

Radiação Síncrotron com aplicação no estudo da estrutura do ribossomo

Otávio Vasques e Silvio Jonas Junior

Junho 2017

1 Introdução

A radiação Síncrotron é a radiação emitida por cargas se movimentando em órbitas circulares a velocidades próximas da velocidade da luz, mais conhecido como o regime relativístico. A circunstância física nas quais esses processos ocorrem experimentalmente são em Síncrotrons, daí o nome do fenômeno que foi observado pela primeira vez nessas máquinas. Síncrotrons são acelerados de partículas cíclicas, dentro dos quais as partículas são guiadas na trajetória circular pela ação de um campo magnético externo e aceleradas à velocidades próximas à da luz pela ação de um campo elétrico. Essa radiação também pode ser produzida naturalmente por objetos astronômicos, sendo a nebulosa do caranguejo o exemplo mais conhecido de detecção dessa radiação.

Radiação síncrotron ocorre em uma faixa de frequências muito grande, indo do infravermelho aos mais energéticos raios-X. É caracterizada por intenso brilho e por luz altamente polarizada e concentrada em pequena área. As primeiras máquinas desenvolvidas para o estudo dessa radiação tinham como propósito o estudo do núcleo atômico e não a geração de luz. Hoje em dia é comum o uso de máquinas com o intuito de estudar luz síncrotron e suas qualidades especiais, como por exemplo o Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS) em Campinas, São Paulo.

As aplicações desse tipo de radiação em ciências possuem uma enorme variedade que vão desde biologia estrutural até física de matéria condensada, química, meio ambiente e caracterização de pigmentos de pinturas (veja referências)

Como aplicação discutiremos o Nobel de Química de 2009 em que radiação síncrotron foi utilizada para realizar difração de raios-x em ribossomos com o propósito de entender sua estrutura. É de grande importância o estudo da estrutura do ribossomo para a indústria farmacêutica porque acredita-se que o conhecimento detalhado da estrutura do ribossomo bacterial permitirá entender precisamente como moléculas interagem com o ribossomo bacterial, e dessa forma desenvolver antibióticos para bactérias resistentes a esse tipo de ataque.

2 Potenciais de uma carga pontual em uma trajetória qualquer

Para iniciarmos a discussão da radiação Síncrotron vamos calcular os campos elétricos e magnéticos observados na posição \mathbf{r} gerados por uma carga q se movimentando em uma trajetória qualquer $\mathbf{r}_0(t)$. Partimos dos potenciais eletromagnéticos retardados no calibre de Lorenz, em que usaremos a convenção usual de texto em negrito para vetores e texto simples para escalares.

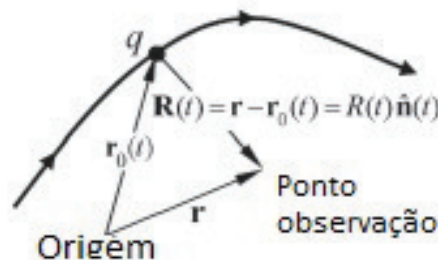


Figura 1: Trajetória qualquer de partícula de carga q

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1)$$

A densidade de carga e de correntes de uma carga pontual situada no ponto $\mathbf{r}_0(t)$ com uma velocidade arbitrária $\mathbf{v}(t)$ são dadas abaixo.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (2)$$

Convencionamos também o vetor que aponta da carga em direção ao ponto de observação.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}} \quad (3)$$

Para resolver as integrais em 1 vamos utilizar a seguinte propriedade da função delta.

$$f(x) = \int dx' \delta(x' - x)f(x') \quad (4)$$

Dessa forma podemos reescrever os integrandos como uma integral sobre uma segunda variável que não influencia o resultado original.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (6)$$

Invertendo a ordem de integração e substituindo as expressões em 2 podemos calcular a integral em relação a variável \mathbf{r}' .

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int d^3r' \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (7)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{q\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \quad (8)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{q\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} \quad (9)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int d^3r' \frac{q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \frac{q\mathbf{v}(t')\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \frac{q\mathbf{v}(t')\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} \quad (12)$$

Podemos notar, então, que a função delta remanescente nas duas expressões, quando a velocidade da partícula é menor que a velocidade da luz, só se anula quando a relação $t' = t - R(t')/c$ é satisfeita. Essa é a expressão para o tempo retardado e com isso podemos utilizar a seguinte identidade da função delta para calcular as integrais.

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad \text{se } f(x_0) = 0 \quad \text{e } f'(x_0) \neq 0 \quad (13)$$

Se tomamos

$$f(t') = t' - t + \frac{R(t')}{c} \quad (14)$$

Temos que a função se anula no tempo retardado e sua derivada é calculada abaixo.

$$g(t') = f'(t') = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \sqrt{\mathbf{R}(\mathbf{t}')^2} \quad (15)$$

$$= 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \sqrt{(r_x - r_{x0}(t'))^2 + (r_y - r_{y0}(t'))^2 + (r_z - r_{z0}(t'))^2} \quad (16)$$

$$= 1 - \frac{(r_x - r_{x0}(t'))r_{x0}'(t') + (r_y - r_{y0}(t'))r_{y0}'(t') + (r_z - r_{z0}(t'))r_{z0}'(t')}{cR(t')} \quad (17)$$

$$= 1 - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{t}')}{R(t')} \cdot \frac{\mathbf{r}'_0(t')}{c} = 1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \quad (18)$$

Denotando $\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{v}(t)/c$ temos

$$g(t') = 1 - \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0 \quad (19)$$

Aplicando a identidade 13 nas expressões 9 e 12 obtemos

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t' - t_{ret})}{g(t')R(t')} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t')\delta(t' - t_{ret})}{g(t')R(t')} \quad (21)$$

Aplicando novamente a identidade 4 obtemos as expressões para os potenciais chamados de Potenciais de Liénard-Wiechert

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g(t_{ret})R(t_{ret})} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{g(t)R(t)} \right]_{t_{ret}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\mathbf{R}(t) - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{R}(t)} \right]_{t_{ret}} \quad (22)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t_{ret})}{g(t_{ret})R(t_{ret})} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}(t)}{g(t)R(t)} \right]_{t_{ret}} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}(t)}{\mathbf{R}(t) - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{R}(t)} \right]_{t_{ret}} \quad (23)$$

O subscrito *ret* indica que as funções dentro dos colchetes devem ser calculadas no tempo retardado.

3 Campos de uma carga pontual em uma trajetória qualquer

Para obter os campos elétrico e magnético podemos prosseguir de maneira semelhante substituindo as expressões 9 e 12 nas Equações de Maxwell.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (24)$$

3.1 Campo Elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dt' \frac{\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t')\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} \quad (25)$$

Primeiramente vamos calcular $\nabla_r R(t)$ e $\nabla_r(1/R(t))$ com respeito ao argumento do campo.

$$\nabla_r R(t) = \nabla_r(\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))^2}) = \nabla_r(\sqrt{(r_x - r_{x0}(t))^2 + (r_y - r_{y0}(t))^2 + (r_z - r_{z0}(t))^2}) \quad (26)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r_x} = \frac{r_x - r_{x0}(t)}{R(t)} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r_y} = \frac{r_y - r_{y0}(t)}{R(t)} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r_z} = \frac{r_z - r_{z0}(t)}{R(t)} \quad (27)$$

$$\nabla_r R(t) = \frac{\mathbf{R}(t)}{R(t)} = \hat{\mathbf{n}}(t) \quad (28)$$

$$\nabla_r \frac{1}{R(t)} = \nabla_r \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))^2}} \right) = \nabla_r \left(\frac{1}{\sqrt{(r_x - r_{x0}(t))^2 + (r_y - r_{y0}(t))^2 + (r_z - r_{z0}(t))^2}} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_x} \frac{1}{R(t)} = -\left(\frac{r_x - r_{x0}(t)}{R(t)^3} \right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r_y} \frac{1}{R(t)} = -\left(\frac{r_y - r_{y0}(t)}{R(t)^3} \right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r_z} \frac{1}{R(t)} = -\left(\frac{r_z - r_{z0}(t)}{R(t)^3} \right) \quad (30)$$

$$\nabla_r \frac{1}{R(t)} = \frac{\mathbf{R}(t)}{R(t)^3} \quad (31)$$

A partir desses resultados podemos então trocar a ordem entre a integral e o operador ∇ na expressão 25 e reescrever o integrando como

$$\nabla \frac{\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} = \frac{R(t')\nabla\delta(t' - t + R(t')/c) - \nabla R(t')\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')^2} \quad (32)$$

$$= \frac{R(t')\left(-\frac{\partial}{\partial t}\delta(t' - t + R(t')/c)\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}\right) - \hat{\mathbf{n}}\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')^2} \quad (33)$$

$$= -\frac{1}{R(t')} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \delta(t' - t + R(t')/c) \right) + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) \right) \quad (34)$$

Reescrevendo as integrais

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{R(t')} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c} \delta(t' - t + R(t')/c) \right) - \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} \quad (35)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R(t')^2} \delta(t' - t + R(t')/c) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \int dt' \delta(t' - t + R(t')/c) \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{R(t')c} - \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}(t')}{R(t')} \right] \quad (36)$$

Usando a mesma técnica da passagem 13 obtemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}}{g(t)R(t)^2} \right]_{ret} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}}{gcR(t)} \right]_{ret} \quad (37)$$

3.2 Campo Magnético

Para calcularmos o campo magnético da partícula, usamos as equações

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (38)$$

e as equações 22 e 23.

Primeiramente notamos que

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}\phi}{c^2} \quad (39)$$

Portanto

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v}\phi) = \frac{1}{c^2} [\phi(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla\phi) \times \mathbf{v}] \quad (40)$$

Avaliamos então cada termo dessa última equação.

O termo $\nabla \times \mathbf{v}$ pode ser calculado diretamente e é igual a $-\mathbf{a} \times \nabla t_{ret}$

Lembrando que $\nabla R = \mathbf{n}$ vemos que

$$\nabla t_{ret} = \nabla \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \nabla R = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \quad (41)$$

O termo $\nabla\phi$ pode ser calculado facilmente recordando que $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{n}}{R^2}$; daí, obtemos:

$$\nabla\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{g(t_r)R(t_r)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{gR^2} \quad (42)$$

Portanto

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} [\phi(\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla\phi) \times \mathbf{v}] = \frac{1}{c^2} [\phi(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla\phi)] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n}}{g(t_r)R(t_r)c} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{g(t_r)R^2(t_r)} \quad (43)$$

Uma vez que $\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}$ e $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$ obtemos finalmente

$$\mathbf{B} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{gR^2} + \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{cgR} \right] \quad (44)$$

3.3 Os campos de Liénard-Wiechert

Nas duas últimas seções achamos os campos elétricos e magnéticos, chamados de campos de Liénard-Wiechert, correspondentes aos potenciais elétricos e magnéticos achados na seção anterior. Esta seção servirá como intermediária. Aqui escreveremos uma forma mais conveniente para trabalhar com os campos elétricos e magnéticos achados anteriormente, antes de escrevermos as distribuições angulares da potência irradiada e de frequências do espectro emitido pela carga acelerada.

Primeiramente lembramos a definição de tempo retardado

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad (45)$$

e também que

$$g(t') = 1 - \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{c} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0 \quad (46)$$

Dado que $\mathbf{R}(t) = R(t)\mathbf{n}$ podemos ver que $\frac{d}{dt}R = -\mathbf{n} \cdot c\boldsymbol{\beta}$ e, portanto

$$\frac{d}{dt_r}t = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})_r = g_r \quad (47)$$

Agora diferenciamos $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ com respeito ao tempo para obtermos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{n} = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{R}}{R} = \left[R\frac{d}{dt}\mathbf{R} - \mathbf{R}\frac{d}{dt}R \right] \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\mathbf{R} + \frac{\mathbf{R}}{R^2}c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\mathbf{R} + \frac{c}{R}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} \quad (48)$$

$$= \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R\mathbf{n}) + \frac{c}{R}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} = \frac{1}{R}\mathbf{n}(-\mathbf{n} \cdot c\boldsymbol{\beta}) + \frac{c}{R}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} = \frac{c}{R} \left[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\boldsymbol{\beta} \right] \quad (49)$$

$$= \frac{c}{R}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \quad (50)$$

Então, usamos esses resultados na equação 47 para obtermos

$$\frac{d}{dt}g = - \left[\frac{d}{dt}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{\beta} \right] \quad (51)$$

Retornamos então à expressão do campo elétrico e usamos a equação 47 para trocarmos derivadas com respeito ao tempo por derivadas com respeito ao tempo retardado, e obtemos a seguinte expressão:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{gR^2} + \frac{1}{cgR} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{n} - \frac{d}{dt}\boldsymbol{\beta} \right) - \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{cg^2R^2} \left(R\frac{d}{dt}g + g\frac{d}{dt}R \right) \right]_{ret} \quad (52)$$

Usando então esses últimos resultados, após alguma manipulação algébrica, encontramos finalmente que o campo elétrico pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{g^3R^2} + \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cg^3R} \right]_{ret} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a \quad (53)$$

Onde decompos o campo elétrico em duas componentes: uma que cai com $\frac{1}{R^2}$ à qual chamamos de componente de velocidade e que é essencialmente um campo estático. A outra componente cai com $\frac{1}{R}$ e é tipicamente um campo de radiação. Conforme o vetor $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ tende à zero o campo de aceleração vai à zero também. Esse campo de radiação tende a se propagar para o infinito.

Se tomarmos a equação para o campo magnético podemos achar após uma manipulação algébrica laboriosa que o campo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \frac{q\mu}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{n})(1 - \beta^2)}{g^3R^2} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}) + g\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{n}}{g^3R} \right]_{ret} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_a \quad (54)$$

aonde novamente o decompos em uma componente de velocidade e uma de aceleração.

4 Distribuição de potência irradiada

Para deduzir a expressão para a potência irradiada vamos calcular vetor de Poynting de uma carga qualquer e em seguida fazer as aproximações para uma órbita circular.

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (55)$$

Aqui nós vamos analisar a potência irradiada pela componente de aceleração do campo, pois é aquela que se propaga à distâncias muito grandes e longe da carga. Temos então, para o vetor de Poynting

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}_a \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) = \frac{1}{\mu_0 c} ((\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a - (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}_a) \quad (56)$$

Sendo \mathbf{n} perpendicular ao campo elétrico, temos que

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \|\mathbf{E}_a\|^2 \mathbf{n} = \epsilon_0 c \|\mathbf{E}_a\|^2 \mathbf{n} \quad (57)$$

aonde deixamos implícito o tempo retardado como subscrito em todas as quantidades calculados nessa seção, a menos que dito o contrário.

O vetor de Poynting determina a taxa com a qual a energia flui através de um ângulo sólido à uma distância qualquer de uma esfera de raio R . Isso significa que a potência instantânea P irradiada nesse ângulo sólido é

$$\frac{d}{d\Omega} P = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \quad (58)$$

Mas

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c g^3 R} \right\|^2 \quad (59)$$

Há dois efeitos presentes aqui: a relação entre $\boldsymbol{\beta}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ que determina a distribuição angular dessa potência irradiada, e o segundo é o efeito relativístico que aparece da transformação entre o referencial de repouso da partícula e o do observador manifesto pela presença do fator $g = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$, sendo esse o efeito dominante sobre toda a distribuição angular para partículas ultrarrelativísticas.

Nessa última equação $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ é a energia por unidade de tempo por unidade de área detectada em um ponto de observação em um tempo t qualquer. Porém tal radiação foi emitida em um tempo anterior $t' = t - \frac{R(t')}{c}$. Calculemos então a energia irradiada durante o intervalo finito $t = T_1$ até $t = T_2$:

$$E = \int_{t=T_1 + \frac{R(T_1)}{c}}^{t=T_2 + \frac{R(T_2)}{c}} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}] dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} dt' \quad (60)$$

onde $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'}$ é a potência irradiada por unidade de área por unidade de tempo em termos do tempo próprio da partícula. Recordamos aqui que $\frac{dt}{dt'} = g$

portanto

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} g = \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\left\| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\|^2}{g^5} \quad (61)$$

essa equação está completamente escrita em termos do tempo de emissão que consideramos como o tempo próprio da partícula.

Vamos, para finalizar esta seção, realizar um cálculo um pouco trabalhoso, aonde omitiremos alguns passos para evitar excesso de contas, achar a distribuição de potência irradiada e a potência total emitida no regime relativístico de uma partícula emitido radiação síncrotron.

Começamos por tomar um sistema de coordenadas no qual a partícula realiza um movimento circular, com aceleração centrípeta e velocidade tangencial à um caminho circular. Definimos os seguintes vetores, de acordo com o sistema de coordenadas da figura abaixo

zz

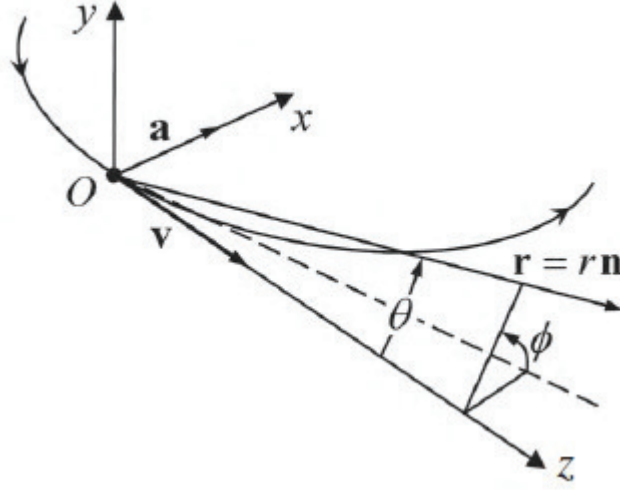


Figura 2: Trajetória circular de uma partícula no plano x-z

aonde vemos que $\hat{\mathbf{R}} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\mathbf{z}}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\hat{\mathbf{x}}$.

A potência irradiada por ângulo sólido é

$$\frac{d}{d\Omega}P = \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\|\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\|^2}{(1 - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})} \quad (62)$$

Calcularemos então cada parte dessa equação. Começamos pelo termo

$$(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dot{\beta}\sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\mathbf{z}} + \dot{\beta}(\cos(\theta) - \beta)\hat{\mathbf{y}} \quad (63)$$

de forma que

$$\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = \dot{\beta}\sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \dot{\beta}\sin(\theta)\cos(\phi)(\cos(\theta) - \beta)\hat{\mathbf{z}} - \dot{\beta}(\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \cos^2(\theta) - \beta\cos(\theta))\hat{\mathbf{x}} \quad (64)$$

$$= \dot{\beta}[\sin^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \sin(\theta)\cos(\phi)(\cos(\theta) - \beta)\hat{\mathbf{z}} + (\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - (1 - \beta\cos(\theta)))\hat{\mathbf{z}}] \quad (65)$$

Disso vem que

$$\|\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\|^2 = \dot{\beta}^2[\sin^4(\theta)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)(\cos(\theta) - \beta)^2 + (\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - (1 - \beta\cos(\theta)))^2] \quad (66)$$

$$= \dot{\beta}^2[(1 - \beta\cos(\theta))^2 - \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)(1 - \beta^2)] \quad (67)$$

por fim, $1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta\cos(\theta)$ e, portanto

$$\frac{d}{d\Omega}P = \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\dot{\beta}^2[(1 - \beta\cos(\theta))^2 - (1 - \beta^2)\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)]}{(1 - \beta\cos(\theta))^5} \quad (68)$$

$$\frac{d}{d\Omega}P = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos(\theta))^3} \left[1 - \frac{\sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{\gamma^2(1 - \beta \cos(\theta))^2} \right] \quad (69)$$

O regime síncrotron é aquele para o qual $\gamma \gg 1$, ou regime ultrarrelativístico. Na equação acima obtemos, lembrando que estamos calculando para velocidade perpendicular à aceleração:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{c^3} \left[\frac{1}{(1 - (1 - \frac{x^2}{2})(1 - \frac{\theta^2}{2}))^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2(\phi)}{(1 - (1 - \frac{x^2}{2})(1 - \frac{\theta^2}{2}))^5} \right] \quad (70)$$

aonde fizemos a aproximação $\beta = \sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, definindo $x = \gamma^{-1}$ e as aproximações de $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ para ângulos muito pequenos.

Daí vem que:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{c^3} \left[\frac{1}{(\frac{x^2}{2} + \frac{\theta^2}{2})^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2(\phi)}{(\frac{x^2}{2} + \frac{\theta^2}{2})^5} \right] \quad (71)$$

reescrevendo $\gamma^{-1} = x$ achamos que:

$$\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{c^3} \left[\frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2\theta^2)^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{32\gamma^1\theta^2 \cos^2(\phi)}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} \right] \quad (72)$$

e, portanto

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{\|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{c^3} \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2\theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2 \cos^2(\phi)}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} \right] \quad (73)$$

O integral dessa equação sobre todos os ângulos é a potência total irradiada e vale:

$$P = \frac{q^2 \|\dot{\mathbf{v}}\|^2 \gamma^4}{6\pi c^3 \epsilon_0} \quad (74)$$

Se escrevermos essa expressão em termos da força externa aplicada (uma força centrípeta) sobre a carga q para mantê-la em órbita circular, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma\dot{\boldsymbol{\beta}}$, obteremos:

$$P = \frac{q^2}{6\pi c^3 \epsilon_0 m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \gamma^2 \quad (75)$$

Este fator γ^2 é a única diferença entre a potência total irradiada caso a carga tenha sido acelerada linearmente, o que mostra que para uma mesma força externa aplicada a fim de acelerar a carga, a potência irradiada por radiação síncrotron é consideravelmente maior, o que nos revela uma das vantagens de se usar esse tipo de radiação em experimentos.

5 Distribuição de frequências do espectro emitido

Apresentamos nesta seção o último resultado importante para esse trabalho, a saber: a distribuição de frequências e o espectro emitido pela radiação síncrotron. O que vamos calcular é a distribuição de frequências de uma passagem da luz pelo ponto observado. Os cálculos são excessivamente laboriosos e omitiremos algumas passagens com a finalidade de não sobrecarregar as páginas seguintes com inúmeras contas.

Para o cálculo vamos partir de

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (76)$$

em que

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{1}{\mu_0 c} \right)^{1/2} [\mathbf{E}_a R]_{ret} \quad (77)$$

Este \mathbf{E}_a é o campo calculado na eq 53, com o argumento do tempo retardado, ou do observador pois desejamos entender a radiação incidente nele.

A energia emitida por unidade de ângulo sólido é obtida integrando a expressão anterior no tempo

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt \quad (78)$$

Usando a transformada de Fourier podemos converter a integral temporal em uma integral sobre frequências

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (79)$$

em que a transformação inversa é

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (80)$$

Com isso podemos reescrever a eq 78 da seguinte forma

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \overline{\mathbf{A}(\omega')} \cdot \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \quad (81)$$

Trocando a ordem de integração podemos notar que a integral no tempo é a transformada de Fourier da função delta $\delta(\omega' - \omega)$. Invertendo a ordem de integração e fazendo a integral em ω' obtemos

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (82)$$

Podemos então definir a energia irradiada por unidade de frequência e ângulo sólido.

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I(\omega, \mathbf{n})}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (83)$$

Para calcularmos a distribuição devemos reescrever a equação 83 de forma que seu integrando coincida com o da expressão acima, para isso devemos fazer algumas manipulações.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (84)$$

Fazendo a mudança $-\omega \rightarrow \omega$ no primeiro termo

$$\int_{-\infty}^0 |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega = - \int_{\infty}^0 |\mathbf{A}(-\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (85)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(-\omega)|^2 + |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (86)$$

Dado que \mathbf{A} é real podemos utilizar as propriedades da transformada de Fourier para mostrar que

$$\mathbf{A}(-\omega) = \overline{\mathbf{A}(\omega)} \quad (87)$$

Igualando ao integrando da expressão 83 obtemos

$$\frac{d^2 I(\omega, \mathbf{n})}{d\omega d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \quad (88)$$

Dessa forma basta calcular a transformada de Fourier da função \mathbf{A} para determinar a distribuição de frequências.

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c}} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] e^{i\omega t} dt \quad (89)$$

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] e^{i\omega t} dt \quad (90)$$

Note que todo o termo entre colchetes (campo \mathbf{E} original) é calculado no tempo retardado, vamos realizar uma mudança de variáveis para calcular toda a integral no tempo retardado.

$$t = t_{ret} + \frac{R)t_{ret}}{c} \quad (91)$$

Dessa forma

$$\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (92)$$

Substituindo na integral

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3\mu_0\epsilon_0^2c^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] e^{i\omega(t_{ret} + \frac{R(t_{ret})}{c})} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt \quad (93)$$

Dado que o ponto de observação está longe da região de aceleração o vetor \mathbf{n} é praticamente constante, assim podemos aproximar $R(t_{ret})$ por

$$R(t_{ret}) = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret}) \quad (94)$$

A integral fica então

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3\mu_0\epsilon_0^2c^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right] e^{i\omega(t_{ret} - \frac{r_0(t_{ret})}{c})} \quad (95)$$

O termo $e^{i\omega r}$ pode ser ignorado sem problemas porque ele representa uma fase e será eliminado o tomar o módulo da expressão.

Podemos ver que a expressão acima descreve perfeitamente a função \mathbf{A} uma vez que se conhece a trajetória da partícula, e dessa forma podemos obter $\boldsymbol{\beta}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Porém uma expressão mais simples pode ser deduzida realizando uma integração por partes.

No integrando da expressão 95 excluindo a parte exponencial podemos mostrar que

$$\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right] \quad (96)$$

A conta dessa propriedade é bastante direta, considerando o versor como constante e utiliza-se da propriedade de produto triplo vetorial e regra do quociente para derivadas, porém é desgastante e não consideramos necessária incluir aqui.

Substituindo a integral na expressão para o módulo e realizando a integral por partes

$$\frac{d^2 I(\omega, \mathbf{n})}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0^2c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_{ret} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret})}{c})} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} i\omega(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) e^{i\omega(t_{ret} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret})}{c})} dt_{ret} \Big|^2 \quad (97)$$

Fazendo a hipótese razoável de que o termo entre colchetes se anula chegamos na expressão final para a distribuição de frequências.

$$\frac{d^2 I(\omega, \mathbf{n})}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0^2c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) e^{i\omega(t_{ret} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret})}{c})} dt_{ret} \right|^2 \quad (98)$$

5.1 Distribuição de frequência para a órbita circular

Agora que calculamos a expressão geral para a distribuição de frequência podemos substituir as aproximações feitas para a órbita circular. Como visto anteriormente a abertura angular do feixe para um ponto qualquer de observação é muito pequeno, dessa forma basta conhecer um trecho pequeno da trajetória para descrever corretamente a radiação que chega no observador.

Para essa seção vamos adotar as convenções esquematizadas na figura abaixo.

Notemos que o trecho de arco de circunferência está no plano xz e o versor $\hat{R} = \mathbf{n} = \mathbf{e}_{\perp 1}$ está no plano yz . Quando $\theta \rightarrow 0$, $\hat{R} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}$. O versor que está no plano da órbita é $\mathbf{e}_{\parallel} = \hat{\mathbf{i}}$ que coincide com um outro versor de relevância $\mathbf{e}_{\perp 2} = \hat{R} \times \mathbf{e}_{\parallel}$. Quando $\theta \rightarrow 0$, $\mathbf{e}_{\perp 2} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}$, e ele se orienta perpendicularmente ao plano da órbita, indicando a componente de polarização perpendicular ao plano da órbita. Novamente como o intervalo de tempo é bem curto podemos aproximar $\delta = \frac{v t_{ret}}{b}$. Com essas definições podemos notar que a parte vetorial da integral do espectro pode ser escrita como

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \boldsymbol{\beta}) = -\beta \sin(\delta) \mathbf{e}_{\parallel} + \beta \sin(\theta) \cos(\delta) \mathbf{e}_{\perp 2} \quad (99)$$

A expressão que separa o versor de observação em duas partes, uma corresponde a polarização no plano da órbita a outra perpendicular ao plano da órbita (para θ pequeno).

Com isso o argumento da exponencial fica

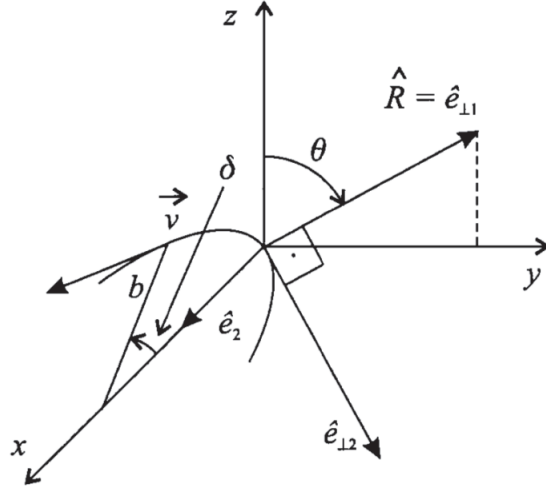


Figura 3: Desenho esquemático das convenções de vetores e versores do problema.

$$\omega(t_{ret} - \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret})}{c} = \omega(t_{ret} - \frac{b}{c} \cos\theta \sin\delta) \quad (100)$$

Estamos interessados nos limites em que $\beta \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow 0$ em intervalos tempo pequenos, próximos de $t_{ret} = 0$. Com isso as duas expressões acima ficam

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \beta) = -\frac{ct_{ret}}{b} \mathbf{e}_{\parallel} + \theta \mathbf{e}_{\perp 2} \quad (101)$$

$$\omega(t_{ret} - \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}_0(t_{ret})}{c} = \frac{\omega}{2} \left(t_{ret} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 t_{ret}^3}{3b^2} \right) \quad (102)$$

Substituindo os termos acima na integral em questão a distribuição final

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| -\mathbf{e}_{\parallel} \frac{c}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left[\frac{i\omega}{2} \left(t_{ret} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 t_{ret}^3}{3b^2} \right) \right] dt_{ret} \right. \\ \left. + \theta \mathbf{e}_{\perp 2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left[\frac{i\omega}{2} \left(t_{ret} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 t_{ret}^3}{3b^2} \right) \right] dt_{ret} \right|^2 \quad (103)$$

Para simplificar podemos definir as funções

$$\alpha_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left[\frac{i\omega}{2} \left(t_{ret} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 t_{ret}^3}{3b^2} \right) \right] dt_{ret} \quad (104)$$

$$\alpha_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp} \left[\frac{i\omega}{2} \left(t_{ret} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 t_{ret}^3}{3b^2} \right) \right] dt_{ret} \quad (105)$$

De forma que

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| -\mathbf{e}_{\parallel} \alpha_{\parallel}(\omega) + \mathbf{e}_{\perp 2} \alpha_{\perp}(\omega) \right|^2 \quad (106)$$

Definindo o parâmetro ξ

$$\xi = \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2} \quad (107)$$

E fazendo a mudança de variável

$$t_{ret} = \frac{b\tau}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \quad (108)$$

Podemos reescrever as funções α como

$$\alpha_{\parallel}(\omega) = \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp \left[i \frac{3\xi}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau \quad (109)$$

$$\alpha_{\perp}(\omega) = \theta \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{3\xi}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau \quad (110)$$

As integrais acima são conhecidas como integrais "Airy" e podem ser escritas em termo das funções de Bessel modificadas:

$$\int_0^{\infty} \tau \sin \left(\frac{3\xi}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} = K_{2/3}(\xi) \quad (111)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \left(\frac{3\xi}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} = K_{1/3}(\xi) \quad (112)$$

A partir dessas definições a forma final para a distribuição de frequências é

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 \omega^2 b^2}{12\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{1/\gamma^2 + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (113)$$

para um único pulso de radiação.

Por fim, o último resultado importante: a integração da expressão anterior sobre todos os ângulos dá a expressão para todo o espectro de frequências de radiação síncrotron. O resultado é:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3}q^2\gamma}{c} \frac{w}{w_c} \int_{\frac{w}{w_c}}^{\infty} d\xi K_{5/3}(\xi) \quad (114)$$

com $w_c = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_0$ sendo $\omega_0 = \frac{c}{b}$ a frequência fundamental do sistema e w_c a frequência crítica acima da qual a radiação é negligível.

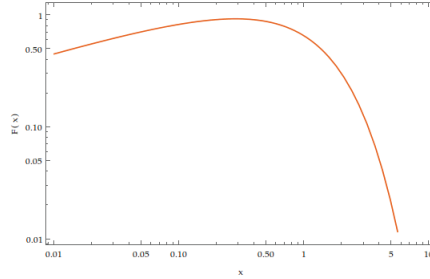


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = x \int_x^{\infty} d\xi K_{5/3}(\xi)$

6 Pequeno comentário sobre energia

Da equação 74 supondo o raio da órbita circular da partícula como sendo b e com período de revolução $T = \frac{2\pi b}{v} = \frac{2\pi b}{c\beta}$, temos que a energia por radiação é

$$\Delta E = PT = \frac{q^2 \gamma^4 \|\dot{\mathbf{v}}\|^2}{6c^3 \pi \epsilon_0} \frac{2\pi b}{c\beta} = \frac{q^2 \gamma^4}{3b\epsilon_0} \beta^3 \quad (115)$$

que em termos da energia relativística do elétron $E = \gamma m_e c^2$ pode ser escrita como

$$\Delta E = \frac{q^2 \beta^3}{3\epsilon_0 (m_e c^2)^4} \frac{E^4}{b} \quad (116)$$

Para regimes ultrarrelativísticos, como é o caso da radiação síncrotron, em que $\beta \gg 1$ como no LNLS, temos que:

$$\Delta E(\text{MeV}) = 8,85 \times 10^{-2} \frac{E^4(\text{GeV})}{b(\text{m})} \quad (117)$$

para o LNLS a energia do anel é de 1,37 GeV com campos magnéticos de 1T, diâmetro do anel de 29,7m e corrente máxima de 250mA, a perda de energia sendo da ordem de $\Delta E = 114 \text{KeV}$.

7 Estudo da estrutura de Ribossomos

Toda a informação vital de sistemas vivos é codificada na estrutura denominada DNA (Ácido dioxirribonucleico), ele contém a sequência de nucleotídeos que compõe a sequência de proteínas que constituem as estruturas básicas para o funcionamento de cada organismo. A informação do DNA se torna disponível pela transcrição dos genes para o mRNA (Ácido ribonucleico mensageiro) que em seguida é traduzida em várias sequencia de aminoácidos que compõe as proteínas necessárias.

O processo de tradução consiste em mapear uma sequência de códons em seus respectivos aminoácidos, em que cada códon é uma sequência de 3 ribonucleotídeos que podem possuir uma de quatro bases possíveis: A (adenina), C (citosina), G (guanina) e U (uracila). O ribossomo é a estrutura responsável por identificar o aminoácido correto com a respectiva tripla a ser codificada.

7.1 Estrutura do ribossomo

Um ribossomo bacterial é basicamente constituído por duas subunidades, uma menor com uma massa de aproximadamente 800.000 Da, e uma maior com uma massa de 1.500.000, as respectivas velocidades de sedimentação são 30S e 50S, em que S é a unidade Svedberg.

Um dos grandes desafios que foram vencidos para que o Nobel de Química de 2009 fosse possível foi desenvolver um cristal das subunidades do ribossomo que permitisse a difração de alta resolução (3 Å ou menos). As subunidades do ribossomo, não só são grandes, como também não possuem nenhuma simetria particular dificultando a criação de uma rede regular. Em 1980 era uma grande dúvida se era possível encontrar tais cristais, nos anos seguintes vários trabalhos conseguiram isolar cristais de ambas as subunidades porém só permitindo difração com resoluções de 10Å. Somente em 1991 que o primeiro trabalho surgiu mostrando síntese de um cristal da subunidade maior (50S) que podia difratar a uma resolução de 3Å.

Ribossomos de eucariontes são muito mais complexos que ribossomos procariontes porém seus funcionamentos são análogos e seguem os mesmos princípios.

7.2 Difração de Raios-x

A técnica utilizada para estudar a estrutura dos ribossomos é a difração de raios-x, em que, raios-x incidem em um cristal com um ângulo θ e é possível recuperar dos espectro refratado o parâmetro de rede relacionado com as distâncias inter-planares. Repetindo esse procedimento para várias orientações do material pode-se reconstruir a estrutura original. A equação que descreve o efeito de difração para cristais é dado pela lei de Bragg.

$$2d\sin(\theta) = n\lambda \Rightarrow d = \frac{n\lambda}{2\sin(\theta)} \quad (118)$$

A radiação sincrotron é o tipo de radiação que torna esse experimento possível, raios-x podem ser produzidos através por tubos de raio-x convencionais, através do efeito Bremsstrahlung contra molibdênio, o que limita o uso da radiação produzida por esse método é que sua intensidade é muito baixa e medidas de qualidade exigem muito tempo para serem construídas. Como demonstramos na seção 4 o feixe de radiação produzido no regime ultra-relativístico é super concentrado na região a frente da partícula, com isso as medidas ficam muito mais rápidas de serem feitas.

7.3 A subunidade do ribossomo (50S)

Sendo possível criar as subunidades do ribossomo 50S e com os espectro produzido pelas luz síncrotron as imagens abaixo puderam ser produzidas, elas mostram a evolução da técnica até o resultado de 2000 que foi o escolhido para o Nobel de 2009.

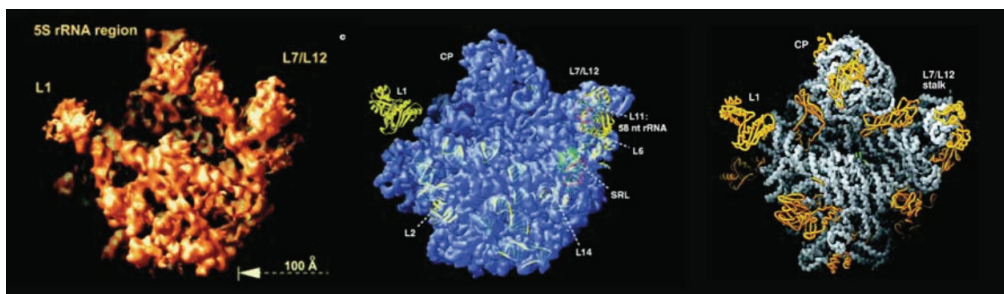


Figura 5: Figura da subunidade 50S em alta resolução. A primeira imagem corresponde a resolução de 9Å(1998), a segunda 5Å (1999) e a terceira 2.4Å (2000)

A partir dessas imagens foi possível identificar qual molécula ou qual sequência peptídica que os antibióticos mais comuns se ligam para neutralizar bactérias. A imagem abaixo mostra a localização e a forma dessa estrutura.

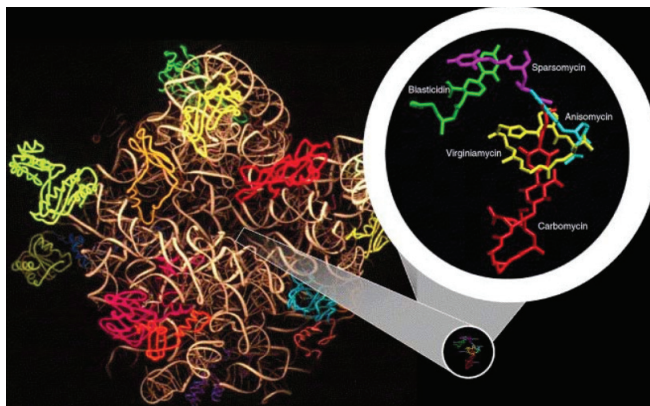


Figura 6: Figura da enzima "peptidyl-transferase" no centro da subunidade 50S que é o alvo do antibióticos mais comuns, agora evidenciada pelas imagens em alta resolução.

Podemos ver que o método de difração de raios-x pode ser utilizado para estudar várias estruturas microscópicas de forma nunca antes vista, projetos como caracterização da estrutura do Zika virus, aumento da mobilidade de portadores de carga em transistores orgânicos e estudos de alternativas às gorduras trans são exemplos de projetos desenvolvidos no LNLS que demonstram o potencial dessa técnica.

Referências

- [1] Charles A Brau. *Modern problems in classical electrodynamics*. Oxford university press Oxford, 2004.
- [2] Josif Frenkel. *Princípios de eletrodinâmica clássica*. Edusp, 1996.
- [3] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*, 2005.
- [4] Nobel Media. *The nobel prize in chemistry 2009*, 2009.
- [5] Julian Schwinger, Lester L DeRaad Jr, Kimball Milton, and Wu-yang Tsai. *Classical electrodynamics*. Westview Press, 1998.
- [6] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.

Para um estudo sobre pigmentação de pinturas utilizando radiação síncrotron, acesse <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25111111>
<http://lnls.cnpem.br/>