

Guilherme Ruiz

Professor: Raul Abramo

19 de junho de 2017

# A formulação Lagrangiana da eletrodinâmica relativística

## Um prelúdio à eletrodinâmica quântica

Neste trabalho iremos explorar a formulação Lagrangiana da eletrodinâmica relativística e verificar propriedades fundamentais como as invariâncias de Lorentz e Gauge. Iremos começar obtendo a Lagrangiana para o eletromagnetismo utilizando os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  e os potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$ . A partir desta Lagrangiana iremos obter a Lagrangiana na formulação covariante da eletrodinâmica relativística e passar a trabalhar com a quantização dos campos.

### 1. Formulação Lagrangiana da eletrodinâmica

Antes de obtermos a Lagrangiana para os campos eletromagnéticos, primeiro vamos recordar alguns conceitos importantes da mecânica Lagrangiana. Seja um sistema mecânico descrito por um conjunto de coordenadas e velocidades generalizadas:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t) \quad \text{e} \quad \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t) \quad (1.1)$$

A mecânica clássica estabelece que uma função escalar  $L[q_k(t), \dot{q}_k(t)]$  denominada Lagrangiana determina o comportamento dinâmico das coordenadas generalizadas através da célebre equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (1.2)$$

Devemos notar, entretanto, que a Lagrangiana não é univocamente definida. Por exemplo, seja  $\Lambda[q_m(t), t]$  uma função escalar do tempo e das coordenadas generalizadas. A Lagrangiana  $L[q_m(t), \dot{q}_m(t)]$  produz exatamente a mesma dinâmica que a Lagrangiana

$$L[q_m(t), \dot{q}_m(t)] + \frac{d\Lambda[q_m(t), t]}{dt} \quad (1.3)$$

uma vez que a derivada total não altera a equação de Euler-Lagrange.

Será útil também definir um conjunto de momentos canônicos conjugados,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.4)$$

de forma a podermos escrever a equação 1.2 como

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (1.5)$$

Esta equação nos mostra que o momento canônico é uma constante do movimento se a Lagrangiana não depende explicitamente da correspondente coordenada generalizada.

Outra definição que nos será útil é a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  a qual se define como

$$L = \int \mathcal{L} d^3x \quad (1.6)$$

Com estes conceitos em mente iremos agora partir para a obtenção da Lagrangiana para os campos e potenciais eletromagnéticos.

### A. Formulação não covariante

Para obter a Lagrangiana para os campos eletromagnéticos na formulação não covariante começaremos trabalhando em cima da equação da força de Lorentz

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (1.7)$$

onde  $e$  é a carga elétrica. Mais precisamente, manipularemos a equação 1.7 até escreve-la na forma da equação 1.2. Como a equação 1.2 terá um gradiente no lado direito da igualdade, parece uma boa ideia escrever a equação 1.7 em termos dos potenciais  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ .

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.8)$$

A velocidade  $\mathbf{v}(t)$  não é função da posição, portanto, utilizando a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (1.9)$$

a equação 1.7 se transforma em

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left[ \nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \quad (1.10)$$

Devemos lembrar agora que podemos escrever

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \quad (1.11)$$

onde  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Substituindo 1.11 em 1.10, obtemos

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) = e \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \varphi) \quad (1.12)$$

Por fim, se compararmos a equação 1.12 com a equação 1.2, percebemos que

$$L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}mv^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e\varphi(\mathbf{r}, t) \quad (1.13)$$

Mas podemos ir além e obter esta Lagrangiana em função dos campos eletromagnéticos e verificar que esta é a soma de duas Lagrangianas. Primeiramente devemos procurar a Lagrangiana que resulta na Lagrangiana da equação 1.13 quando utilizamos as definições para a densidade de carga e de corrente

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_k e_k \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)] \quad \text{e} \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_k e_k \mathbf{v}_k \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)] \quad (1.14)$$

Ora, é evidente que, utilizando 1.14, obtemos

$$\int d^3r (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho \varphi) = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - e \varphi \quad (1.15)$$

A Lagrangiana da equação 1.13 pode ser escrita portanto como

$$L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m v^2 + \int d^3r (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho \varphi) \quad (1.16)$$

que é a soma de uma Lagrangiana para a partícula não relativística que sente os campos e a Lagrangiana de interação entre a partícula e os campos. Para uma partícula relativística, não é difícil de ver que basta substituímos o termo  $\frac{1}{2} m v^2$  por  $-\frac{m c^2}{\gamma}$ , onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  e

obteremos a equação de movimento

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} [m\gamma \mathbf{v}] = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.17)$$

uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( -m c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) = \frac{m v}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m v}{c^2 \gamma} \quad (1.18)$$

Mas, e quanto a Lagrangiana dos campos livres? Não iremos derivar a Lagrangiana para os campos livres uma vez que não há um método direto de fazê-lo. Na realidade, o que se faz é supor uma Lagrangiana e verificar se esta satisfaz as equações desejadas. Desta forma iremos apenas afirmar que a Lagrangiana para campos eletromagnéticos livres é dada por

$$L_f = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \int d^3r \mathcal{L}_f \quad (1.19)$$

Antes de provarmos que esta Lagrangiana satisfaz as equações de Maxwell, precisamos generalizar as equações de Euler-Lagrange (1.2) para campos. Isto se deve pelo fato da Lagrangiana nos dar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  e  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  como possíveis coordenadas generalizadas e estas são funções do tempo e do espaço (o que é esperado de um objeto relativístico). Para realizar esta generalização, devemos derivar as equações de Euler-Lagrange para uma ação que inclui derivadas espaciais além das derivadas temporais:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}[q_k(\mathbf{r}, t), \dot{q}_k(\mathbf{k}, t), \partial_i q_k(\mathbf{r}, t)] \quad (1.20)$$

Para este fim que definimos a densidade Lagrangiana. Com esta ação, obtemos sem demonstração que as equações de Euler-Lagrange generalizadas são:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q_k)} \quad (1.21)$$

Onde  $\partial_i = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Para obter as equações de Maxwell agora utilizaremos a densidade Lagrangiana da equação 1.19 e o termo de interação entre partícula e os campos da equação 1.16, de forma a termos uma densidade Lagrangiana resultante dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{pf} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho \varphi) \quad (1.22)$$

Escrevendo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em termos dos potenciais através das equações 1.8 obtemos

$$\mathcal{L} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho \varphi) + \frac{1}{2} \epsilon_0 [(\nabla \varphi + \partial \mathbf{A} / \partial t)^2 - c^2 (\nabla \times \mathbf{A})^2] \quad (1.23)$$

Agora utilizando a equação 1.21 nesta densidade Lagrangiana para  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  obtemos:

$$0 = -\rho + \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.24)$$

que é exatamente a lei de Gauss! Se utilizarmos a equação 1.21 para  $\mathbf{A}$ , lembrando que  $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ , obtemos:

$$0 = \mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.25)$$

Esta é exatamente a lei de Ampère! Já as outras duas equações estão automaticamente satisfeitas, uma vez que fizemos uso destas na definição dos potenciais nas equações 1.8. Com isso provamos que a densidade Lagrangiana para campos eletromagnéticos dada pela equação 1.22 nos fornece equações de Maxwell!

Por fim, antes de passarmos para a formulação covariante do formalismo Lagrangiano, vamos explorar a lei de conservação de carga que esta densidade Lagrangiana nos impõe. Esta lei de conservação é uma consequência direta da invariância de Gauge. Para vermos isso, considere a Lagrangiana de uma partícula relativística em um campo eletromagnético

$$L_0 = -\frac{mc^2}{\gamma} + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e \varphi \quad (1.26)$$

Se  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  é uma função escalar arbitrária, realizar as mudanças  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$  e  $\varphi' = \varphi - \partial \Lambda / \partial t$  transforma, utilizando 1.11, a Lagrangiana  $L_0$  em

$$L'_0 = L_0 + e \left( \mathbf{v} \cdot \nabla \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = L_0 + e \frac{d\Lambda}{dt} \quad (1.27)$$

Por outro lado, sabemos por 1.3 que ambas as Lagrangianas resultam nas mesmas equações de Euler-Lagrange. Isso confirma que a força de Lorentz só depende dos campos e não dos potenciais eletromagnéticos, como já esperávamos. Agora, se partirmos do principio da mínima ação, a invariância de Gauge das equações de Euler Lagrange implica que a variação

da ação ( $\delta S$ ) é nula quando tomamos a mudança de Gauge como uma variação. Ou seja, se  $\Lambda$  é uma mudança de Gauge infinitesimal, a equação 1.27 nos diz que a variação na ação resultante é

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k e_k \left[ \mathbf{v}_k \cdot \nabla [\Lambda(\mathbf{r}_k, t)] + \frac{\partial [\Lambda(\mathbf{r}_k, t)]}{\partial t} \right] \quad (1.28)$$

Utilizando as equações 1.14 para densidades de carga e corrente, podemos reescrever a equação 1.28 como

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \mathbf{j} \cdot \nabla (\Lambda) + \rho \frac{\partial (\Lambda)}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.29)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \nabla \cdot (\mathbf{j}\Lambda) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho\Lambda) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Lambda = 0 \quad (1.30)$$

O primeiro termo se anula pois  $\delta q_k(\mathbf{r}, t_1) = \delta q_k(\mathbf{r}, t_2) = 0$  por definição, enquanto o segundo termo só é nulo se o integrando o for. Desta forma obtemos a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.31)$$

Com isso provamos através da invariância de Gauge a conservação de carga. Note que a inclusão do termo de campos livres na Lagrangiana não teria mudado o resultado, pois este só depende dos campos e a mudança de Gauge é realizada nos potenciais.

## B. Formulação covariante

A mudança para a formulação covariante é deveras simples. Basta definirmos novos objetos com os quais trabalharemos e substituí-los nos resultados que obtivemos no formalismo não covariante.

Primeiramente definimos os quadrivetores de corrente e de potencial:

$$J^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \mathbf{j}) \quad \text{e} \quad A^\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z \right) = (A_0, \mathbf{A}) \quad (1.32)$$

Através destes quadrimotores obtemos o tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Onde  $\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$  é o quadrigradiente e a métrica adotada é a tempo-positiva  $\eta_{aa} = (1, -1, -1, -1)$ .

Podemos agora escrever a densidade Lagrangiana da equação 1.21 em função do tensor eletromagnético e dos quadrivetores. Através de um calculo direto obtemos

$$\frac{\epsilon_0}{2}E^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2 = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Além do mais,  $-\rho\varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$  nada mais é que  $-j^\mu A_\mu$ , de forma que a densidade Lagrangiana da equação 1.21 resulta na expressão

$$\mathcal{L} = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} \quad (1.35)$$

Embora tenhamos apenas reescrito os resultados já obtidos utilizando um novo formalismo, esta notação deixa claro que o eletromagnetismo clássico é uma teoria Lorentz invariante por essência! Todos os índices estão contraídos., de forma que não há mudança nessa expressão se mudarmos de referencial.

Agora que obtivemos o formalismo Lagrangiano para a eletrodinâmica relativística, vamos explorar sua aplicação na quantização dos campos eletromagnéticos que é o passo inicial para o desenvolvimento da eletrodinâmica quântica.

## 2. Quantização dos campos eletromagnéticos

Utilizaremos nesta seção a densidade Lagrangiana para campos eletromagnéticos na ausência de fontes, dada pela equação 1.34 e passaremos a trabalhar com unidades naturais por conveniência, utilizando o formalismo canônico para a quantização e o sistema de coordenadas incluirá a coordenada temporal.

Os vetores  $A_\mu$  possuem 4 componentes, o que ingenuamente parece nos dizer que o campo tem 4 graus de liberdade. Entretanto, o photos tem apenas dois graus de liberdade, os quais chamamos de estados de polarização. Para resolver esta discrepância devemos fazer duas considerações que garantirão que a quantização dos potenciais  $A_\mu$ , que no ponto de vista matemático também são campos, resultará em 2 graus de liberdade:

- Não há derivadas do campo  $A_0$  na Lagrangiana, de forma que este campo não é dinâmico. Isso implica que dados  $A_i$  e  $\dot{A}_i$  em um momento  $t_0$ , o campo  $A_0$  está completamente determinado pela lei de Gauss ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ), que em termos dos potenciais é escrita como

$$\nabla^2 A_0 + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

A equação tem como solução

$$A_0(\mathbf{r}) = \int d^3x' \frac{(\nabla \cdot \partial \mathbf{A} / \partial t)(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.2)$$

Portanto  $A_0$  não é um campo independente! Reduzimos agora nossos graus de liberdade para 3, mas ainda devemos reduzir para 2.

- A Lagrangiana 1.34 tem um grande grupo de simetria, atuando no potencial vetor como

$$A_\mu(\mathbf{r}) \rightarrow A_\mu(\mathbf{r}) + \partial_\mu \Lambda(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

para uma função arbitrária  $\Lambda(\mathbf{r})$ . Isto é a chamada simetria de Gauge que já estudamos na seção anterior. Simetria de Gauge tem uma interpretação diferente de simetrias globais, de forma que esta simetria não implica em infinitas leis de conservação, pelo contrário, a simetria de Gauge deve ser compreendida como uma redundância na teoria. Isto é, 2 estados relacionados por uma transformação de Gauge são, em geral (há excessões que não discutiremos), o mesmo estado. Há muitas opções diferentes de transformações de Gauge que podemos escolher. Algumas tem maior utilidade em determinadas situações, de forma que a escolha de um Gauge é como a escolha de coordenadas para um problema.

A seguir quantizaremos a teoria de Maxwell livre de fontes de duas formas: no Gauge de Coulomb e de Lorentz. No final chegaremos aos mesmos resultados mas veremos que cada método tem suas próprias sutilezas.

A primeira dessas sutilezas é comum para ambos os métodos e aparece ao calcular os momentos conjugados a  $A_\mu$ , através da equação 1.4. Para não confundir os momentos canônicos conjugados com os momentos cinemáticos, chamaremos estes momentos de  $\Pi^\mu$ .

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad \text{e} \quad \Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -F^{0i} \equiv E^i \quad (2.4)$$

O momento canônico conjugado a  $A_0$  é nulo. Esta é a consequência matemática de  $A_0$  ser estático, enquanto o momento conjugado a  $A_i$  é o campo elétrico. Com isso podemos calcular a Hamiltoniana deste sistema:

$$H = \int d^3x \Pi^i \dot{A}_i - L = \int d^3x \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 - A_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (2.5)$$

Desta forma  $A_0$  age como um multiplicador de Lagrange que impõe a lei de Gauss ao sistema descrito pelos graus de liberdade  $\mathbf{A}$ . Vamos agora ver como tratar este sistema com diferentes escolhas de Gauge.

### A. Gauge de Coulomb

O Gauge de Coulomb é  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , de forma que sua equação de movimento, obtida pelas equações de Maxwell livres de fontes, é:

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{A} = 0 \quad (2.6)$$

Esta equação é resolvida da forma usual por transformada de Fourier:

$$\mathbf{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.7)$$

A restrição da imposta pela lei de Gauss implica que  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p} = 0$ , o que significa que  $\boldsymbol{\xi}$  é perpendicular a  $\mathbf{p}$ . Podemos escolher  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$  como sendo uma combinação linear dos dois vetores ortonormais  $\boldsymbol{\epsilon}_r, r = 1, 2$ . Estes dois vetores correspondem aos dois estados de polarização do Fóton.

Para a quantização agora tomamos os colchetes de Poisson como comutadores.

$$[f, g]_P = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial \Pi_i} - \frac{\partial f}{\partial \Pi_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \quad (2.8)$$

Nossa primeira tentativa seria escrever

$$[A_i(\mathbf{r}), A_j(\mathbf{r}')]_P = [E^i(\mathbf{r}), E^j(\mathbf{r}')]_P = 0 \quad \text{e} \quad [A_i(\mathbf{r}), E^j(\mathbf{r}')]_P = i \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.9)$$

Entretanto isto não pode estar correto, pois não é consistente com as restrições. Ainda queremos ter  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , agora imposto aos operadores, mas pelas relações de comutação acima vemos que  $[A_i(\mathbf{r}), E^j(\mathbf{r}')] = i \nabla^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \neq 0$ . Nossa primeira tentativa não levou em conta as restrições. Na realidade, este é um problema já presente na teoria clássica, onde a estrutura dos colchetes de Poisson já havia sido alterada. A estrutura “correta” dos colchetes de Poisson, que leva em conta restrições de segunda ordem e é denominada de colchetes de Dirac é dada por

$$[f, g]_D = [f, g]_P - \sum_{a,b} [f, \tilde{\phi}_a]_P M_{ab}^{-1} [\tilde{\phi}_b, g]_P \quad (2.10)$$

Onde  $M_{ab} = [\tilde{\phi}_a, \tilde{\phi}_b]_P$  e  $\tilde{\phi}_a$  são as restrições de segunda ordem. Esta expressão leva a uma alteração na última relação de comutação de 2.9, a qual não iremos demonstrar:

$$[A_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r}')]_D = i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.11)$$

Para ver como este resultado é consistente com as restrições, reescrevemos agora o lado direito da igualdade no espaço de momentos,

$$[A_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r}')]_D = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|^2} \right) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.12)$$

que agora é consistente com as restrições, por exemplo:

$$[\partial_i A_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r}')]_D = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|^2} \right) i p_i e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = 0 \quad (2.13)$$

Agora escrevemos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  na expansão usual em termos de operadores de criação e aniquilação,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r(\mathbf{p}) [a_{\mathbf{p}}^r e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|}{2}} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r(\mathbf{p}) [a_{\mathbf{p}}^r e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}] \quad (2.15)$$

Onde, como antes, os vetores de polarização satisfazem

$$\epsilon_r(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_r(\mathbf{p}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \quad (2.16)$$



Não é difícil mostrar que as relações de comutação dadas em 2.12 são equivalentes as relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação,

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^s]_D = [a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}]_D = 0 \quad \text{e} \quad [a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}]_D = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.17)$$

Onde, para obter estes resultados, precisamos utilizar as relações de completude dos vetores de polarização,

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_r^j(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2} \quad (2.18)$$

Agora podemos obter a Hamiltoniana substituindo 2.14 e 2.15 em 2.5 e utilizando as identidades 1.8 e 2.4. O último termo de 2.5 desaparece no Gauge de Coulomb e após um pouco de álgebra chegamos na simples expressão da Hamiltoniana no espaço de momentos:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}| \sum_{r=1}^2 a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r \quad (2.19)$$

O leitor pode facilmente verificar, pelas relações de comutação 2.17, que a variação de qualquer operador  $\mathbf{F}$  função de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  é dada por  $\dot{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}, H]_D$ . O Gauge de Coulomb tem a vantagem de os graus de liberdade estarem expostos, entretanto, a invariância de Lorentz não é mais evidente.

## B. Gauge de Lorentz

Podemos tentar trabalhar de uma forma Lorentz invariante impondo o Gauge de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Com isto a equação de movimento que segue das equações de Maxwell é

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \partial^2 A^\nu = 0 \quad (2.20)$$

Nossa estratégia para implementar o Gauge de Lorentz será um pouco diferente do feito para o Gauge de Coulomb. Iremos alterar a Lagrangiana da equação 1.34 para que a equação 2.20 seja obtida diretamente das equações de Euler-Lagrange. Isto é feito tomando a densidade Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.21)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange obtemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (2.22)$$

Agora partiremos para a quantização através da densidade Lagrangiana 2.21 e apenas no final impor a restrição  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Iremos esbarrar em alguns problemas devidos a simetrias “residuais”, entretanto podemos começar sem problemas pois desta vez  $\Pi^0$  e  $\Pi^i$  são dinâmicos.

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = -\partial_\mu A^\mu \quad \text{e} \quad \Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i \quad (2.23)$$

Tomando estes campos como operadores, podemos impor as relações de comutação usuais

$$[A_\mu(\mathbf{r}), A_\nu(\mathbf{r}')]_D = [\Pi^i(\mathbf{r}), \Pi^j(\mathbf{r}')]_D = 0 \quad \text{e} \quad [A_i(\mathbf{r}), \Pi^j(\mathbf{r}')]_P = i\eta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.24)$$

e podemos fazer a expansão usual em termos dos operadores de criação e aniquilação e dos quadrivetores de polarização  $(\epsilon_\mu)^\lambda$ ,  $\lambda = 0,1,2,3$ :

$$A_\mu(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) [a_\mathbf{p}^\lambda e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + a_\mathbf{p}^{\lambda\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}] \quad (2.25)$$

$$\Pi^\mu(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (+i) \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|}{2}} \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon^\mu)^\lambda(\mathbf{p}) [a_\mathbf{p}^\lambda e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - a_\mathbf{p}^{\lambda\dagger} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}] \quad (2.26)$$

Note que o momento  $\Pi^\mu$  desta vez vem com um termo (+i), ao contrario do (-i) no caso do Gauge de Coulomb. Isto se deve ao sinal negativo que aparece nas equações 2.23.

Agora temos 4 quadrivetores de polarização  $\epsilon^\lambda(\mathbf{p})$  ao contrario dos 2 vetores que tínhamos no Gauge de Coulomb. Tomemos  $\epsilon^0$  como temporal e  $\epsilon^{123}$  como espaciais. Escolhemos a normalização

$$\epsilon^\lambda \cdot \epsilon^{\lambda'} = \eta^{\lambda\lambda'} \quad \text{e} \quad (\epsilon_\mu)^\lambda (\epsilon_\nu)^{\lambda'} \eta_{\lambda\lambda'} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

Os quadrivetores de polarização dependem do quadrimomento do Fóton  $p^\mu = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ . Escolheremos as polarizações  $\epsilon^1$  e  $\epsilon^2$  para serem transversas ao momento do Fóton:

$$e^1 \cdot p^\mu = e^2 \cdot p^\mu = 0 \quad (2.28)$$

O terceiro vetor é a polarização longitudinal, por exemplo, se o momento do Fóton esta na direção  $\hat{z}$ , então  $p^\mu \sim (1,0,0,1)$  e

$$\epsilon^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Para outros quadrimomentos os vetores de polarização são transformações de Lorentz destes vetores, uma vez que a equação 2.28 é Lorentz invariante. Agora fazemos o mesmo que no Gauge de Coulomb e escrevemos as relações de comutação 2.24 em termos dos operadores de criação e aniquilação. Isto nos dá

$$[a_\mathbf{p}^\lambda, a_\mathbf{q}^{\lambda'}] = [a_\mathbf{p}^{\lambda\dagger}, a_\mathbf{q}^{\lambda'\dagger}] = 0 \quad \text{e} \quad [a_\mathbf{p}^\lambda, a_\mathbf{q}^{\lambda'\dagger}] = -\eta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.30)$$

O sinal negativo na segunda relação de comutação de 2.30 é bastante estranho. Para as componentes espaciais  $\lambda = 1,2,3$  não há problemas

$$[a_\mathbf{p}^\lambda, a_\mathbf{q}^{\lambda'\dagger}] = \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \lambda, \lambda' = 1,2,3 \quad (2.31)$$

Entretanto, para os operadores temporais temos

$$[a_\mathbf{p}^0, a_\mathbf{q}^{0\dagger}] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.31)$$

Isto é bastante estranho. Para ver o quão estranho isto é, tomemos o vácuo  $|0\rangle$  que é Lorentz invariante definido como

$$a_\mathbf{p}^\lambda |0\rangle = 0 \quad (2.32)$$

Então podemos criar uma partícula da forma usual,

$$|\mathbf{p}, \lambda\rangle = a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} |0\rangle \quad (2.33)$$

Para as polarizações espaciais  $\lambda = 1, 2, 3$  tudo parece correto, mas para a polarização temporal  $\lambda = 0$ , o estado  $|\mathbf{p}, 0\rangle$  tem norma negativa,

$$\langle \mathbf{p}, 0 | \mathbf{q}, 0 \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^0 a_{\mathbf{q}}^{0\dagger} | 0 \rangle = - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.34)$$

Um espaço de Hilbert com norma negativa significa probabilidades negativas, o que não tem sentido algum. Neste ponto devemos nos lembrar de nossa restrição  $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$ , a qual até agora não impusemos. Vejamos agora as diferentes formas que com que podemos aplicar esta restrição.

- Podemos pedir que  $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$  seja imposto como uma equação sobre operadores, mas isso não pode funcionar, pois as relações de comutação 2.24 não serão obedecidas se  $\Pi^0 = -\partial_{\mu} A^{\mu}$ . Precisamos de uma condição mais fraca.
- Podemos tentar impor a restrição ao espaço de Hilbert ao invés de diretamente aos operadores. Vamos supor que possamos separar o espaço de Hilbert em “bons” estados  $|\Psi\rangle$  e “maus” estados que de alguma forma se desacoplam do sistema. Mas como definiríamos quais são os bons estados? Uma ideia é impor  $\partial_{\mu} A^{\mu} |\Psi\rangle = 0$  em todos os “bons” estados físicos. Mas isso não funcionaria também. Novamente temos uma condição muito forte, por exemplo, suponha que decomponha-mos  $A_{\mu}(\mathbf{r}) = A_{\mu}^{+}(\mathbf{r}) + A_{\mu}^{-}(\mathbf{r})$  com

$$A_{\mu}^{-}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.35)$$

$$A_{\mu}^{+}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\lambda} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.36)$$

Então no vácuo  $A_{\mu}^{+} |0\rangle = 0$  automaticamente, mas  $\partial^{\mu} A_{\mu}^{-} |0\rangle \neq 0$ . Então, nem o vácuo é um estado físico se utilizarmos  $\partial_{\mu} A^{\mu} |\Psi\rangle = 0$  como restrição.

- Nossa ultima tentativa será a correta. Para manter o vácuo como um “bom” estado físico, podemos pedir que os estados físicos  $|\Psi\rangle$  são definidos como por

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{+} |\Psi\rangle = 0 \quad (2.37)$$

Isso garante que  $\langle \Psi' | \partial_{\mu} A^{\mu} | \Psi \rangle = 0$ , de forma que o operador  $\partial_{\mu} A^{\mu}$  tem elementos de matriz nulos entre estados físicos. A equação 2.37 é conhecida como condição de Gupta-Bleuler. A linearidade desta restrição significa que os estados físicos  $|\Psi\rangle$  geram um espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_f$ .

Mas agora estamos livres dos estados com norma negativa de forma que  $\mathcal{H}_f$  tem produto interno positivo definido em si? Na verdade não, mas estamos quase.

Consideremos uma base tal que podemos decompor qualquer elemento dessa base como  $|\Psi\rangle = |\psi_T\rangle |\phi\rangle$  onde  $|\psi_T\rangle$  contém apenas photos transversais, criados por  $a_{\mathbf{p}}^{1,2\dagger}$ , e  $|\phi\rangle$

contém os Fótons temporais criados por  $a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}$  e longitudinais criados por  $a_{\mathbf{p}}^{3\dagger}$ . A equação 2.37 requer que  $(a_{\mathbf{p}}^{3\dagger} - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger})|\phi\rangle = 0$ . Isto significa que os estados físicos precisam conter uma combinação de Fótons longitudinais e temporais. Sempre que o estado contém um Fóton temporal de momento  $\mathbf{p}$ , este também deve conter um Fóton longitudinal de igual momento. Em geral,  $|\phi\rangle$  será uma combinação linear de estados  $|\phi_n\rangle$  contendo  $n$  pares de Fótons temporais e longitudinais, de forma que podemos escrever

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |\phi_n\rangle \quad (2.38)$$

onde  $|\phi_0\rangle = |0\rangle$  é o vácuo. Não é difícil de ver que todos os estados restantes envolvendo Fótons longitudinais e temporais tem norma nula ( $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{n0}\delta_{m0}$ ). Isso significa que o produto interno em  $\mathcal{H}_f$  é positivo semi definido. Isto é um avanço, mas ainda temos que lidar com todos os estados de norma 0.

A forma com que lidamos com os estados de norma 0 é tratando-os como estados equivalentes ao vácuo por uma transformação de Gauge. Dois estados que diferem apenas em suas componentes temporais e longitudinais  $|\phi_n\rangle$ ,  $n \geq 1$  são ditos fisicamente equivalentes. Nos compreendemos a simetria de Gauge da teoria clássica como descendo ao espaço de Hilbert da teoria quântica. É claro que não podemos dizer que dois estados são fisicamente idênticos ao menos que estes nos deem o mesmo valor esperado para todos os observáveis físicos. Checamos isto através da Hamiltoniana

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}| \left( \sum_{i=1}^3 a_{\mathbf{p}}^{i\dagger} a_{\mathbf{p}}^i - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger} a_{\mathbf{p}}^0 \right) \quad (2.39)$$

A qual é obtida exatamente da mesma forma que o feito no Gauge de Coulomb, substituindo 2.25 e 2.26 em 2.5, utilizando as 1.8 e 2.23 e manipulando a expressão. A restrição  $(a_{\mathbf{p}}^{3\dagger} - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger})|\phi\rangle = 0$  nos garante que  $\langle\Psi'|a_{\mathbf{p}}^{3\dagger}a_{\mathbf{p}}^3|\Psi\rangle = \langle\Psi'|a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{p}}^0|\Psi\rangle$ , de forma que as contribuições das componentes temporais e longitudinais cancelam-se na Hamiltoniana. Isto também reitera que a Hamiltoniana é definida positiva, nos deixando apenas com os Fótons transversos, como seria de se esperar. Desta forma, a Hamiltoniana 2.39 se reduz a Hamiltoniana 2.19.

## Conclusões

A formulação Lagrangiana da eletrodinâmica relativística torna explícitas propriedades da eletrodinâmica que estão mascaradas nas equações de Maxwell. Junto com a formulação covariante, verificamos que a eletrodinâmica é relativística por essência e obtivemos leis de conservação diretamente da invariância de Gauge. Também vimos que, embora com muito mais trabalho e argumentação no Gauge de Lorentz, ambas as escolhas de Gauge resultam na mesma Hamiltoniana ao aplicarmos o formalismo canônico, de forma que a eletrodinâmica quântica também se mostrou invariante por estas transformações de Gauge.

## Bibliografia

- Zangwill, Andrew. Modern Electrodynamics.
- Weinberg, Steven. The Quantum Theory of Fields.
- "Quantization of the electromagnetic field." [Wikipedia](#).
- "Lagrangian (field theory)." [Wikipedia](#).