Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2017

Tópico 4 - Propagação de Incertezas; Covariâncias

Lei geral de propagação de incertezas

- A incerteza de uma grandeza w, calculada com base em resultados experimentais x, y, ... com incertezas σ_x, σ_y, ... pode ser determinada usando:

$$\sigma_w^2 = \langle(\varepsilon_w)^2\rangle = \langle(w - w_0)^2\rangle$$

onde $w = w(x, y)$ e $w_0 = w(x_0, y_0)$.

- A Lei geral de propagação de incertezas é obtida pela expansão da função w na vizinhança de (x_0, y_0) em série de Taylor até a primeira ordem:

$$w(x, y) \cong w(x_0, y_0) + \frac{\partial w}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y}(y - y_0)$$

Lei geral de propagação de incertezas

- Assim, para $w = w(x, y)$ obtêm-se:

$$\sigma_w^2 = \left\langle \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y}(y - y_0)\right]^2 \right\rangle$$

que resulta em:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) cov(x, y)$$

Onde $\sigma_x^2 = \langle (x - x_0)^2 \rangle = \langle \varepsilon_x^2 \rangle$ é a variância de x (e o mesmo para y) e $cov(x, y) = \langle (x - x_0)(y - y_0) \rangle = \langle \varepsilon_x \varepsilon_y \rangle$ é a covariância entre x e y.

Limitações da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) cov(x,y) + \cdots$$

A única hipótese considerada na dedução desta equação foi que a expansão de w até primeira ordem já é suficiente:

- Sempre verdade no caso de funções lineares em x, y, ...
- No caso de funções não lineares, a aproximação precisa ser adequada no intervalo de algumas incertezas em torno dos valores medidos
  - **Quanto menores forem as incertezas, melhor será essa aproximação**
  - **A função precisa ser contínua nesse intervalo**

Um uso importante da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) cov(x,y) + \cdots$$

Se as grandezas x e y forem estatisticamente independentes (correlação zero) a contribuição da incerteza de cada grandeza para a incerteza de w pode ser analisada separadamente:

- A contribuição da incerteza de x para w é dada por

$$\sigma_{w_{[x]}} = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x\right|$$

- **Útil para planejamento de experimentos pois permite identificar quais as grandezas que mais contribuem para a incerteza de w.**

As covariâncias

- As covariâncias podem tanto aumentar quanto diminuir a incerteza de w
  - O efeito das covariâncias depende do sinal das derivadas parciais e da própria covariância
- Em ajustes e em resultados de medições simultâneas de muitas grandezas é útil fornecer a matriz de covariâncias, $M_{i,j} = \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(x,y) & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

As correlações

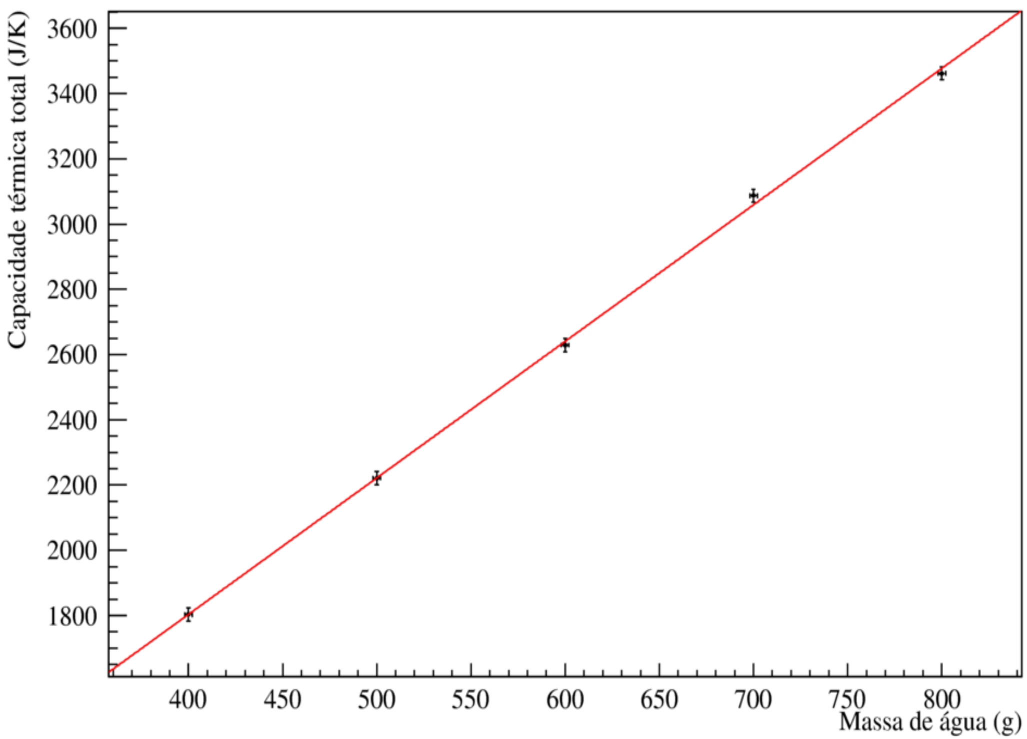
- Correlações são covariâncias normalizadas pelo produto dos desvios-padrões correspondentes, $\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$
  – As correlações são adimensionais e limitadas entre -1 e $+1$
  – Dados independentes tem correlação zero
  – Quanto mais o módulo da correlação se aproxima de 1, mais correlacionadas são as grandezas
- É usual fornecer a matriz de correlações, $C_{i,j} = \rho_{i,j}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(x,y) \\ \rho(x,y) & 1 \end{bmatrix}$$

Um exemplo de covariâncias

Parâmetros de ajustes usualmente tem covariâncias importantes. Exemplo: ajuste da capacidade térmica total em função da massa de água em um calorímetro. Dados adaptados do artigo "*Calorímetro Didático*", de J.H. Vuolo e C.H. Furukawa [Rev. Bras. de Ensino de Física **v.17** (1995) p.140].

Ajuste pelo WebRoot* de uma função $y = [0] + [1] * x$



Resultados do ajuste

Número de parâmetros	**2**
Chi2	**2.463**
Número de graus de liberdade	**3**

parâmetro	Valor	Incerteza
0	**129.753**	**42.262**
1	**4.18441**	**0.0685581**

Matriz de covariância

1786.08	**-2.82012**
-2.82012	**0.00470021**

Matriz de correlação

1.00	**-0.97**
-0.97	**1.00**

*O WebRoot foi desenvolvido pelo prof. Alexandre Suaide do GRIPER-IFUSP (2011)