phi(x) = x - \frac{\cos x - x\sin x}{-2\sin x - x\cos x} = x + \frac{\cos x - x\sin x}{2\sin x + x\cos x}$$

Com $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$x_0 = 0.785398163$$

$$x_1 = 0.862443463$$

$$x_3 = 0.860334979$$

$$x_4 = 0.860333589$$

$$\boldsymbol{x_5 = 0.860333589}$$

Com $x_0 = \pi$:

$$x_0 = 3.141592654$$

$$x_1 = 3.45990254$$

$$x_2 = 3.425891572$$

$$x_3 = 3.425618478$$

$$x_4 = 3.425618459$$

$$\boldsymbol{x_5 = 3.425618459}$$

Q3. **(2.0)** (15 min)

Para os pontos da tabela abaixo, ajuste $y = \frac{a}{x} + \frac{b}{2-x}$, por MMQ, com pesos uniformes. Use 4 algarismos significativos toda vez que anotar o resultado de uma conta.

x	0.1	0.5	1.5	1.8
y	6	1.7	2.5	5.5

RESPOSTA:

$$\begin{cases} \langle \frac{1}{x}, \frac{1}{x} \rangle a & + & \langle \frac{1}{x}, \frac{1}{2-x} \rangle b & = & \langle \frac{1}{x}, y \rangle \\ \langle \frac{1}{2-x}, \frac{1}{x} \rangle a & + & \langle \frac{1}{2-x}, \frac{1}{2-x} \rangle b & = & \langle \frac{1}{2-x}, y \rangle \end{cases}$$

Em números, isso dá:

$$\begin{cases} 104.8\,a & + & 10.71\,b & = & 68.12 \\ 10.71\,a & + & 29.72\,b & = & 36.79 \end{cases}$$

Cuja solução é $a = 0.5435$ e $b = 1.042$.

Resposta:

$$y = \frac{0.5435}{x} + \frac{1.042}{2-x}$$

Observação:

Nesta questão, a equação já era linear. Porém alguns parecem não ter visto e preferiram seguir o caminho de reescrever a equação como

$$(2-x) \cdot a + x \cdot b = x(2-x)y,$$

que também é linear nos parâmetros, e fazer o ajuste correspondente. Neste caso, o sistema fica

$$\begin{cases} \langle 2-x, 2-x \rangle a & + & \langle 2-x, x \rangle b & = & \langle 2-x, x(2-x)y \rangle \\ \langle x, 2-x \rangle a & + & \langle x, x \rangle b & = & \langle x, x(2-x)y \rangle \end{cases}.$$

Em números:

$$\begin{cases} 6.15\,a & + & 2.05\,b & = & 5.412 \\ 2.05\,a & + & 5.75\,b & = & 7.128 \end{cases},$$

cuja solução é $a = 1.051$ e $b = 0.5297$ (como conversamos em aula, não necessariamente igual à outra).

Q4. **(2.0)** (15 min) Ajuste uma função do tipo $y = a/(b + \ln x)$ aos dados abaixo, por MMQ linear nos parâmetros. **Use pesos 2, 1 e 1**, respectivamente, e 4 algarismos significativos.

x	0.4	0.8	1.6
y	1.5	1.0	0.7

RESPOSTA:

Primeiro linearizamos: $(b + \ln x)y = a \to \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\,\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle a & + & \langle 1,-y\rangle b & = & \langle 1, y\ln x\rangle \\ \langle -y,1\rangle a & + & \langle -y,-y\rangle b & = & \langle -y, y\ln x\rangle \end{cases}$$

Em números (sem se esquecer dos pesos na hora de calcular os produtos escalares!):

$$\begin{cases} 4\,a & - & 4.7\,b & = & -2.643 \\ -4.7\,a & + & 5.99\,b & = & 4.116 \end{cases}$$

Resulta: $a = 1.877$ e $b = 2.160$.

$$y = \frac{1.877}{2.160 + \ln x}.$$

Observação:

Houve quem escrevesse

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \cdot \ln x\,,$$

resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle \dfrac{b}{a} & + & \langle 1, \ln x\rangle \dfrac{1}{a} & = & \langle 1, \dfrac{1}{y}\rangle \\ \langle \ln x\,, 1\rangle \dfrac{b}{a} & + & \langle \ln x\,, \ln x\rangle \dfrac{1}{a} & = & \langle \ln x\,, \dfrac{1}{y}\rangle \end{cases}.$$

Uma outra forma muito parecida também poderia ser usada, multiplicando essa equação acima por a:

$$\frac{1}{y} \cdot a - 1 \cdot b = \ln x\ \ ,$$

resultando no sistema

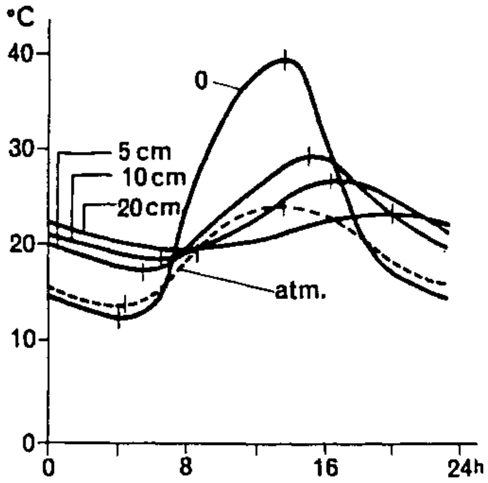
$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{y} \right\rangle a & + & \left\langle \dfrac{1}{y}, -1 \right\rangle b & = & \langle \dfrac{1}{y}, \ln x\rangle \\ \left\langle -1, \dfrac{1}{y} \right\rangle a & + & \langle -1, -1\rangle b & = & \langle -1, \ln x\rangle \end{cases}$$

Q5. **(2.0)** (15 min) O gráfico abaixo é uma medida da temperatura média do solo e do ar em diferentes profundidades, para cada hora do dia, em certo local e certa época do ano. Trata-se de uma função periódica, com período de 24h. Examinando o gráfico da medida tomada a 5 cm de profundidade, obtive os seguintes dados:

h	0	6	12	18
T	20	17	25	27

(a) Ajuste $T = a + b\cos(\frac{2\pi}{24}h) + c\sin(\frac{2\pi}{24}h)$ por MMQ a esses dados.

(b) Com os parâmetros ajustados, obtenha a amplitude e a fase da oscilação.



RESPOSTA:

Aqui $N = 4$. Então:

$$a = \frac{1}{4}\langle\, 1, T\,\rangle = \frac{1}{4}\sum_i T_i = \frac{20+17+25+27}{4} = \frac{89}{4} = 22.25$$

$$b = \frac{1}{2}\langle\, \cos\left(\frac{2\pi}{24}h\right), T\,\rangle = \frac{1}{2}\sum_i T_i\cos(\frac{2\pi}{24}h_i) = \frac{1\cdot 20 + 0\cdot 17 + (-1)\cdot 25 + 0\cdot 27}{2} = -2.5$$

$$c = \frac{1}{2}\langle\, \sin\left(\frac{2\pi}{24}h\right), T\,\rangle = \frac{1}{2}\sum_i T_i\sin(\frac{2\pi}{24}h_i) = \frac{0\cdot 20 + 1\cdot 17 + 0\cdot 25 + (-1)\cdot 27}{2} = -5.0$$

Amplitude: $A = \sqrt{(-2.5)^2 + (-5.0)^2} \simeq 5{,}59$ (de fato esta é meia-amplitude).

Fase: (b, c) está no terceiro quadrante. Obtemos $\theta = \tan^{-1}\frac{5.0}{2.5} = \tan^{-1} 2$. A calculadora dá 1.107 radianos, mas essa é uma resposta do primeiro quadrante. A do terceiro é obtida somando-se π: $\theta \simeq 4.249$.

Mas esse valor corresponde a $\frac{2\pi}{24}h^*$, em que $h^* = \frac{24}{2\pi}\cdot 4.249 = 16.23$.

Então podemos escrever o ajuste como

$$22.25 + 5.59\cos\left(\frac{2\pi}{24}(h - 16.23)\right)$$

O significado é: a temperatura oscila em torno de 22.25 graus centígrados, com variação para mais e para menos de 5.59 graus, e com pico de temperatura um pouco depois das 16h.