ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

PSI.3212 – LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELETRICOS

Edição 2017
E.Galeazzo / L.Yoshioka

INTRODUÇÃO TEÓRICA

EXPERIÊNCIA 10: REDES DE SEGUNDA ORDEM

1- Objetivos

- Estudar a resposta transitória e permanente de ***circuitos RLC***.
- Determinar experimentalmente fator de amortecimento, frequência amortecida e frequência de ressonância de circuitos RLC.
- Estudar o efeito de batimento amortecido em circuitos RLC.

2- Introdução

As redes de segunda ordem são circuitos elétricos que possuem dois elementos armazenadores de energia. Estes circuitos são formados pela associação de um ou mais resistores e dois elementos armazenadores de energia, que podem ser de tipos diferentes ou não (desde que não possam ser reduzidos a um só elemento equivalente). Entre as várias possibilidades de circuitos de segunda ordem, alguns exemplos são constituídos por:

. Dois capacitores;
. Dois indutores;
. Um resistor, um capacitor e um indutor associados em série;
. Um resistor, um capacitor e um indutor associados em paralelo, entre outros.

Na maioria dos casos, um resistor adicional é incorporado nos modelos equivalentes de redes de segunda ordem para representar as perdas do circuito. Exemplos de redes de segunda ordem são ilustrados na Figura 1.

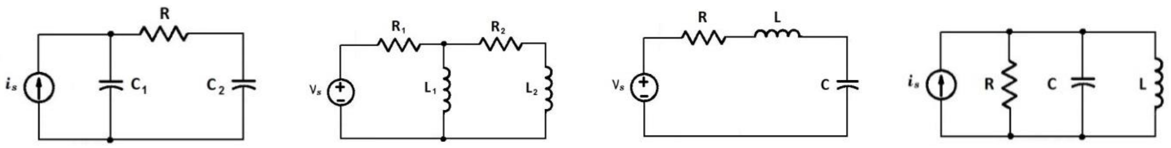


Figura 01 – Exemplos de circuitos elétricos de segunda ordem.

Nas associações R, L e C, a energia total armazenada é igual à soma das energias acumuladas em campo elétrico e campo magnético. A energia é trocada entre os elementos armazenadores de energia (capacitor e indutor) durante o funcionamento do circuito e, com o passar do tempo, a energia total do circuito é dissipada.

Os circuitos RLC que serão tratados neste laboratório são circuitos concentrados lineares invariantes no tempo, e descritos por uma *equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, a coeficientes constantes*. A solução completa da equação diferencial é a soma da solução homogênea e da solução particular. Ou, em outras palavras, a solução completa contempla uma parte que depende apenas do circuito e da energia armazenada inicialmente nos capacitores e indutores (**resposta natural ou livre**), e de uma segunda parte (**resposta forçada**) que depende do circuito e da entrada, ou seja, dos geradores independentes de tensão ou corrente. Podemos também separar a resposta do circuito em dois termos: **resposta transitória e permanente**. A resposta transitória será igual à resposta livre do circuito somente quando a entrada for nula com condições iniciais não nulas. A resposta transitória é definida como a parte da resposta que tende a zero quando o tempo vai a infinito. A resposta em regime permanente é a parte da resposta que permanece quando os transitórios se anulam, podendo ser valor constante ou um sinal que varia no tempo, como por exemplo, um sinal senoidal.

2.1 Resposta Natural de um Circuito RLC em Série

Para descrever o comportamento livre ou a resposta natural do circuito RLC em série, é preciso calcular a corrente que surge nos elementos armazenadores de energia com a liberação de energia armazenada no indutor, no capacitor, ou nos dois componentes [1], quando todos os geradores independentes estão inativados. Neste caso, desejamos conhecer a função i(t), para $t > 0$.

Vamos então supor que o circuito ilustrado na Figura 2, com excitação nula e com certa energia armazenada, começou a operar no instante $t_o = 0$, com as seguintes condições iniciais:

$$v_c(0) = v_o,$$

$$i_L(0) = i_o.$$

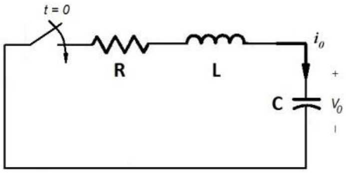


Figura 2 – Esboço de circuito RLC série com alimentação nula e energia armazenada.

Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff, temos que:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0 \tag{1}$$

Considerando que:

$$v_R(t) = Ri(t), \tag{1.1}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \tag{1.2}$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \ + v_C(0), \tag{1.3}$$

e substituindo os valores (1.1), (1.2) e (1.3) na expressão (1), obtemos:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau + v_o = 0. \tag{2}$$

Para reduzir (2) a uma equação diferencial, vamos derivá-la em relação ao tempo. Ao fazermos a derivação e dividindo tal expressão por L, chegamos a:

$$\frac{d^2i(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0 \tag{3}$$

A abordagem clássica para resolver (3) consiste em supor que a solução não trivial é uma função exponencial, ou seja, deve-se supor que a corrente no circuito é da forma:

$$i(t) = Ae^{st} , \tag{4}$$

onde $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{s}$ são constantes.

Substituindo (4) em (3) e efetuando as derivações, obtemos a expressão:

$$Ae^{st}\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=0 \qquad (5)$$

A igualdade da expressão (5) será satisfeita para todos os valores de $\boldsymbol{t}$ se $\boldsymbol{A}$ for nulo, ou se o termo entre parênteses for nulo, considerando que $\boldsymbol{e^{st}\neq 0}$ para qualquer valor finito de ***st***.

Como a solução considerando $\boldsymbol{A}=0$ só faz sentido se o circuito estiver inicialmente descarregado (ou seja, $v_o = 0$ e $i_o = 0$, com isso a corrente seria nula em qualquer valor de $\boldsymbol{t}$), em geral é o termo entre parênteses que deve se anular. Assim chegamos à equação característica associada a esta equação diferencial:

$$s^2+2\alpha s+{\omega_o}^2=0. \qquad (6)$$

Note que foram definidos dois parâmetros em (6):
$\alpha=\frac{R}{2L}$ (para circuitos RLC em série, sendo R a resistência equivalente do circuito)[1]; $\boldsymbol{\alpha}$ é denominado fator de amortecimento (em rad/s);
$\omega_o^2=\frac{1}{LC}$; $\boldsymbol{\omega_o}$ é denominada frequência própria não amortecida[2] (em rad/s).

Esta equação de segundo grau (6) recebe o nome de equação característica porque, dependendo do valor das suas raízes, $s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}$, a equação (4) (que é solução da equação diferencial homogênea) apresentará um resultado diferente.

Perceba que estes parâmetros são relacionados apenas como os componentes do circuito RLC, nada mais. Além disso, os valores de $\boldsymbol{\alpha}$ e de $\boldsymbol{\omega_o^2}$ determinarão a forma da resposta natural do circuito RLC série (isso vale também para o circuito RLC paralelo). Três possíveis soluções para a equação diferencial poderão ser obtidas, sendo que a forma da resposta natural pode ser categorizada como:

---

[1] Para circuitos RLC em paralelo, $\alpha=\frac{1}{2RC}$.

[2] ω_o é o mesmo para os circuitos RLC série e paralelo.

. **<u>Superamortecida:</u>** se $\omega_o^2 < \alpha^2$, as duas raízes de (6) são reais e distintas. Neste caso, a corrente (ou a tensão) do circuito chega ao seu estado final sem oscilação. A corrente é dada por:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{7}$$

. **<u>Subamortecida ou oscilatória:</u>** se $\omega_o^2 > \alpha^2$, as raízes de (6) são dois números complexos conjugados. Neste caso a corrente (ou a tensão) vai oscilar com uma certa frequência de oscilação $\boldsymbol{\omega_d}$, porém sua amplitude de oscilação é atenuada exponencialmente com o tempo. A rapidez com que as oscilações diminuem depende do parâmetro **"α"**. Sempre que houver um elemento dissipativo (R) no circuito, $\alpha \neq 0$ e $\omega_d < \omega_o$. A corrente neste caso será dada por:

$$i(t) = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \tag{8}$$

$$\text{onde } \omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$$

O parâmetro $\boldsymbol{\omega_d}$ é denominado <u>frequência angular amortecida</u> (rad/s).

. **<u>Criticamente Amortecida:</u>** se $\omega_o^2 = \alpha^2$, as raízes de (6) são dois números reais e iguais. Trata-se da situação em que o estado final é atingido <u>o mais rápido possível</u> sem que o sistema oscile. Os sistemas criticamente amortecidos raramente são encontrados na prática, já que correspondem ao caso especial em que $\omega_o = \alpha$. Neste caso, será visto no curso de teoria que aparece um termo a mais, sendo a corrente do circuito descrita por:

$$i(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{9}$$

Depois de obtida a equação que descreve a resposta natural da corrente no circuito, é possível também calcular a solução homogênea da tensão entre os terminais de qualquer um dos elementos.

2.2 Resposta dos Circuitos RLC em Série à Excitação em Degrau

Vamos determinar a resposta do circuito RLC em série com excitação a um degrau, desenvolvendo as equações que descrevem o comportamento da tensão no capacitor da

Figura 3. Para facilitar, vamos supor que não há energia armazenada no circuito ilustrado no momento em que a chave do circuito é fechada.

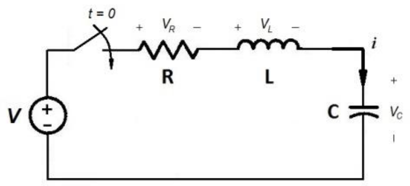


Figura 3 – Circuito RLC série com excitação a um degrau.

Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito da Figura X, temos que:

$$E = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t) \tag{10}$$

Como desejamos obter a expressão que descreve o comportamento da tensão sobre o capacitor ao longo do tempo (ou seja, desejamos encontrar a solução homogênea e a solução particular da equação diferencial de segundo grau sobre a tensão no capacitor), é conveniente escrevermos a equação (10) em termos da tensão $v_c(t)$.

A corrente i(t) está relacionada à tensão no capacitor $v_c(t)$ através de:

$$i(t) = i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \tag{11}$$

A partir dela temos que:

$$\frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2_{v_c}(t)}{dt^2} \tag{12}$$

Substituindo (11) e (12) na expressão (10), dividindo a equação resultante por LC e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{d^2_{v_c}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}(v_c(t) - E) = 0 \tag{13}$$

O processo para resolver esta equação diferencial de segundo grau é semelhante ao que foi efetuado no item anterior, a fim de se obter as expressões de $v_c(t)$.

As três possíveis soluções para $v_c(t)$ serão:

$$v_c(t) = E + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t} \quad \text{(resposta superamortecida),} \tag{14}$$

$$v_c(t) = E + B'_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \text{ (resposta subamortecida),} \tag{15}$$

$$v_c(t) = E + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t} \quad \text{(resposta criticamente amortecida).} \tag{16}$$

Os valores de *A´₁, A´₂, B´₁, D´₁ e D´₂* são tais que as condições iniciais no circuito $v_c(0) = v_o$ e $i_L(0) = i_o$ sejam satisfeitas (neste exemplo temos que $v_c(0) = 0$ e $i_L(0) = 0$).

Perceba que as possíveis soluções apresentadas da equação diferencial contêm tanto a solução homogênea quanto a solução particular. Aqui, independentemente do tipo de resposta natural do circuito, o valor final da tensão v_c tenderá à tensão da fonte, *E*. A Figura 4 ilustra possíveis respostas do circuito RLC, exemplificando duas respostas com oscilação subamortecida e com fatores de amortecimento distintos, uma resposta com comportamento criticamente amortecido e outra com resposta superamortecida.

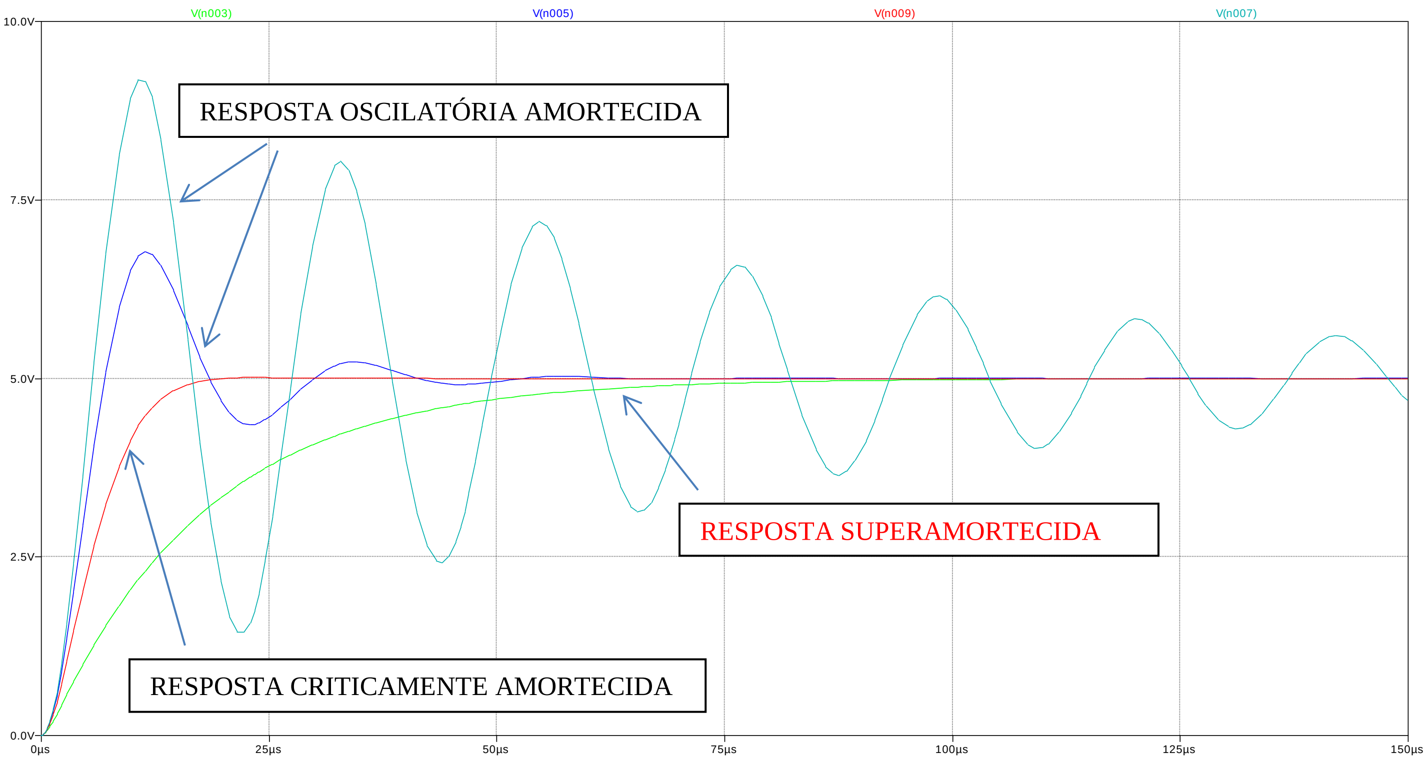


Figura 4 – Possíveis respostas naturais de um circuito RLC com excitação a um degrau.

2.3 Fenômeno de Batimento em Circuitos RLC

O fenômeno conhecido por “batimento” é o resultado da superposição de duas ondas com frequências ligeiramente diferentes. Batimentos são observados com ondas elétricas, ondas sonoras, mecânicas, entre outras [2].

Para entender o que é batimento, considere duas ondas com mesma amplitude, porém com frequências ligeiramente diferentes (f_1 e $f_2=f_1+\Delta f$), como indicadas na Figura 5.a, sendo:

$$v_1(t) = Acos(2\pi f_1 t)$$

$$v_2(t) = Acos(2\pi f_2 t)$$

A superposição das duas ondas resultará na função resultante v(t), representada na Figura 5.b, onde:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = A(cos2\pi f_1 t + cos2\pi f_2 t) \qquad (17)$$

Observa-se que há interferência construtiva quando os sinais estão em fase, e interferência destrutiva quando $v_1(t)$ e $v_2(t)$ estão em oposição de fase.

Utilizando-se a identidade trigonométrica:

$$\cos a + \cos b = 2cos\left(\frac{a-b}{2}\right)cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Podemos representar v(t) (17) da seguinte forma:

$$v(t) = \left[2Acos2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]cos2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t \qquad (18)$$

Pela expressão (18), deduzimos que a onda v(t) oscila com uma frequência $\frac{f_1+f_2}{2}$, e sua amplitude varia lentamente com o tempo, com uma frequência $\frac{f_1-f_2}{2}$, como ilustrado na Figura 5.b.

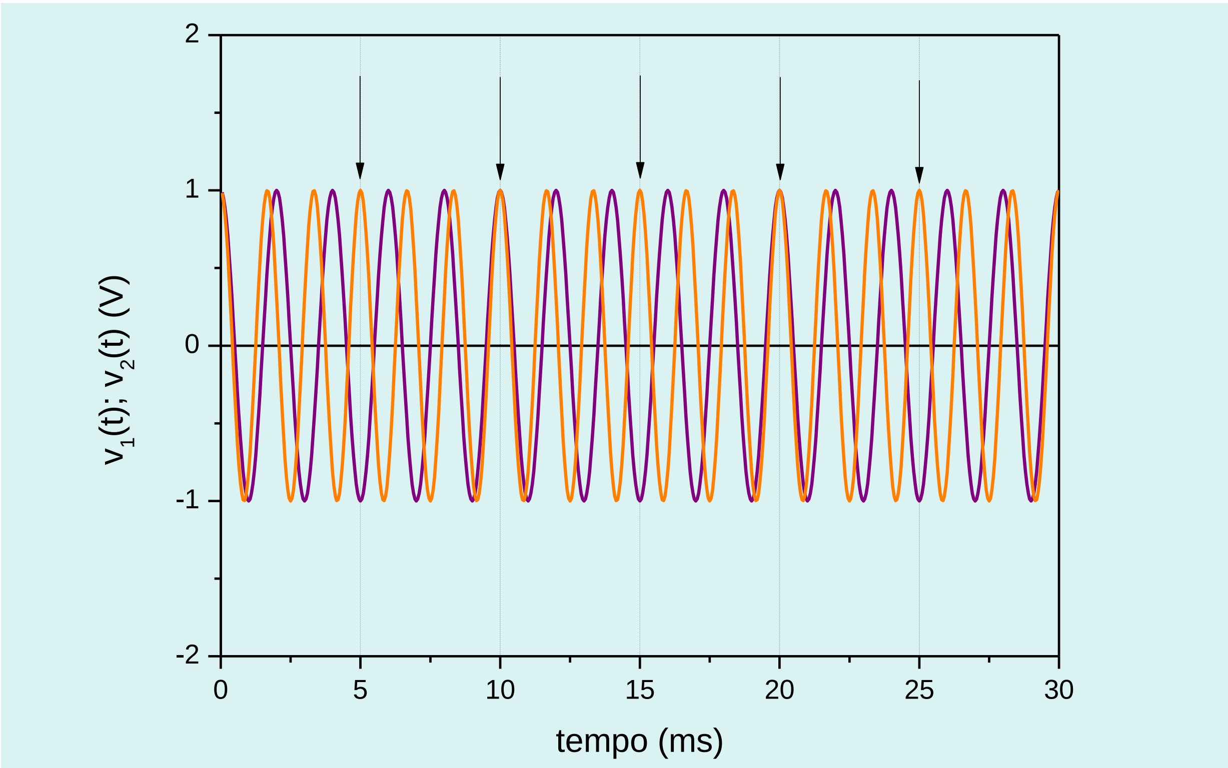
O batimento vem a ser a variação periódica da intensidade do sinal gerado pela superposição de duas ondas com frequências ligeiramente diferentes. A frequência de batimento é definida como o número de máximos da envoltória de v(t) por segundo, sendo dada pela expressão:

$$f_b = f_1 - f_2$$

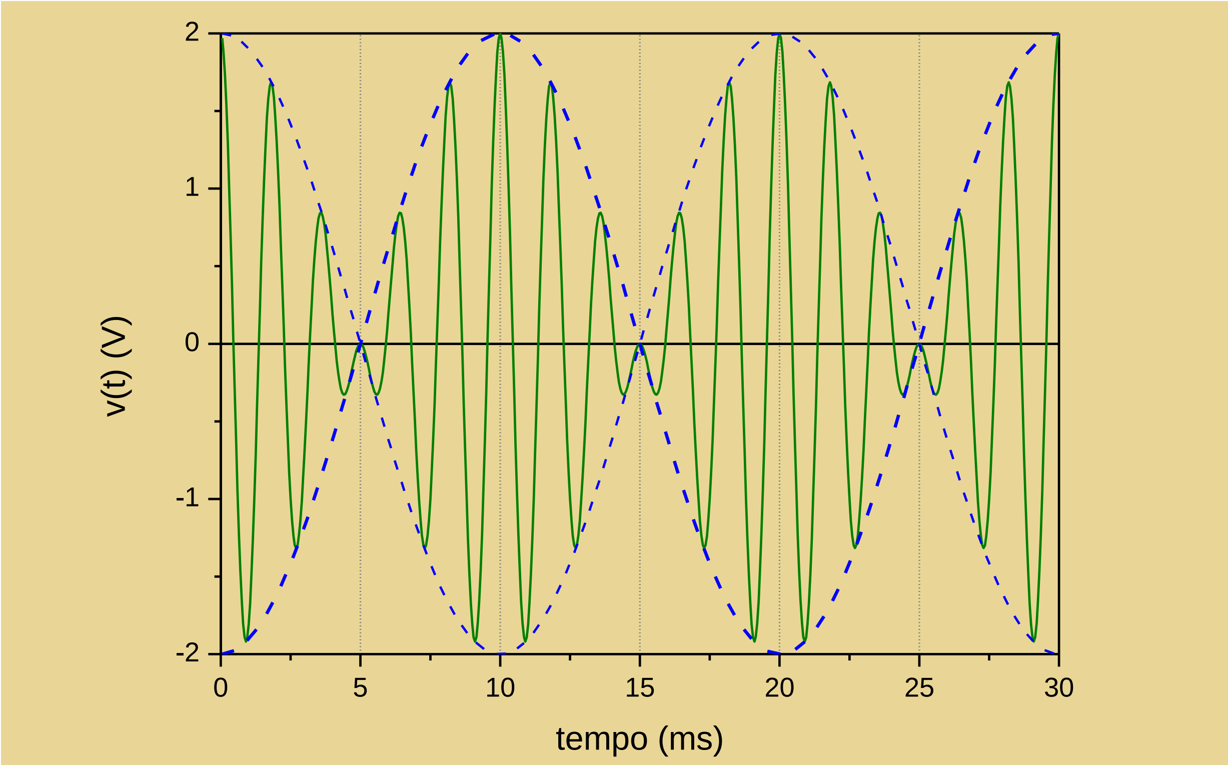
Observe que existem dois máximos de amplitude para cada período da função tracejada da Figura 5.b, que representa a envoltória de v(t).

Nos circuitos RLC este fenômeno poderá ser observado no intervalo correspondente à resposta em regime transitório, toda vez que o circuito for alimentado por uma onda senoidal de frequência muito próxima da frequência natural do circuito [2]. Sua visualização será destacada para os circuitos que tenham baixas perdas resistivas.

A superposição da resposta de dois circuitos RLC submetidos à excitação ao degrau (ou onda quadrada), cujas frequências de oscilação amortecidas são próximas entre si, causará por sua vez o batimento amortecido. Exploraremos este fenômeno neste laboratório.



(a)



(b)

Figura 5 – a) Representação gráfica de duas ondas senoidais ($v_1(t)$ e $v_2(t)$) em função do tempo, com frequências ligeiramente diferentes entre si. b) Representação gráfica da soma das duas funções senoidais ($v_1(t)+v_2(t)$), evidenciando o fenômeno de batimento.

Bibliografia

1. Nilsson, J.W.; Riedel, S.A.. **Circuitos Elétricos**, 6ª Edição, Editora LTC.
2. Orsini, L.Q.; Consonni, D.. **Curso de Circuitos Elétricos**, 2ª Edição, Editora Edgard Blucher Ltda.