LISTA DE MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Alguns avisos importantes para não se assustar com esta lista:

A. Antes de sair fazendo contas, primeiro entenda, em cada exercício, qual conta você precisa fazer. Ou seja, monte os sistemas lineares respectivos, mas se não quiser perder tempo, não resolva. (Isso só vale se você sabe o que é para ser feito depois, ok?) Pensando assim, a maioria dos exercícios sairá muito rapidamente.
B. Por outro lado, se você estiver em dúvida se está pensando certo, fazer o ajuste e colocar no gráfico ajuda a conferir sua resposta.

1. Aproxime os dados da tabela abaixo por uma função do tipo $ax + b$ usando MMQ.

x	0	1	2	3
y	1	-1	0	1

2. Ajuste ax^2 aos pontos

x	0	1	2	3
y	0	0.5	1.2	2.0

3. Com os dados abaixo e pesos uniformes, ajuste $y = a + be^x$ por MMQ.

x_i	-2	0	3
y_i	-1	-0.5	1

4. Ajuste $y = a + b\cos(x)$, por MMQ, aos dados

x	0	0.5	1	1.5
y	2	2.5	3.3	4.4

5. Quais são os coeficientes a e b tais que $a(1,2,3) + b(-1,1,-2)$ é o mais próximo possível de $(1,1,1)$, na métrica euclidiana? *Dica: Tente impor a igualdade e perceba que você cai em um sistema sobredeterminado. Em seguida, trate esse sistema com MMQ, usando pesos uniformes.*
6. a) Ajuste $a + b\cos(2\pi x) + c\sin(2\pi x)$ aos dados $(0{,}29)$, $(0.25{,}24)$, $(0.5{,}12)$ e $(0.75{,}27)$.
   b) Esboce os dados e a função ajustada, no intervalo $[0,1]$, transformando primeiro a expressão acima, depois de determinados a, b e c, em $a + A\cos\big(2\pi(x - x_0)\big)$.

AJUSTES EM QUE É PRECISO LINEARIZAR ANTES:

O método de mínimos quadrados que discutimos só pode ser aplicado quando a dependência da equação nos parâmetros é linear. O que multiplica cada parâmetro é uma expressão das variáveis que não envolve nenhum parâmetro. Por exemplo, se as variáveis são $x, y, z, w, \ldots$, e houver 2 parâmetros a e b, a equação deve ser da forma

$$f_1(x, y, z, w, \ldots) \cdot a + f_2(x, y, z, w, \ldots) \cdot b = h(x, y, z, w, \ldots)$$

Para 1 parâmetro ou mais do que 2 parâmetros é semelhante, como já vimos.

Portanto é preciso primeiro manipular as equações para que elas fiquem nessa forma.

7. Aproxime os dados da tabela abaixo por uma função do tipo ae^{bx} usando MMQ.

x	0	1	2
y	1.5	15	100

8. Aproxime os dados da tabela abaixo por função do tipo ax^b usando MMQ.

x	1	2	3	4
y	7	1	0.5	0.5

9. Considere a tabela abaixo.

x	-1	0.5	0	0.5	1
x^2	1	0.25	0	0.25	1

Aproxime os pontos da tabela usando MMQ por uma curva do tipo $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ (ou seja, neste exercício estamos aproximando um arco de parábola $y = x^2$ calculado em alguns pontos por um arco de circunferência de raio r e centro $(0, a)$).

10. Usando MMQ, faça um ajuste da função $y = \ln(ax + bx^2)$ aos pontos $(1, -4)$, $(2,0)$ e $(4,2)$, com pesos uniformes.

11. Ajuste $y = b + \ln(1 + ax)$ aos dados

x	0	0.5	1.0	1.5
y	2	3	3.5	3.7

12. O que você faria para usar MMQ linear no ajusta da relação

$$\frac{y + ax}{1 + by^2} = x$$

para N pontos (x_i, y_i), com $N \geq 2$? (Indique o que é para fazer a ponto de só faltarem os dados para concretizar o ajuste)

13. Em bioquímica, é bastante conhecida a *cinética de Michaelis-Menten,* uma fórmula que relaciona a taxa de reação enzimática (y) com a concentração do substrato (x), dada por

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}.$$

Dados experimentais dessas duas grandezas foram coletados:

x	1	2	3	4	5
y	1.375	2.625	3.5	4.0	4.25

Construa um gráfico com esses pontos e faça uma estimativa heurística dos valores que você espera para β_1 e β_2 (*Dica: Olhe para os comportamentos da função com x próximo de zero e com x muito grande e veja como esses dois parâmetros influenciam esses comportamentos quantitativamente.)* Ajuste os dados por MMQ e compare com sua expectativa.

AJUSTES COM PESOS:

Lembremos do início: tudo começou com um sistema sobredeterminado de equações lineares. O MMQ consistia em minimizar o resíduo quadrático, isto é, a soma

$$\sum_i (lado\ esquerdo\ da\ eq.i - lado\ direito\ da\ eq.i)^2$$

Quando colocamos pesos $p_i > 0$, trata-se de minimizar

$$\sum_i p_i (lado\ esquerdo\ da\ eq.i - lado\ direito\ da\ eq.i)^2$$

Ou seja: cada termos da soma fica multiplicado por p_i. Com isso, para minimizar a soma, é preciso dar mais importância em minimizar os termos que têm um peso mais alto.
Se continuarmos nosso raciocínio de obter um sistema de equações lineares achando o ponto crítico dessa soma, chegaremos em um sistema linear igualzinho, exceto que os produtos escalares, que são seus coeficientes, terão esses pesos embutidos. Em vez de $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$, teremos $\langle u, v \rangle = \sum_i p_i u_i v_i$. Só isso!

14. Com os dados e pesos abaixo ajuste $y = 1 + be^x$ por MMQ.

x_i	-2	0	3
y_i	-1	-0.5	1
p_i	1	1	2

15. Sejam $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$ quatro pontos do plano. Ajuste um círculo $x^2 + y^2 = r^2$ a esses pontos, usando MMQ linear com peso uniforme. Faça agora MMQ dando peso 1 para os pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$ e peso $p > 0$ para os outros dois, deixando a resposta – isto é, r – em função de p. O que acontece com o valor de r quando p tende a zero? E quando p tende a infinito? O resultado é coerente com sua intuição?
16. Sejam $(0,1)$, $(1,1)$ e $(2,2)$ pontos dados. Sejam $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$ e $y = 1 + \frac{1}{2}x$ duas funções distintas. Qual das duas funções tem menor resíduo quadrático com respeito a esses dados? E com pesos $1, \frac{1}{2}, 1$, respectivamente?