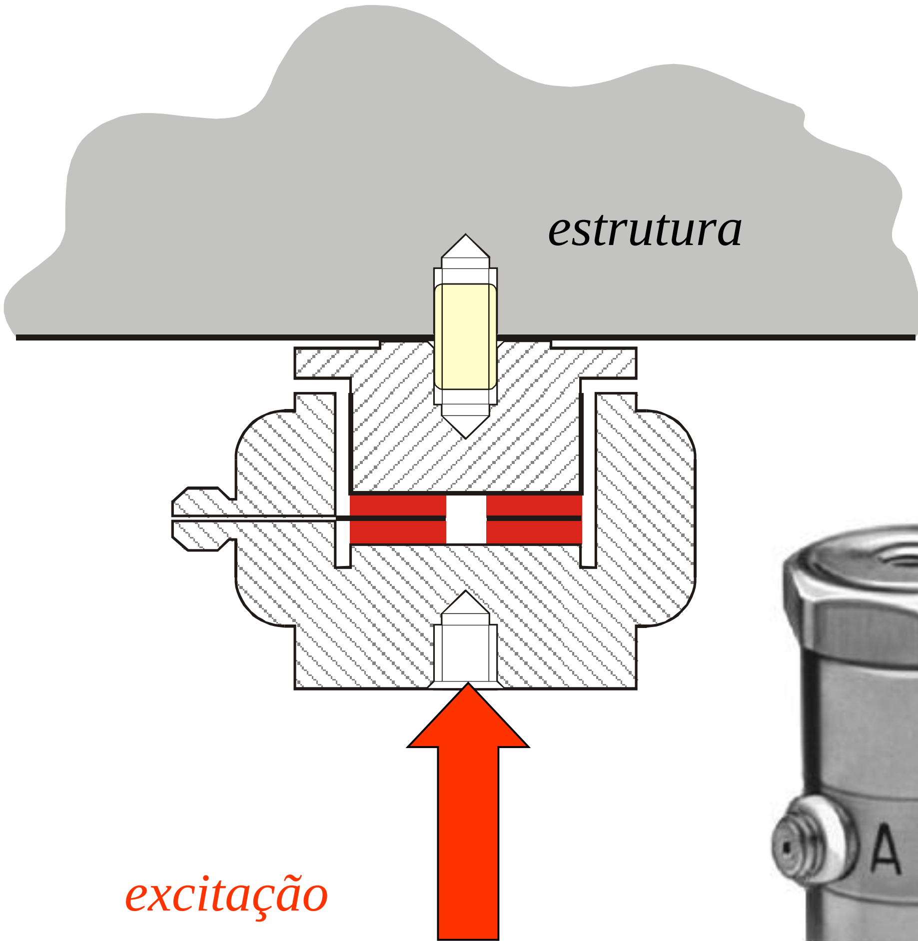
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

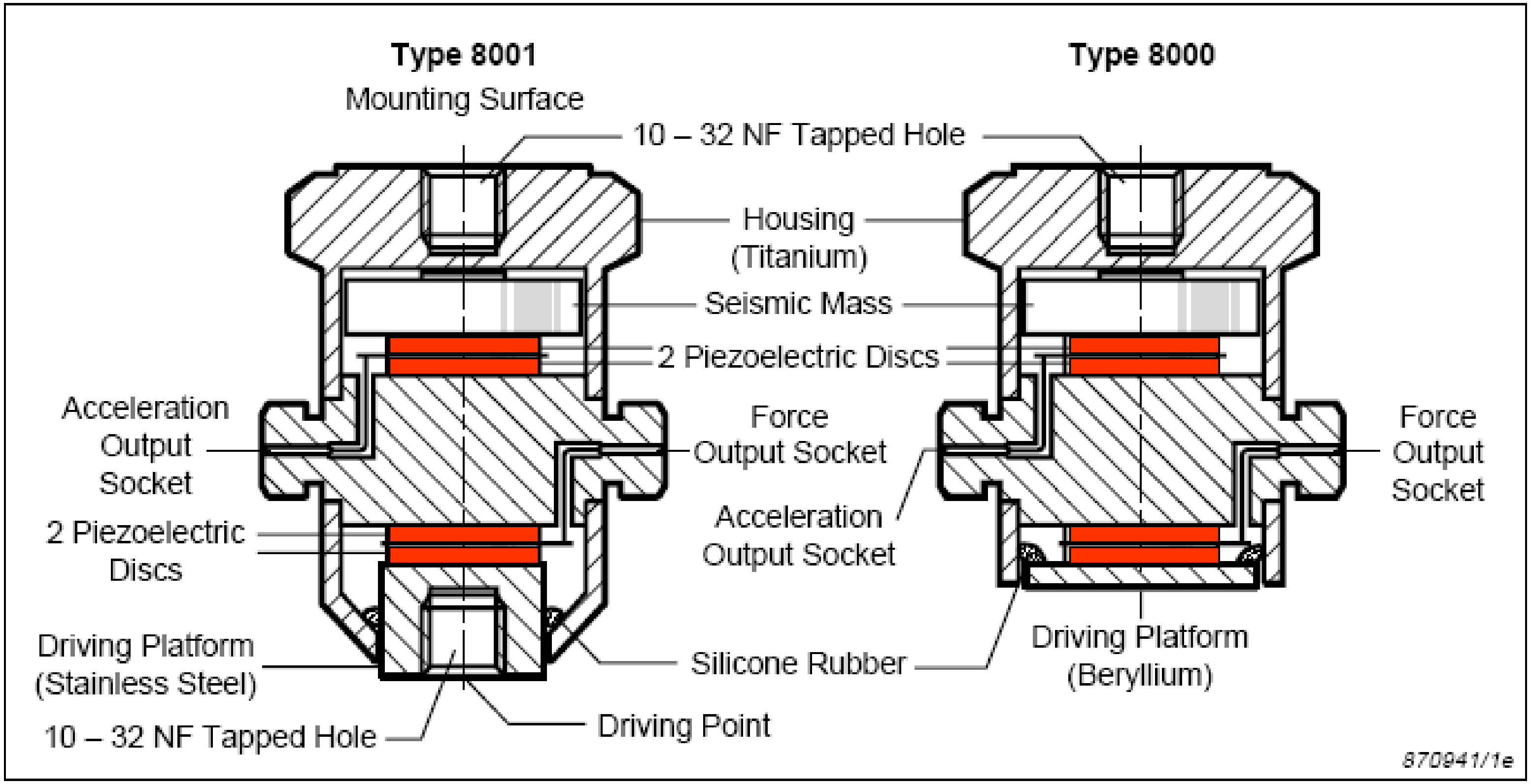
Sensores Piezelétricos

Transdutor de Força

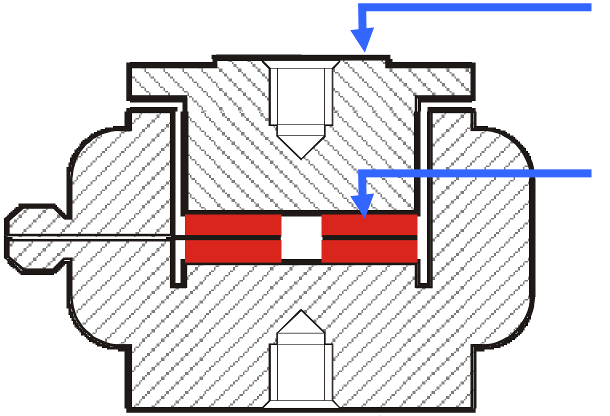
O Transdutor de Força

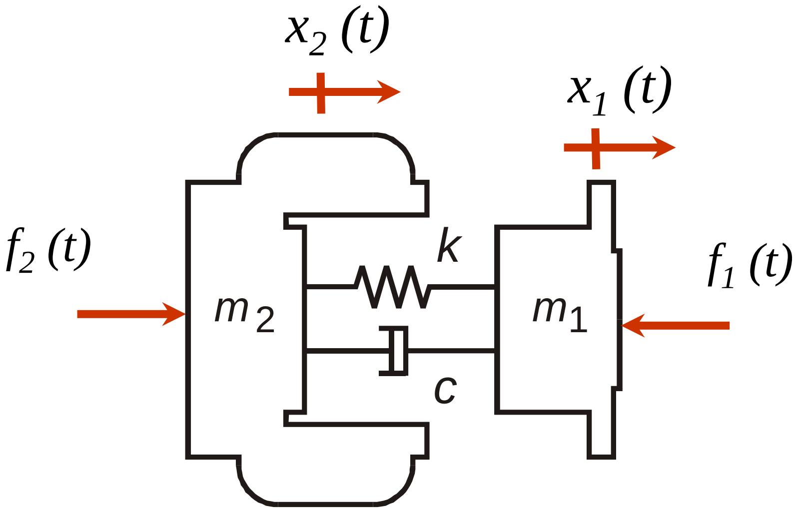


O Transdutor de Força



Modelo Mecânico





$$m_1\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = -f_1(t)$$

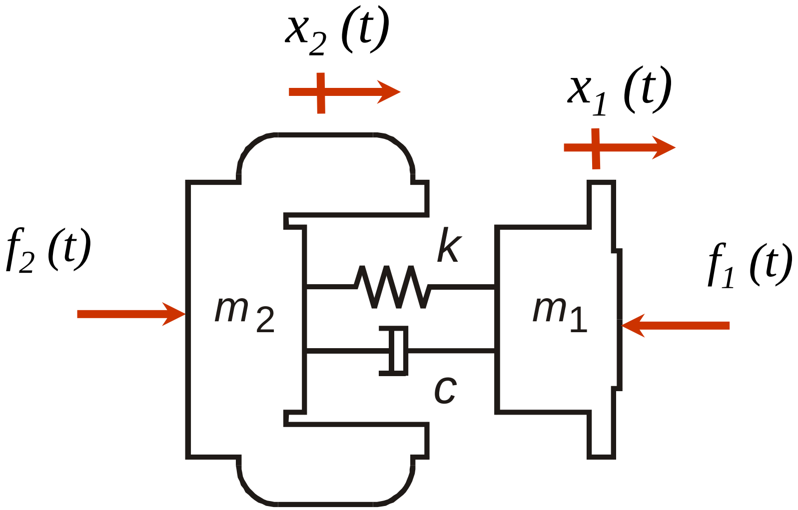
$$m_2\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 + x_1) = f_2(t)$$

Modelo Mecânico

Para a resposta harmônica de regime permanente

Assume-se:
$$\begin{cases} f_1(t) = F_1\, e^{j\omega t} \\ f_2(t) = F_2\, e^{j\omega t} \end{cases}$$

Então:
$$\begin{cases} x_1(t) = X_1\, e^{j\omega t} \\ x_2(t) = X_2\, e^{j\omega t} \end{cases}$$



Substituindo-se nas equações de movimento: ***com S = k + j w c***

$$\begin{aligned} (S - m_1\omega^2)X_1 - SX_2 &= -F_1 \\ -SX_1 + (S - m_2\omega^2)X_2 &= F_2 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{D}(\omega)\begin{bmatrix} (S - m_1\omega^2) & -S \\ -S & (S - m_2\omega^2) \end{bmatrix}$$

Modelo Mecânico

Equação característica do sistema: *determinante da matriz dinâmica*

$$\det(\mathbf{D}) = \Delta(\omega) = -[(m_1 + m_2)S - m_1 m_2 \omega^2]\,\omega^2$$

Ressonância: $\Re[\Delta(\omega)] = 0$

$$\Re[\Delta(\omega)] = -[(m_1 + m_2)k - m_1 m_2 \omega^2]\,\omega^2$$

Parâmetros do transdutor:

$\omega_1 = 0$ → ***Corpo rígido***

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m_e}}$ → ***Ressonância***

$\varsigma = \dfrac{c}{2\sqrt{k\, m_e}}$ → ***Fator de Amortecimento***

$m_e = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ → ***Massa efetiva***

Nota-se então a presença de duas frequências naturais, sendo a primeira delas a de corpo rígido

Modelo Mecânico

Amplitudes de regime permanente:

$$X_1 = \frac{S\,F_2 - \left(S - m_2\,\omega^2\right)F_1}{\Delta(\omega)} \qquad X_2 = \frac{\left(S - m_1\,\omega^2\right)F_2 - S\,F_1}{\Delta(\omega)}$$

Tensão de saída do transdutor de força:

Sensibilidade de deslocamento à Carga [pC/μm]

$$E_f = H_f^e(\omega)\,\frac{S_z}{C_f}\left(X_2 - X_1\right)$$

Tensão de saída do sensor

Capacitância do circuito do TF

Característica de 1a orderm do TF:

$$\frac{j\tau_f\,\omega}{1 + j\tau_f\,\omega} \qquad \tau_f = R_f\,C_f$$

Então, a expressão para a tensão de saída fica:

$$E_f = S_f \, H_f(\omega) \left(\frac{m_2 F_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 F_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Onde:

$$S_f = \frac{S_z}{C_f \, k} = \frac{S_q}{C_f}$$

Sensibilidade à tensão [mV/N]

$$S_q = \frac{S_z}{k}$$

Sensibilidade à carga [pC/N]

A FRF para o transdutor de força é então:

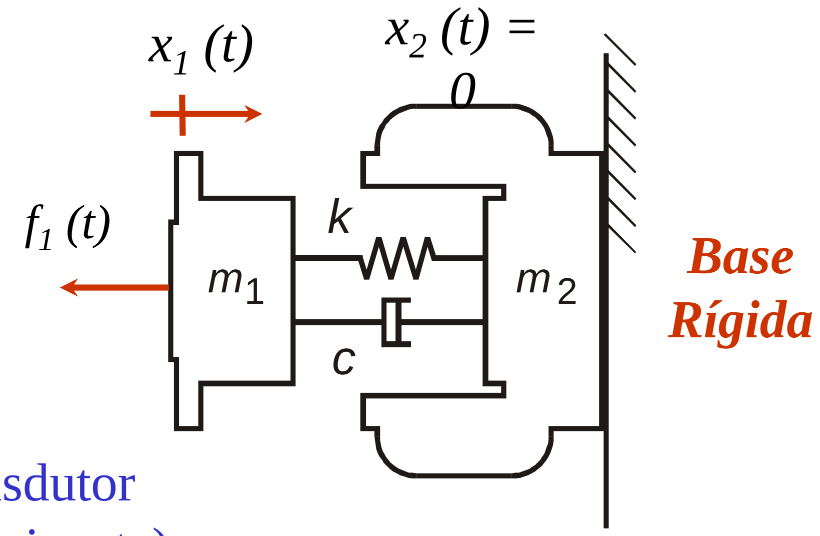
$$H_f(\omega) = \underbrace{\left[\frac{j\tau_f\omega}{1+j\tau_f\omega}\right]}_{\text{elétrico}}\underbrace{\left[\frac{1}{1-r^2+j2\varsigma r}\right]}_{\text{mecânico}}$$

Observação:

A frequência natural de referência para o cálculo de ***$r = \omega / \omega_n$*** é a ***fequência natural instalada*** que por sua vez ***depende de como o transdutor de força é usado !***

TF rigidamente fixado à uma fundação

Neste caso, a tensão de saída do transdutor é:



Obs.:

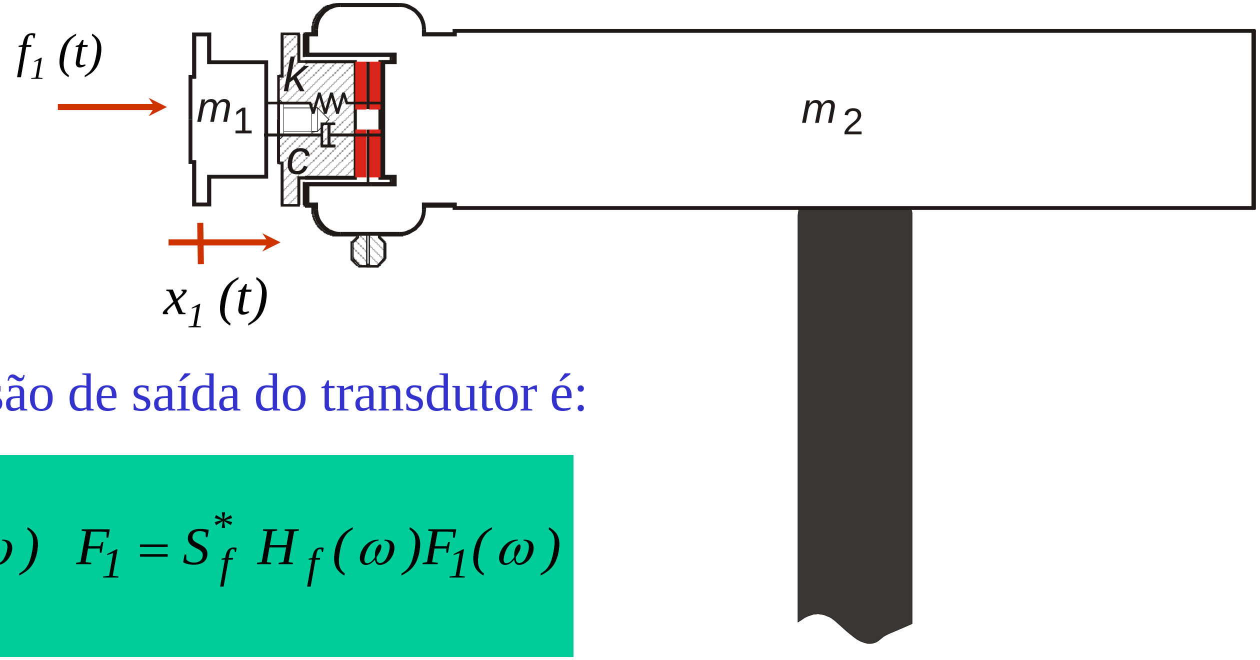
- Modelo idêntico à um acelerômetro
- Quando nenhuma massa é fixada à m_1 o transdutor exibe a w_n nominal (carta de calibração do fabricante)
- Conforme m_1 aumenta, w_n diminui

$$E_f = H_f^e(\omega)\frac{S_z}{C_f}\left[\frac{1}{S - m_1\omega_2}\right]F_1 = S_f H_f(\omega) F_1(\omega)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

TF montado em um martelo de impacto

Modelo:



Neste caso $\boldsymbol{F_2 = 0}$ e a tensão de saída do transdutor é:

$$E_f = \left[\frac{m_2 S_f}{m_1 + m_2}\right] H_f(\omega) \quad F_1 = S_f^* H_f(\omega) F_1(\omega)$$

$$S_f^* = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) S_f$$

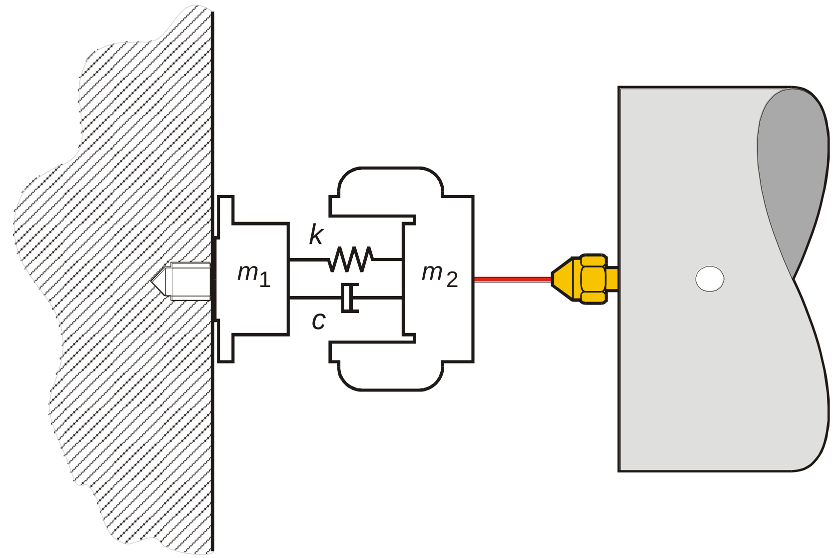
Sensibilidade efetiva à tensão

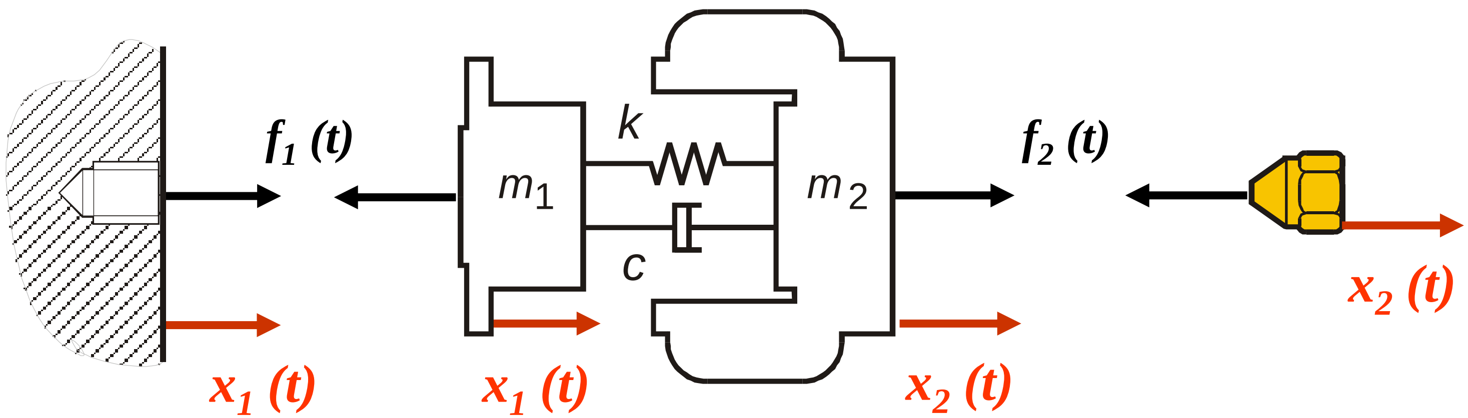
- Variação de $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$: tempos de contato
- Cuidados especiais no uso de martelos de baixa inércia

TF usado com excitador

$$X_1 = H_s(\omega)F_1$$

H_s (w) é a *FRF de ponto* para o ponto de excitação





TF usado com excitador

$$X_1 = H_s(\omega) F_1$$

Também sabemos:

$$X_1 = \frac{S\,F_2 - \left(S - m_2\,\omega^2\right)F_1}{\Delta(\omega)}$$

$$F_2 = \left[\frac{\Delta(\omega)H_s(\omega) + S - m_2\,\omega^2}{S}\right]F_1$$

Tensão de saída: $E_f = S_f\,H'_f(\omega)\left(1 + m_1\,A_s(\omega)\right)F_1$

$A_s(\omega)$ é a acelerância de ponto e $S_f = S_q/C_f$ é a sensibilidade à tensão do transdutor ***[V/N]***

Igualando-se estas duas últimas expressões:

$$H'_f(\omega) = \left[\frac{j\tau_f\,\omega}{1 + j\tau_f\,\omega}\right]\left[\frac{1}{1 + jc\frac{\omega}{k}}\right]$$

Existe algo de curioso nesta equação !

O termo D(w) não está presente na equação: sem ressonância mecânica, apenas uma atenuação e mudança na fase