

Monografia - Eletromagnetismo II

A massa eletromagnética dos píons

Aluno: Alexandre Homrich

nUSP: 8944842

Instituto de Física - Universidade de São Paulo

19 de Junho de 2017

Resumo

O limite quiral da lagrangiana da CDQ restrita aos quarks up e down é introduzida. A quebra espontânea à simetria diagonal por condensação de quarks é discutida, levando a lagrangiana efetiva dos Píons. O eletromagnetismo é incluído gaugeando um dos geradores da simetria $SU(2)$ global do sistema. Os fatores de forma da interação do fóton com os píons são estudados no limite de grande número de cores, permitindo obter as regras de soma de Weinberg. Por fim, a contribuição eletromagnética à massa dos píons é obtida através do potencial de Coleman-Weinberg assumindo a dominância da contribuição do meson ρ , obtendo-se $m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} \simeq 5.8 \text{ MeV}$.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	CDQ, Quiralidade, Píons e Lagrangianas efetivas	3
3	Introduzindo interações eletromagnéticas	4
4	O potencial de Coleman-Weinberg	6
5	Large N	8
6	A massa eletromagnética	9

It used to be said in the older books that since Nature will obviously not present us with two particles - one neutral and the other charged, but otherwise the same - we will never be able to tell how much of the mass is electromagnetic... But it turns out that Nature *has* been kind enough to present us with such objects!

The Feynman Lectures on Physics, Vol 2, Ch 28

1 Introdução

Do ponto de vista das interações fortes, não há distinção entre o pión de carga positiva π^+ , o pión de carga negativa π^- e o pión neutro π^0 : esses formam um tripleto sob a simetria de isospin, a mesma que relaciona o próton e o neutron. Tal como ocorre com os núcleons, no entanto, a massa dessas três partículas é diferente, sendo a massa dos píons carregados dada por $m_{\pi^\pm} \simeq 139.6$ MeV, e a massa do pión neutro dada por $m_{\pi^0} \simeq 135.0$ MeV. A origem da diferença é majoritariamente devida às interações dos píons com o campo eletromagnético, que quebra a simetria de isospin explicitamente.

Apesar de ter sua origem bem compreendida, é, no entanto, difícil calcular a diferença de massas dos píons com precisão. Isso se deve ao fato de, na escala de energia da física hadrônica, a CDQ possuir uma constante de acoplamento da ordem da unidade, impedindo o uso de teoria de perturbações usual. Contudo, é ainda possível fazer uma série de previsões sobre a física dos píons baseando-se apenas nas simetrias do sistema, através do estudo de lagrangianas efetivas.

No contexto de lagrangianas efetivas, é possível calcular a contribuição de correções quânticas eletromagnéticas a massa dos píons através do potencial efetivo de Coleman-Weinberg, desde que tenhamos conhecimento de como os píons interagem com o campo do fóton, isso é, os fatores de forma da lagrangiana efetiva. Para calcular os fatores de forma é necessário uma nova técnica de expansão perturbativa. Para isso, introduzimos uma teoria análoga a CDQ com grupo de gauge $SU(N)$ ao invés de $SU(3)$, e estudamos o limite $N \rightarrow \infty$, obtendo uma expansão em $\frac{1}{N}$. Essa técnica é de importância central em física teórica. É claro que, como $N = 3$, não podemos esperar um resultado com precisão superior muito superior a 30% e, de fato, é dessa ordem a diferença do resultado teórico que será obtido e os valores experimentais acima para as massas dos píons. ¹

¹Como esse trabalho envolve uma série de tópicos mais avançados, tentarei passar uma ideia qualitativa/introdutória nas partes mais simples e progredir a passos largos nas partes mais complicadas, focando basicamente nos resultados, caso contrário a monografia seria longa demais.

2 CDQ, Quiralidade, Píons e Lagrangianas efetivas

Essa seção é baseada majoritariamente em [1]². A lagrangiana da CDQ restrita aos quarks up e down é

$$\mathcal{L} = i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R + i\bar{u}_L \not{D} u_L + i\bar{d}_L \not{D} d_L - m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (1)$$

onde \not{D} é a derivada covariante da CDQ, $(F_{\mu\nu}^a)^2$ o termo cinético dos glúons e R/L denota spinores de mão direita ou esquerda: $u_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \cdot u$.

Se a massa dos quarks fosse nula, quarks de mão esquerda e direita seriam desacoplados e teríamos uma simetria global $SU_R(2) \times SU_L(2)$ que rotaciona quarks de mesma quiralidade separadamente. Isso é, se $U_{R/L}$ é uma matriz da representação fundamental de $SU(2)$ então:

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad (4)$$

Uma forma alternativa de escrever a simetria é através de $SU(2)_{isospin} \times SU(2)_{axial}$. Se o parâmetro de rotação de $SU(2)_{isospin}$ for $\vec{\theta}$ e o de $SU(2)_{axial}$ for $\vec{\phi}$, então sob a transformação temos

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{\tau} + \vec{\phi} \cdot \vec{\tau})} q \quad (5)$$

onde $\vec{\tau}$ é o vetor de geradores de $SU(2)$ fundamental.

Há várias evidências de que o vácuo da CDQ quebra a simetria $SU(2) \times SU(2)$ espontaneamente através de valores esperados $\langle \bar{u}u \rangle$ e $\langle \bar{d}d \rangle$ não nulos [1, 2]. A simetria $SU(2)_{isospin}$ é, nesse caso, preservada. Acontece que o padrão de quebra de simetria é suficiente para restringir as interações e o espectro da teoria em baixas energias (teremos uma teoria efetiva). Como veremos, no caso da CDQ isso nos levará a teoria de píons.

Para ilustrar, considere uma teoria de 4 campos escalares escritos como elementos de uma matriz Σ cujos índices se transformam por $SU(2) \times SU(2)$ na forma

$$\Sigma^{kl} \rightarrow U_L^{ki} \Sigma_{ij} (U_R^\dagger)^{jl} \quad (6)$$

²Essa seção também é adaptada de uma pequena parte de meu primeiro relatório de iniciação científica, não público.

onde U_L e U_R são matrizes fundamentais de $SU(2)_{L/R}$, e lagrangiana da teoria

$$\mathcal{L} = Tr(\partial_\mu \Sigma (\partial^\mu \Sigma)^\dagger) + m^2 (Tr(\Sigma (\Sigma)^\dagger)) - \frac{\lambda}{4} (Tr(\Sigma (\Sigma)^\dagger))^2 \quad (7)$$

Essa lagrangiana é invariante por $SU(2) \times SU(2)$. O potencial tem vácuo não trivial. Um possível vácuo que minimiza o potencial é $\Sigma_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} I_{2 \times 2}$ onde $v = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}$. Apenas o subgrupo $SU(2)_{isospin}$ ($U_L = U_R$) mantém o vácuo invariante.

Podemos parametrizar Σ ao redor do vácuo de maneira usual, isso é, tendo os NGBs (Bósons de Nambu-Goldstone) como parâmetros dos geradores quebrados:

$$\Sigma = \frac{v + \sigma}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(i \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\right) \quad (8)$$

de forma que σ representa uma componente radial massiva e $\vec{\pi}$ representa componentes angulares que serão identificadas com os píons π .

Estamos preocupados com a teoria em baixas energias, e nessa escala não nos preocupamos com σ , que integramos fora. Escrevemos então uma lagrangiana efetiva para os π incluindo todos os termos compatíveis com a simetria do sistema. É fácil fazer isso com a parametrização escolhida. O resultado será uma lagrangiana não renormalizável, mas no limite de baixas energias apenas os primeiros termos serão significativos, e poderemos restringir a lagrangiana a uma ordem desejada e fazer previsões nessa ordem. A teoria em baixas energias só pode depender de $\Pi = \exp\left(i \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\right)$, que satisfaz $\Pi^{-1} = \Pi^\dagger$, de forma que termos como $\Pi \cdot \Pi^\dagger$ são triviais. A lagrangiana então deve depender de $\partial_\mu \Pi \cdot \partial^\mu \Pi^\dagger$, potências e termos similares. A lagrangiana com os termos de ordem mais baixa que respeitam a simetria é

$$\mathcal{L} = Tr[\partial_\mu \Pi \cdot \partial^\mu \Pi^\dagger] + A Tr[\partial_\mu \Pi \cdot \partial^\mu \Pi^\dagger]^2 + \dots \quad (9)$$

onde A é um parâmetro. Note que, no limite quiral, termos de massa para os píons não ocorrem.

3 Introduzindo interações eletromagnéticas

O restante desse trabalho segue o desenvolvimento de [3].

As interações eletromagnéticas são descritas por um grupo de gauge $U(1)$, tal como vimos no curso. Queremos, então, "promover" um dos geradores da simetria $SU(2)_{isospin} \times SU(2)_{axial}$ a um gerador de transformação de gauge (adicionar mais um grupo de simetria ao sistema não é uma boa ideia: precisamos que o eletromagnetismo quebre a simetria existente entre os píons). Devemos escolher um dos geradores da simetria de isospin, caso contrário teríamos que um dos pión seria "comido" durante a condensação de quarks para dar massa ao fóton (mecanismo de

Higgs). Gaugeando um dos geradores de isospin mantemos o fóton não massivo e os três píons no espectro da teoria. Dessa forma, em nível de correções radiativas, diagramas de Feynman contendo loops de fótons gerarão massas para os píons carregados. Assim, identificamos o gerador diagonal T^3 de $SU(2)_{isospin}$ como o gerador do eletromagnetismo.

Para escrever a nova lagrangiana efetiva, dessa vez incluindo interações eletromagnéticas, usamos a seguinte técnica: escrevemos a lagrangiana mais geral possível com todos os geradores de $SU_R(2) \times SU_L(2)$ gaugeados. Como estamos preocupados apenas em obter a massa dos píons (ou melhor, seu potencial) devido a correções quânticas, e não suas interações envolvendo derivadas, desprezamos os termos cinéticos do pión, tratando-o como um campo clássico de fundo. No final, tomaremos que apenas o gerador diagonal T^3 de $SU(2)_{isospin}$ é gaugeado. No espaço dos momentos e considerando apenas termos de segunda ordem nos campos de gauge, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(P_T)^{\mu\nu}[\mathfrak{F}_L(q^2)Tr[L_\mu L_\nu] + \mathfrak{F}_R(q^2)Tr[R_\mu R_\nu] - \mathfrak{F}_{LR}(q^2)Tr[\Pi^\dagger L_\mu \Pi R_\nu]] \quad (10)$$

onde $(P_T)^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$ é o projetor dos bósons de gauge em suas componentes transversas (forçando a independência da lagrangiana das componentes longitudinais e tipo tempo - não físicas - dos bósons de gauge), \mathfrak{F}_{LR} , \mathfrak{F}_L e \mathfrak{F}_R são os fatores de forma que codificam as influências da teoria ultravioleta (isso é, a CDQ) no regime de baixas energias que estamos estudando, incluindo as flutuações do campo do pión (pois estamos tratando-o como um campo de fundo clássico), $L_\mu = L_\mu^a T^a$ e $R_\mu = R_\mu^a T^a$ são os bósons de gauge de $SU(2)_{L/R}$ (onde T^a são os geradores de $SU(2)$)³.

Como apenas a simetria $SU(2)_{isospin}$ preserva o vácuo, é útil escrever a lagrangiana em termos dos campos de gauge vetoriais (isso é, de isospin) e axiais:

$$V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_\mu + L_\mu) \quad (11)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_\mu - L_\mu) \quad (12)$$

Escrevendo a lagrangiana com o valor esperado $\langle \Pi \rangle = 1$, obtemos

³Para enfatizar, essa não é a lagrangiana completa - que é invariante de gauge - mas apenas os termos de interesse onde são ignorados termos envolvendo derivadas de Π , termos de ordem superior nos campos de gauge, e onde todas as derivadas nos campos de gauge são absorvidas nos fatores de forma (estamos no espaço de momentos).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(P_T)^{\mu\nu}[(\mathfrak{F}_L(q^2) + \mathfrak{F}_R(q^2) - \mathfrak{F}_{LR}(q^2))Tr[V_\mu V_\nu]] \quad (13)$$

$$+ (\mathfrak{F}_R(q^2) + \mathfrak{F}_L(q^2) + \mathfrak{F}_{LR}(q^2))Tr[A_\mu A_\nu] \quad (14)$$

$$+ (\mathfrak{F}_R(q^2) - \mathfrak{F}_L(q^2))Tr[V_\mu A_\nu + A_\mu V_\nu] \quad (15)$$

De forma que escrevemos

$$2\mathfrak{F}_{VV} = \mathfrak{F}_L(q^2) + \mathfrak{F}_R(q^2) - \mathfrak{F}_{LR}(q^2) \quad (16)$$

$$2\mathfrak{F}_{AA} = \mathfrak{F}_L(q^2) + \mathfrak{F}_R(q^2) + \mathfrak{F}_{LR}(q^2) \quad (17)$$

$$2\mathfrak{F}_{VA} = \mathfrak{F}_R(q^2) - \mathfrak{F}_L(q^2) \quad (18)$$

Dada a identificação dos fatores de forma (equações 16-18), desligamos todos os campos de gauge a menos do fóton escrevendo $R_\mu = L_\mu = \gamma_\mu T^3$, obtendo, através da equação 10, que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(P_T)^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \left[\frac{1}{2}(\mathfrak{F}_L(q^2) + \mathfrak{F}_R(q^2)) - \frac{1}{4}\mathfrak{F}_{LR}(q^2)Tr[\Pi^\dagger \sigma_3 \Pi \sigma_3] \right] \quad (19)$$

onde lembramos que $T_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ sendo σ_3 é a matriz de Pauli usual. Usando a identidade [4]

$$e^{ia\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = I_{2\times 2} \cos a + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin a \quad (20)$$

com $|\hat{n}| = 1$, obtemos, utilizando as propriedades de traços de produtos de matrizes de Pauli, que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(P_T)^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu [\mathfrak{F}_{VV}(q^2) + \mathfrak{F}_{LR}(q^2) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{f_\pi}}{\pi^2} (\pi^+ \pi^-)] \quad (21)$$

onde $\pi = \sqrt{\pi^2}$, $\pi^+ \pi^- = (\pi_1)^2 + (\pi_2)^2$ e $f_\pi = \frac{2m}{\sqrt{\lambda}}$ é a constante de decaimento do pión. Note que em primeira ordem (a nível quártico) apenas os pions carregados se acoplam com o fóton.

4 O potencial de Coleman-Weinberg

Em nível clássico os pions não possuem massa. Queremos, no entanto, obter o potencial (incluindo o termo de massa) dos pions gerado por correções quânticas, isso é, pelas interações dos pions carregados com os fótons, como já discutimos. No contexto de lagrangianas efetivas, tal método foi desenvolvido por S. Coleman e E. Weinberg [1][5]. Nesse trabalho, tomamos apenas o resultado. Considerando a lagrangiana da equação 21, potencial efetivo dos pions em nível 1-loop, correspondentes a soma dos diagramas da figura 1 é dado por [3]

$$V(\pi) = \frac{3}{16\pi^2} \int_0^\infty dQ^2 Q^2 \log \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{F}_{LR}(Q^2)}{\mathfrak{F}_{VV}(Q^2)} \frac{\sin^2 \pi / f_\pi}{\vec{\pi}^2} (\pi^+ \pi^-) \right) \quad (22)$$

onde Q^2 é o momento euclidiano.

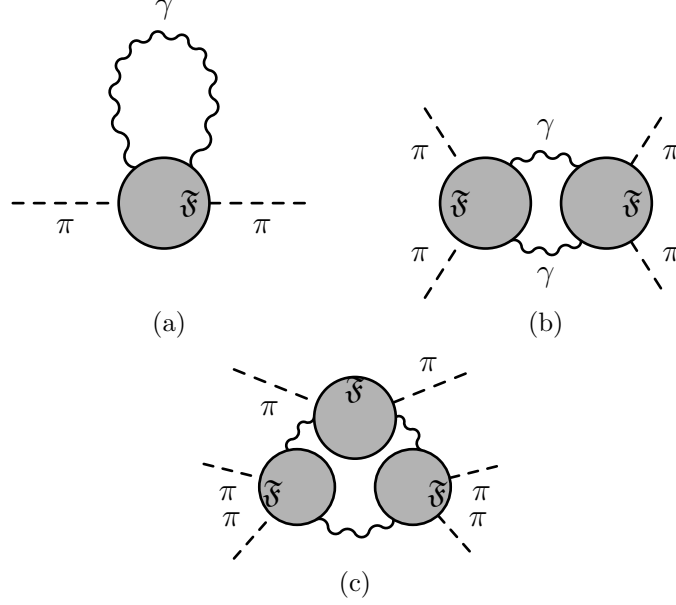


Figura 1: Algumas das contribuições ao potencial de Coleman-Weinberg em nível 1-loop. Os círculos representam as interações da teoria ultravioleta que conectam píons e fótons, sintetizados no fator de forma \mathfrak{F}_{LR} conforme equações 10 e 21.

De acordo com o teorema de Goldstone [6], apenas as correntes conservadas associadas aos geradores quebrados espontaneamente podem criar os bósons de Nambu-Goldstone. Como, de acordo com a equação 10, $(P_T)^{\mu\nu} \mathfrak{F}_{XX} = \langle J_X^\mu J_X^\nu \rangle$ é esperado que $\mathfrak{F}_{VV}(0) = 0$ se anule. Além disso, como o eletromagnetismo é perturbativo, esperamos que a contribuição de $\mathfrak{F}_{VV}(Q^2)$ à integral da equação (22) seja dominada em ambos os limites da integral por $\mathfrak{F}_{VV}(Q^2) \simeq \frac{Q^2}{e^2}$, isso é, pela contribuição do termo cinético do fóton $(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^4$. Usando essa aproximação, concluímos, expandindo o logaritmo:

$$V(\pi) = \frac{3\alpha_{em}}{8\pi} \frac{\sin^2 \pi / f_\pi}{\vec{\pi}^2} (\pi^+ \pi^-) \int_0^\infty dQ^2 \mathfrak{F}_{LR}(Q^2) \quad (23)$$

Onde $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$ é a constante de estrutura fina. É necessário agora obter um método para calcular a integral explicitamente.

⁴O fator $\frac{1}{e^2}$ está de acordo com a normalização da seção 5 para os fatores de forma (note que aparecem como uma fração na equação 22/23, e por tanto a normalização não contribui).

5 Large N

There being no obvious (expansion) parameter, we must find a parameter which is not obvious!

Baryons in the $\frac{1}{N}$ expansion, Edward Witten

No limite em que o número de cores $N \rightarrow \infty$, a teoria simplifica-se enormemente. G. 't Hooft e E. Witten [7][8] mostraram que, nessa aproximação, a CDQ é uma teoria fracamente acoplada de mesons. Além disso, em primeira ordem em N , vale que [3][8]

$$(P_T)^{\mu\nu} \mathfrak{F}_{XX}(q^2) = \langle J_X^\mu(q) J_X^\nu(-q) \rangle = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \sum_n \frac{f_n^2}{q^2 - m_n^2} \quad (24)$$

onde a soma se da sobre as ressonâncias com números quânticos compatíveis com a corrente J_X . No nosso caso, vale que

$$(P_T)^{\mu\nu} \mathfrak{F}_{VV}(q^2) = \langle J_V^\mu(q) J_V^\nu(-q) \rangle = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \sum_n \frac{f_{\rho_n}^2}{q^2 - m_{\rho_n}^2} \quad (25)$$

$$(P_T)^{\mu\nu} \mathfrak{F}_{XX}(q^2) = \langle J_X^\mu(q) J_X^\nu(-q) \rangle = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left(\sum_n \frac{f_{a_n}^2}{q^2 - m_{a_n}^2} + \frac{f_\pi}{q^2} \right) \quad (26)$$

onde ρ_n são as ressonâncias vetoriais (sendo a de menor massa o meson ρ), a_n as ressonâncias axiais massivas e na equação 26 utilizamos o fato de que a corrente axial, sendo associada a um gerador espontaneamente quebrado, tem os números quânticos para excitar os mésons pi (NGBs), e f_n é a constante de decaimento do méson n, também dada pela amplitude do méson ser criado do vácuo pela corrente associada: $f_n = \langle 0 | J | n \rangle$.

Um último resultado é necessário antes de juntarmos todos os ingredientes e obtermos a diferença de massa dos píons. Os fatores de forma estão associados a um produto de correntes. Um produto de operadores pode se escrito como uma soma de operadores com coeficientes sendo c-números. Isso é conhecido como OPE (Operator Product Expansion), que pode ser visto como um análogo a expansão de multipolos do eletromagnetismo. Na expansão do produto de correntes, só terão coeficientes não nulos operadores com números quânticos compatíveis (da mesma forma que uma função ímpar só tera esféricos harmônicos de spin ímpar). Dessa forma, é possível listar os operadores que contribuem para \mathfrak{F}_{LR} no limite chiral, e concluir que, para $Q^2 \rightarrow \infty$, a dependência do fator de forma com Q^2 é [3]

$$\mathfrak{F}_{LR} \propto \frac{1}{Q^4}. \quad (27)$$

Que implica

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{F}}_{LR} = 0 \quad (28)$$

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} Q^2 \tilde{\mathfrak{F}}_{LR} = 0 \quad (29)$$

Das equações 16 e 17 segue que

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{LR} = \tilde{\mathfrak{F}}_{AA} - \tilde{\mathfrak{F}}_{VV} \quad (30)$$

Substituindo 25, 26 em 30 e usando 28, concluimos

$$\sum_n f_{\rho_n}^2 - f_{a_n}^2 = f_\pi^2 \quad (31)$$

De mesma maneira, com 25, 26, 29 e 30, obtemos

$$\sum_n f_{\rho_n}^2 m_{\rho_n} - f_{a_n}^2 m_{a_n} = 0 \quad (32)$$

As equações 31 e 32, que conectam as diversas constantes de decaimento e massas das ressonâncias, são as regras de soma de Weinberg.

6 A massa eletromagnética

Podemos finalmente obter o resultado prometido, fazendo uso da última aproximação, que é de excelente compatibilidade com observações experimentais [9]: as contribuições das ressonâncias, em particular para as somas de Weinberg, são saturadas pelos mesons ρ e a_1 . Nessas condições, segue das equações 30-32 que

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{LR} \simeq f_\pi^2 \frac{m_\rho^2 m_{a_1}^2}{(Q^2 + m_\rho^2)(Q^2 + m_{a_1}^2)} \quad (33)$$

Fazendo a integral do potencial de Coleman-Weinberg (equação 23), obtemos

$$V(\pi) = \frac{3\alpha_{em}}{8\pi} \frac{\sin^2 \pi / f_\pi}{\vec{\pi}^2} (\pi^+ \pi^-) f_\pi^2 \frac{m_\rho^2 m_{a_1}^2}{m_{a_1}^2 - m_\rho^2} \log \frac{m_{a_1}^2}{m_\rho^2} \quad (34)$$

Expandindo o seno, obtemos o termo quadrático nos píons carregados, isso é o termo de massa. Sendo a diferença de massa entre os píons majoritariamente eletromagnética, concluimos,

$$m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2 = \frac{3\alpha_{em}}{4\pi} \frac{m_\rho^2 m_{a_1}^2}{m_{a_1}^2 - m_\rho^2} \log \frac{m_{a_1}^2}{m_\rho^2} \quad (35)$$

Substituindo os valores observados $m_{\pi^0} \simeq 135.0$ MeV, $m_\rho = 770$ MeV, e $m_{a_1} = 1260$ MeV, obtemos a previsão

$$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} \simeq 5.8 \text{ MeV} \quad (36)$$

Cujo desvio do valor experimental

$$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} \simeq 4.6 \text{ MeV} \quad (37)$$

é da ordem de 30%, como esperado da expansão em $\frac{1}{N}$. Por fim, podemos obter a previsão teórica para o raio clássico do pión. A auto-energia clássica de um π^+ esférico de raio r com distribuição de carga razoável (linear, uniforme, ou tipo casca, por exemplo, mas não pontual) é, em unidades naturais,

$$U = k \frac{e^2}{r} \quad (38)$$

onde k é uma constante adimensional de ordem da unidade que depende da distribuição de cargas [10]. O raio clássico do pión é definido como o raio tal que a energia da equação 38 (com $k=1$, pois estamos interessados em uma ordem de magnitude) é igual a energia de repouso da massa eletromagnética do pión, $U = m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}$, isso é,

$$r_\pi = \frac{e^2}{(m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0})} \quad (39)$$

onde lembramos que estamos em unidades naturais. Substituindo valores, obtemos

$$r_\pi \simeq 3 \times 10^{-14} \text{ cm} \quad (40)$$

como raio clássico do pion (previsão teórica).

Referências

- [1] M. Schwartz, "Quantum Field Theory and the Standard Model", *Cambridge University Press*, chapters 28 and 34, 2014.
- [2] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields", Vol 2, *Cambridge University Press*, chapter 19, 1995.
- [3] R. Contino, "Tasi 2009 lectures: The Higgs as a Composite Nambu-Goldstone Boson", arXiv:1005.4269
- [4] Exponencial de matrizes de Pauli - Link acessado em 19 de Junho de 2017
- [5] S.Coleman e E.Weinberg, "Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking", *Phys. Rev. D*, **7**, 1888 (1973)

- [6] M. Peskin e D. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", *Perseus Books*, chapter 11 and 20, 1995.
- [7] G. t'Hooft, "A planar diagram theory for strong interactions", *Nuclear Physics B*, **72**, 461 (1974)
- [8] E. Witten, "Baryons in the $\frac{1}{N}$ expansion", *Nuclear Physics B*, **160**, 57 (1974)
- [9] J. Donoghue, "Dynamics of the Standard Model", *Cambridge University Press*, chapter 6, 1992.
- [10] R. Feynman "The Feynman Lectures on Physics", Vol 2, chapter 28 (1963).