1º semestre de 2017

Gabarito Lista exercícios 10 – Modelos Bidimensionais I

Exercício 1

Supor que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y seja dada pela tabela abaixo:

Y/X	1	2	3
1	9/50	2/50	6/50
2	7/50	6/50	8/50
3	4/50	6/50	2/50

a) Obter as distribuições marginais de X e Y.

b) Calcular E(X), E(Y), Var(X) e Var(Y).

c) Obter $\rho(X, Y)$.

d) Seja Z=X+Y, obter E(Z) e Var(Z).

e) Obtenha a distribuição de Y dado X=1 e consequentemente E(Y|X=1) e Var(Y|X=1).

Solução

a) A distribuição conjunta de X e Y é dada pela seguinte tabela.

Y/X	1	2	3	P(y)
1	9/50	2/50	6/50	**17/50**
2	7/50	6/50	8/50	**21/50**
3	4/50	6/50	2/50	**12/50**
P(x)	**20/50**	**14/50**	**16/50**	1

Logo as distribuições marginais de X e Y são dadas respectivamente pelas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Distribuição marginal de X.

X	1	2	3
P(X=x)	20/50	14/50	16/50

Tabela 2: Distribuição marginal de Y.

Y	1	2	3
P(Y=y)	17/50	21/50	12/50

b) Temos que,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{20}{50} + 2 \times \frac{14}{50} + 3 \times \frac{16}{50} \\ &= \frac{20}{50} + \frac{28}{50} + \frac{48}{50} = \frac{96}{50} = 1,92. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \frac{17}{50} + 2 \times \frac{21}{50} + 3 \times \frac{12}{50} \\ &= \frac{17}{50} + \frac{42}{50} + \frac{36}{50} = \frac{95}{50} = 1,9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1 \times \frac{20}{50} + 2^2 \times \frac{14}{50} + 3^2 \times \frac{16}{50} \\ &= \frac{20}{50} + \frac{56}{50} + \frac{144}{50} = \frac{220}{50}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1 \times \frac{17}{50} + 2^2 \times \frac{21}{50} + 3^2 \times \frac{12}{50} \\ &= \frac{17}{50} + \frac{84}{50} + \frac{108}{50} = \frac{209}{50}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{220}{50} - \left(\frac{96}{50}\right)^2 \\ &= \frac{220}{50} - \frac{9216}{2500} = \frac{11000 - 9216}{2500} = \frac{1784}{2500} = 0,7136. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{209}{50} - \left(\frac{95}{50}\right)^2 \\ &= \frac{209}{50} - \frac{9025}{2500} = \frac{10450 - 9025}{2500} = \frac{1425}{2500} = 0,57. \end{aligned}$$

Resumindo os resultados, temos

E(X)	E(Y)	Var(X)	Var(Y)
1,92	1,9	0,7136	0,57

Vemos que a esperanza de X é levemente maior mas também tem maior variabilidade que Y.

c) Temos que,

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 1\times\frac{9}{50} + 2\times\frac{2}{50} + 3\times\frac{6}{50} + 2\times\frac{7}{50} + 4\times\frac{6}{50} + 6\times\frac{8}{50} + 3\times\frac{4}{50} \\
&\quad +6\times\frac{6}{50} + 9\times\frac{2}{50} \\
&= \frac{9}{50} + \frac{4}{50} + \frac{18}{50} + \frac{14}{50} + \frac{24}{50} + \frac{48}{50} + \frac{12}{50} + \frac{36}{50} + \frac{18}{50} \\
&= \frac{183}{50} = 3,66
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{183}{50} - \frac{96}{50}\times\frac{95}{50} = \frac{183}{50} - \frac{9120}{2500} = \frac{9150-9120}{2500} = 0,012.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{0,012}{\sqrt{0,7136}\sqrt{0,57}} \approx 0,0188.$$

d) Seja Z=X+Y.

Y/X	1	2	3
1 **(x+y)**	9/50 **(2)**	2/50 **(3)**	6/50 **(4)**
2 **(x+y)**	7/50 **(3)**	6/50 **(4)**	8/50 **(5)**
3 **(x+y)**	4/50 **(4)**	6/50 **(5)**	2/50 **(6)**

Z	2	3	4	5	6
	9/50	2/50 + 7/50	6/50 + 6/50 + 4/50	8/50 + 6/50	2/50

Logo, a distribuição marginal de Z=X+Y é dada por,

Z	2	3	4	5	6
	9/50	9/50	16/50	14/50	2/50

De modo que,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= 2\times\frac{9}{50}+3\times\frac{9}{50}+4\times\frac{16}{50}+5\times\frac{14}{50}+6\times\frac{2}{50}\\
&= \frac{18}{50}+\frac{27}{50}+\frac{64}{50}+\frac{70}{50}+\frac{12}{50}=\frac{191}{50}=3,82.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= 2^2\times\frac{9}{50}+3^2\times\frac{9}{50}+4^2\times\frac{16}{50}+5^2\times\frac{14}{50}+6^2\times\frac{2}{50}\\
&= \frac{36}{50}+\frac{81}{50}+\frac{256}{50}+\frac{350}{50}+\frac{72}{50}=\frac{795}{50}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z) &= E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{795}{50}-\left(\frac{191}{50}\right)^2\\
&= \frac{795}{50}-\frac{36481}{2500}=\frac{39750-36481}{2500}=\frac{3269}{2500}=1,3076.
\end{aligned}$$

Usando o item (b) podemos obter

$$E(Z) = E(X)+E(Y)=\frac{96}{50}+\frac{95}{50}=\frac{191}{50}=3,82.$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\times\mathrm{Cov}(X,Y)=0,7136+0,57+2\times0,012=1,3076.$$

e) Note que,

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(Y=1\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{9/50}{20/50}=\frac{9}{20}=0,45$$

$$P(Y=2|X=1)=\frac{P(Y=2\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{7/50}{20/50}=\frac{7}{20}=0,35$$

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(Y=3\cap X=1)}{P(X=1)}=\frac{4/50}{20/50}=\frac{4}{20}=0,2$$

Logo, a distribuição de Y dado X=1 é dada por,

Tabela 3: Distribuição marginal de $Y|X=1$.

Y	1	2	3
$P(Y\|X=1)$	0,45	0,35	0,2

E portanto,

$$E(Y|X=1)=1\times0,45+2\times0,35+3\times0,2=0,45+0,7+0,6=1,75.$$

$$E(Y^2|X=1)=1^2\times0,45+2^2\times0,35+3^2\times0,2=0,45+1,4+1,8=3,65.$$

$$\mathrm{Var}(Y|X=1)=E(Y^2|X=1)-E(Y|X=1)^2=3,65-(1,75)^2=0,5875.$$

1º semestre de 2017

Gabarito Lista exercícios 10 – Modelos Bidimensionais I

Exercício 2

A tabela abaixo descreve a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y para uma grupo de 100 alunos, em que X e Y denotam, respectivamente, o número de vezes que o aluno foi ao teatro nos meses de janeiro e fevereiro de 2016.

Y/X	0	1	2	3
0	20/100	13/100	5/100	2/100
1	15/100	10/100	4/100	1/100
2	5/100	10/100	3/100	2/100
3	4/100	3/100	2/100	1/100

a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.

b) Obtenha e interprete ρ(X,Y).

c) Se um aluno foi ao teatro em fevereiro qual a probabilidade de não ter ido em janeiro?

d) Qual a interpretação de X+Y? Obtenha E(X+Y) e Var(X+Y).

Solução

a) A distribuição conjunta é dada por,

Y/X	0	1	2	3	P(y)
0	20/100	13/100	5/100	2/100	**40/100**
1	15/100	10/100	4/100	1/100	**30/100**
2	5/100	10/100	3/100	2/100	**20/100**
3	4/100	3/100	2/100	1/100	**10/100**
P(x)	**44/100**	**36/100**	**14/100**	**6/100**	1

A distribuição marginal de X é dada por,

X	0	1	2	3
P(X=x)	**44/100**	**36/100**	**14/100**	**6/100**

A distribuição marginal de Y é dada por,

Y	0	1	2	3
P(Y=y)	**40/100**	**30/100**	**20/100**	**10/100**

b) Temos que,

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\times\frac{44}{100}+1\times\frac{36}{100}+2\times\frac{14}{100}+3\times\frac{6}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{36}{100}+\frac{28}{100}+\frac{18}{100}=\frac{82}{100}=0,82. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0\times\frac{40}{100}+1\times\frac{30}{100}+2\times\frac{20}{100}+3\times\frac{10}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{30}{100}+\frac{40}{100}+\frac{30}{100}=\frac{100}{100}=1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2\times\frac{44}{100}+1^2\times\frac{36}{100}+2^2\times\frac{14}{100}+3^2\times\frac{6}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{36}{100}+\frac{56}{100}+\frac{54}{100}=\frac{146}{100}=1,46. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2\times\frac{40}{100}+1^2\times\frac{30}{100}+2^2\times\frac{20}{100}+3^2\times\frac{10}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{30}{100}+\frac{80}{100}+\frac{90}{100}=\frac{200}{100}=2. \end{aligned}$$

Na seguinte tabela mostramos as probabilidades asociadas ao produto X por Y,

Y/X	0	1	2	3
0 **(x × y)**	20/100 **(0)**	13/100 **(0)**	5/100 **(0)**	2/100 **(0)**
1 **(x × y)**	15/100 **(0)**	10/100 **(1)**	4/100 **(2)**	1/100 **(3)**
2 **(x × y)**	5/100 **(0)**	10/100 **(2)**	3/100 **(4)**	2/100 **(6)**
3 **(x × y)**	4/100 **(0)**	3/100 **(3)**	2/100 **(6)**	1/100 **(9)**

$$\begin{aligned} E(XY)=\sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} &= 0\times\frac{64}{100}+1\times\frac{10}{100}+2\times\frac{10}{100}+3\times\frac{3}{100}+2\times\frac{4}{100}+4\times\frac{3}{100}+6\times\frac{2}{100} \\ &\quad +3\times\frac{1}{100}+6\times\frac{2}{100}+9\times\frac{1}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{10}{100}+\frac{20}{100}+\frac{9}{100}+\frac{8}{100}+\frac{12}{100}+\frac{12}{100}+\frac{3}{100}+\frac{12}{100}+\frac{9}{100} \\ &= \frac{95}{100}=0,95 \end{aligned}$$

Resultando,

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = 1,46 - (0,82)^2 = 0,7876$$

$$\mathrm{Var}(Y) \;=\; \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y) = 2 - (1)^2 = 1.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\ &= 0,95 - 1 \times 0,82 = 0,13.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}\sqrt{\mathrm{Var(Y)}}} = \frac{0,13}{\sqrt{0,7876}\sqrt{1}} \approx 0,1465.$$

Desse ultimo resultado, podemos concluir que existe uma correlação linear desprezível e positiva. Podemos concluir que não existe uma relação linear entre o número de vezes que o aluno foi ao teatro entre os meses de janeiro e fevereiro de 2016.

c) Queremos determinar a probabilidade de X=0 (um aluno não ter ido ao teatro em janeiro) dado que ele foi ao teatro em fevereiro pelo menos uma vez (Y=1 ou Y=2 ou Y=3).

Vamos denotar A={(Y=1∪Y=2∪Y=3)}, sua probabilidade pode ser calculada da tabela da distribuição marginal de Y e é dada por

$$P(A) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} + \frac{10}{100} = \frac{60}{100}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}P(X=0|A) &= \frac{P(X=0\cap A)}{P(A)} = \frac{P(X=0\cap(Y=1\cup Y=2\cup Y=3)}{P(A)}\\ &= \frac{P((X=0\cap Y=1)\cup(X=0\cap Y=2)\cup(X=0\cap Y=3))}{P(A)}\\ &= \frac{P(X=0\cap Y=1)+P(X=0\cap Y=2)+P(X=0\cap Y=3)}{P(A)}\\ &= \frac{15/100+5/100+4/100}{60/100} = \frac{24/100}{60/100} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

d) Seja Z=X+Y, a variável Z indica o numero de vezes que o aluno foi ao teatro entre os meses de janeiro e fevereiro de 2016,

Y/X	0	1	2	3
0 **(x+y)**	20/100 **(0)**	13/100 **(1)**	5/100 **(2)**	2/100 **(3)**
1 **(x+y)**	15/100 **(1)**	10/100 **(2)**	4/100 **(3)**	1/100 **(4)**
2 **(x+y)**	5/100 **(2)**	10/100 **(3)**	3/100 **(4)**	2/100 **(5)**
3 **(x+y)**	4/100 **(3)**	3/100 **(4)**	2/100 **(5)**	1/100 **(6)**

Z	0	1	2	3	4	5	6
	20/100	13/100 + 15/100	5/100 + 10/100 + 5/100	2/100 + 4/100 + 10/100 + 4/100	1/100 + 3/100 + 3/100	2/100 + 2/100	1/100

Logo, a distribuição marginal de Z=X+Y é dada por,

Z	0	1	2	3	4	5	6
	20/100	28/100	20/100	20/100	7/100	4/100	1/100

De modo que,

$$\begin{aligned} E(Z) &= 0\times\frac{20}{100}+1\times\frac{28}{100}+2\times\frac{20}{100}+3\times\frac{20}{100}+4\times\frac{7}{100}+5\times\frac{4}{100}+6\times\frac{1}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{28}{100}+\frac{40}{100}+\frac{60}{100}+\frac{28}{100}+\frac{20}{100}+\frac{6}{100}=\frac{182}{100}=1,82. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= 0^2\times\frac{20}{100}+1^2\times\frac{28}{100}+2^2\times\frac{20}{100}+3^2\times\frac{20}{100}+4^2\times\frac{7}{100}+5^2\times\frac{4}{100}+6^2\times\frac{1}{100} \\ &= \frac{0}{100}+\frac{28}{100}+\frac{80}{100}+\frac{180}{100}+\frac{112}{100}+\frac{100}{100}+\frac{36}{100}=\frac{536}{100}=5,36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{536}{100}-\left(\frac{182}{100}\right)^2 \\ &= \frac{536}{100}-\frac{33124}{10000}=\frac{53600-33124}{10000}=\frac{20476}{10000}=2,0476. \end{aligned}$$

Outra forma, usando o item (b) podemos obter

$$E(Z) \;=\; E(X) + E(Y) = 0,82 + 1 = 1,82.$$

$$\text{Var}(Z) \;=\; \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \times \text{Cov}(X, Y) = 0,7876 + 1 + 2 \times (0,13) = 1,8236 \approx 1,82.$$

Exercício 3

A distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada abaixo:

Y/X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

a) Verifique se X e Y são independentes,

b) Obtenha $\rho(X, Y)$ e comente

Solução

a) Observe que,

Y/X	-1	0	1	P(y)
-1	1/8	1/8	1/8	**3/8**
0	1/8	0	1/8	**2/8**
1	1/8	1/8	1/8	**3/8**
P(x)	**3/8**	**2/8**	**3/8**	1

Note que, $p_{22} = 0$ e $p_{2\cdot}p_{\cdot 2} = 2/8 \times 2/8 = 4/64$ donde segue que, $p_{22} \neq p_{2\cdot}p_{\cdot 2}$. Portanto, as variáveis não são independentes.

Notação:

- p_{22}=P(X=0,Y=0)
- $p_{2\cdot} = P(Y = 0)$
- $p_{\cdot 2} = P(X = 0)$

b) Note que,

$$E(X) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$$

$$E(XY) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

Portanto, $\rho(X, Y) = 0$. Observe que embora a correlação entre as variáveis seja nula elas não são independentes.

É interessante ressaltar que variáveis independentes implicam em correlação nula, mas a recíproca não é verdadeira, como podemos constatar neste exemplo.